

解説に先立って

ここに提出した 20 の問題は、数学分野をカバーする意図で出題したわけではなく、また高い数学的知識やクイズのようなトリックを要求しているものでもない。以下の解説で判明するように、大きな世界に広がる通路になっていること、私たちが生きる世界をそのようにして切り取ることができるということをまずを認識してもらいたい。**数学的思考**とは何かというものはいわく説明しがたいのであるが、決して公式を暗記したり多くの技工を知ることではないことは断言できる。

数学を学ぶためには、ある程度の時間を費やして、**音楽・絵画・彫刻・文学などの芸術作品や哲学的世界に沈潜するのと全く同様に**、深く「鑑賞」し「味わう」ことが必要であることをこの機会に知ってほしい。

1. 解答 ⑤ 8

公倍数や公約数を求めることは今日では**初等整数論**の一部をなし、あらゆる局面で非常に重要な計算術である（自分で計算できるようにしておこう）。これらは既に紀元前 3 世紀、アレクサンドリアの**ユークリッド** (*Ευκλείδης*, Euclid) によって完全に究明されている。

三つの数 144, 56 と 40 を共に割り切る最大の整数（**最大公約数**という） $\gcd(144, 56, 40)$ を求めるには、数が小さい時には、次のようにしてそれぞれの数の**素因数分解**

$$144 = 2^4 \times 3^2, \quad 56 = 2^3 \times 7, \quad 40 = 2^3 \times 5$$

から求めてもよい。たしかに、共通因子をくくりだして $\gcd(144, 56, 40) = 2^3 = 8$ とするのがわかりやすいだろう。

しかし、2 つの数 a, b であったとしても、それらの数が巨大数である場合には、『素因数分解すること自体に大きな手間がかかる』ために、この**素因数分解による方法はまったく勧められない**。

一般に、 $a > b$ であるとき、2 つの数 a, b の最小公倍数 $\gcd(a, b)$ を求める最速の方法は Euclid の互除法として知られている。この方法は、 a を b で割ったとき、整数商を q 、余りを r としたとき、 $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$ が成立することを利用している。 a, b を b, r で置き換えるということを、次のようにして r が b を割り切るまで繰り返す。いつか最後には割り切るのであるが、割り切る数（以下の b_{N+1} ）が求める最大公約数 $\gcd(a, b)$ である。

$$\begin{array}{lll} a_0 = b_0 \times q_0 + r_0, & 0 \leq r_0 < b_0, & \Leftarrow a_0 = a, b_0 = b \\ a_1 = b_1 \times q_1 + r_1, & 0 \leq r_1 < b_1, & \Leftarrow a_1 = b_0, b_1 = r_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_N = b_N \times q_N + r_1, & 0 \leq r_N < b_N, & \Leftarrow a_N = b_{N-1}, b_N = r_{N-1} \\ a_{N+1} = b_{N+1} q_{N+1} & & \Leftarrow b_{N+1} \text{ が } a_{N+1} \text{ を割り切った.} \end{array}$$

たとえば、 $\gcd(7833, 15477)$ は次のようにして素早く計算できる。 $7833 = 3^1 \times 7^1 \times 373^1$, $15477 = 3^1 \times 7^1 \times 11^1 \times 67^1$ と素因数分解するよりもう〜んと早いことがわかる。

$$15477 = 7833 \times 1 + 7644$$

$$7833 = 7644 \times 1 + 189$$

$$7644 = 189 \times 40 + 84$$

$$189 = 84 \times 2 + 21$$

$$84 = 21 \times 4 \quad \text{割り切れた！よって } \gcd(7833, 15477) = 21.$$

3 つの数 a, b, c の最大公約数 $\gcd(a, b, c)$ を求めるために、次の関係を使うとよい（証明すべきことであるが、手を動かして計算すると、正しいことがわかってくる）。

$$\gcd(a, b, c) = \gcd(\gcd(a, b), c).$$

2. 解答 ④ 8 倍

y が x の a 倍であるとは、 $\frac{y}{x} = a$ または $y = ax$ の関係という（この a を比例定数と呼ぶ）。これより、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ と $\frac{1}{a \times b}$ に $a = 5, b = 3$ を代入して

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3+5}{5 \times 3} = \frac{8}{15}, \quad \frac{1}{5 \times 3} = \frac{1}{15}.$$

したがって、

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a \times b}} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{1}{15}} = \frac{8}{15} \times \frac{15}{1} = 8.$$

3. 解答 ② $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{3}\right)$

2変数の連立1次方程式

$$\begin{cases} 2x + 9y = 22 & (1) \\ 3y = 4x - 9 & (2) \end{cases}$$

を解けばよい。

式 (1) から、式 (2) の両辺を 3 倍した $9y = 12x - 27$ を引き算してみると、 $2x = 22 - (12x - 27)$ を得る。これより、 $2x + 12x = 22 - (-27)$ したがって $14x = 29$ 。よって、 $x = \frac{7}{2}$ を得る。この結果を式 (2) に代入して、 $3y = 4 \times \frac{7}{2} - 9 = \frac{4 \times 7 - 18}{2} = \frac{10}{2} = 5$ 。よって、 $y = \frac{5}{3}$ を得る。

4. 解答 ③ 64 倍

べき指数法則

$$(x^a)^b = x^{ab}, \quad x^a \times x^b = x^{a+b}$$

を使う。

$$\frac{(2^3)^8 \times (2^4)^3}{2^{30}} = \frac{2^{24} \times 2^{12}}{2^{30}} = \frac{2^{24+12}}{2^{30}} = \frac{2^{36}}{2^{30}} = 2^{36-30} = 2^6 = 64.$$

この法則の大切な点は、任意の実数の有理数をべき乗が計算できることにある。有理数 $\mathbb{Q}$ とは、 $\mathbb{Q} = \{\frac{q}{p} \mid q, p \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}$ 表される数の集まりである。ある実数 x について、有理数 $q/p \in \mathbb{Q}$ のべき乗は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} x^r &= x^{\frac{q}{p}} \\ &= (x^q)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

ここで、 $y^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{y}$ とは、 $y^{\frac{1}{p}}$ を p 乗すると数 y になるような実数を表す。実数 r は有理数よっていくらでも近く近似することが可能 $\frac{q_n}{p_n} \rightarrow r, (n \rightarrow \infty)$ であるので、実数 x の実数 r のべき乗は

$$x^r = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{q_n}{p_n}}$$

で定義される。

5. 解答 ③ 23 万円

1 年目に x 万円貯金したとする。「2 年年目は 1 年目より 7 万円少なくしか貯金できなかった」から 2 年目の貯金額は $(x - 7)$ であると読むことができる。「3 年目は頑張って 2 年目の 2 倍となる 32 万円を貯金した」から、関係式 $2(x - 7) = 32$ を得る。この 1 次方程式 $2x - 14 = 32$ を解いて、 $x = 23$ 。

6. 解答 ③ 6000 円

東京から広島県福山市までの 750Km に必要なガソリン容量は

$$750[\text{Km}] \div 16[\text{Km}/\ell] = \frac{375}{8}[\ell] \quad \Leftarrow \text{単位の使い方び注意する}$$

である。このガソリン量 $[\ell]$ に 1 リットル当たりガソリン価格 128[円/ℓ] を掛けて

$$\frac{375}{8} [\ell] \times 128[\text{円}/\ell] = 6000 \text{ 円}.$$

このように、数値に付く**単位**（「次元」ということもある）の使い方に注意すると、不用意に計算を間違えることがウンと少なくなる。

単位が付かない無次元な量は現実の世界ではほとんどないことに注意し、**表記には常に単位**を忘れないように。単位は通常は「 $^{\circ}$ 」と「 $]$ 」内に書く。たとえば、重さでは $[\text{kg}]$ や $[\text{t}]$ （トン）など、長さでは $[\text{m}]$ や $[\text{cm}]$ 、ダイエットには $[\text{Cal}]$ （カロリー）、通貨では $[\$]$ や $[\text{¥}]$ 、時間では $[\text{s}]$ （秒）、 $[\text{h}]$ （時間）などのように。温度の単位については、問題 7 に説明している。

7. 解答 ⑤ 252

摂氏 $100[\text{C}]$ は $100 = \frac{5}{9}(f - 32)$ を解いて華氏 $212[\text{F}]$ に相当し、摂氏 $-40[\text{C}]$ は $-40 = \frac{5}{9}(f - 32)$ を解いて華氏 $-40[\text{F}]$ に相当する。これより、求める華氏温度範囲は $212 - (-40) = 252$ となる。

しかし、この計算方法はいただけない（同じような計算を 2 回繰り返している）。式 $100 = \frac{5}{9}(f_{\max} - 32)$ から式 $-40 = \frac{5}{9}(f_{\min} - 32)$ の両辺を差し引いて、 $100 - (-40) = \frac{5}{9}(f_{\max} - f_{\min})$ 。これより、 $f_{\max} - f_{\min} = 140 \times \frac{9}{5} = 252$ が、ほぼ 1 度の計算で求められる。

8. 解答 ④ 5 年後

元金を x 円、利子を r とすると、 n 年後には複利で $x(1+r)^n$ 円となる。 $(1+r)^n$ を**複利倍率**という。 $r = 0.1$ のとき、1 年後には $1 + 0.1$ 倍に、2 年後には $(1 + 0.1)^2 = 1.21$ 倍になる。3 年後は $(1 + 0.1)^3 = 1.21 \times 1.1 = 1.331$ 、4 年後は $(1 + 0.1)^4 = 1.331 \times 1.1 = 1.4641$ 倍になる。5 年後には $(1 + 0.1)^5 = 1.4641 \times 1.1 = 1.61051$ となって、元金の 1.5 倍を初めて越えることがわかる。

このように複利計算には手間がかかる（いつでも電卓が利用できると思っではいけない。暗算ができれば素晴らしい）。正確ではないが、直ちに近似的な複利倍率を計算する方法を考えてみよう（お金を借りる場合には、ぜひ思い出してほしい）。

n 個から k 個選り出す場合の数を $\binom{n}{k}$ または ${}_nC_k$ と書いて **2 項係数**といい、

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad n! \text{ は } n \text{ の階乗 } n! = n \times (n-1)!, \quad 0! = 1$$

で定義される。たとえば、階乗の計算を実行して $\binom{10}{8} = \frac{10!}{(10-8)!8!} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$ である。2 項係数の意味は明白で、 a と b の **2 項展開**が次のように書けるからである。 $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1$ に注意すると

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n \end{aligned}$$

となる。 $\binom{n}{1} = n$ にも注意しておく。たとえば、次のようになる。

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \end{aligned}$$

さて、複利の問題に戻ろう。 $a = 1, b = r$ と考える。利子 r は $0 < r < 1$ であるため、 $r, r^2, r^3, r^4, \dots$ はどんどん小さくなる。そこで、 $(1+r)^n$ を次のように大胆に近似することを考える（これならすぐに計算できる）。

$$(1+r)^n \sim 1 + nr \quad \Leftarrow \text{「利率 } r \text{ の } n \text{ 年後の複利倍率は } 1 + nr \text{ よりも大きい」}$$

$r = 0.1$ のとき、8 年後の複利倍率 1.1^8 を $1 + 8 \times 0.1 = 1.8$ とみなすのである。もちろん、真の値 $(1+r)^n$ は明らかに $1 + nr$ より大きいことは忘れてはならない（実際には 8 年後には $1.1^8 = 2.144$ となって 2 倍を越える）。こうして考えるだけで簡単にお金を借りることを躊躇するはずだ（悪質な金融業者は年率でなく日率を設定する）。

9. 解答 ③ 2 時

12 時間時計盤では、たれでも 13 時が 1 時を、17 時を 5 字を指すことは知っている（デジタル時計であってもアナログ表示式を選ぼう）。時計盤で 12 時を指している時刻を 0 時とか 24 時とも言っている。このことは、以下のように、整数除算から生じる剰余（余り）に関する性質によっていることがわかる（こうした性質も問題 1 で触れた Euclid によって探求されている）。

時間が与えられたとき、時計盤が指し示す時刻は時間を 12 で割った**整数剰余**を表している（ここで、余りが 0 になったときには時計文字盤では 12 時を指すとする）。現在時が時計盤で 0 時（12 時）を指しているときから一定時間が経過した後の時計盤の時刻は、以下の計算から明らかだろう。

$$\begin{aligned} 10 \div 12 &= 0 \text{ 余り } 10 \rightarrow 10 \text{ 時}, & 13 \div 12 &= 1 \text{ 余り } 1 \rightarrow 1 \text{ 時}, \\ 17 \div 12 &= 1 \text{ 余り } 5 \rightarrow 5 \text{ 時}, & 12 \div 12 &= 1 \text{ 余り } 0 \rightarrow 0 \text{ 時}, \\ 25 \div 12 &= 2 \text{ 余り } 1 \rightarrow 1 \text{ 時}, & 30 \div 12 &= 2 \text{ 余り } 6 \rightarrow 6 \text{ 時}. \end{aligned}$$

こうした余りを求める計算を次のように書き表す（**合同式**）こととする。

$$a \div b = q \text{ 余り } r \quad \Rightarrow \quad a \equiv r \pmod{b}$$

このとき、**数 a は b を法として数 r に合同**である（congruent modulo m ）という。つまり、与えられた時刻 h [時間] と文字盤上の時刻 t [時間] とは

$$h \equiv t \pmod{12}$$

の関係にある。今、文字盤が 3 時を指しているとき、947 時間後とは $3 + 947 = 950$ 時になる。これより

$$950 \div 12 = 79 \text{ 余り } 2 \quad \text{つまり } 950 \equiv 2 \pmod{12}$$

から、文字盤の 2 時を指すことがわかる。

整数だけを使った加減乗除は小学生でも計算できることである。しかし、整数の性質は極めて深遠で美しい。人類史上最大の数学者の一人である**ガウス**（Fridericus Gauß, Gauss, 1777–1855 年）が 24 歳で公刊した *Disquisitiones Arithmeticae* (1801 年) は整数論を初めて体系的にまとめた最初の金字塔である。現在の数学最大の未解決問題であるリーマン（Bernhard Riemann, 1826–1866 年）が予想したゼータ関数に関する性質（**リーマン予想**, 1859 年）は整数論の深部（たとえば**素数分布**）に関係している。

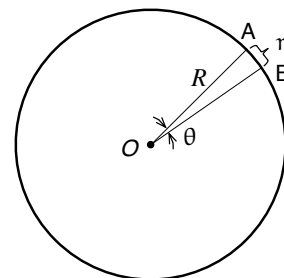
10. 解答 ④ 50000

紀元前 3 世紀の**エラトステネス**（Ερατοσθένης, Eratosthenes, BC275–BC194 年）は、右図のように、地球を半径 R を持つ完全球体とみなし、A のアレクサンドリアと B のシエネが同じ経度線上にあると考えた。 $\angle AOB$ を θ [度]、AB 間の球面に沿った長さ r [Km] とすると、円周率 $\pi \approx 3.14$ とする地球一周（赤道）の長さ $L = 2\pi R$ [km] との関係は、全周角度が 360 度であることを考慮すると、

$$2\pi R \frac{\theta}{360} = r, \quad \text{つまり } L(\theta, r) = \frac{360}{\theta} \times r$$

である。全周 $L = 2\pi r$ が角度 θ と表面距離 r で定まるという意味で全周 L は変数 r と θ の関数であるとして、 $L(\theta, r)$ と記した。これより、 $L = 2\pi R = \frac{360}{\theta} r = \frac{360}{7.2} \times 1000 = 50000$ [Km] となることがわかる。このとき、地球の半径 $R = \frac{5000}{2\pi} \approx 7958$ [Km] になる。実際には、地球の赤道半径は約 6378[Km]（極半径は 6357[Km] で赤道側に扁平）、全周約 40000[km] である。エラトステネスは全周を 45000[Km] と、実際の値にかなり近い結果を得た（繰り返すが、当時は地球は丸いと考えられていたことは大変興味深い）。

アレクサンドリアとシエネは同一経度線上にはなかったこと（この根本原因のひとつは、当時は「**同一時刻**」で測定することの困難性があったためである。同一時刻であることをどのように定めるかを考えてみることは素晴らしい。アインシュタイン（Albert Einstein, 1879–1955 年）の**特殊相対性理論**を再発見できるかもしれない）、アレクサンドリアとシエネ間の距離 r の測定誤差 Δr および緯度の測定誤差に起因する $\angle AOB$ の誤差 $\Delta \theta$ によって、地球の全周 L の計算にお



いて誤差 ΔL が生じてしまう。これらの**測定誤差**が求める値にどの程度影響するかを知ることは実用上非常に重要である。これを考えてみよう。

いま、測定誤差によって $\angle AOB$ が $\theta + \Delta\theta$ 、表面距離が $r + \Delta r$ であったとしよう。これらの測定値から求められる全周 $L(\theta + \Delta\theta, r + \Delta r)$ が求まるのだが、真の値 $L(\theta, r)$ のとの誤差を計算してみよう。

$$\begin{aligned}\Delta L &\equiv L(\theta + \Delta\theta, r + \Delta r) - L(\theta, r) \\ &= 360 \left(\frac{r + \Delta r}{\theta + \Delta\theta} - \frac{r}{\theta} \right) \quad \leftarrow \text{分母を揃えて計算} \\ &= \frac{360}{\theta} \left(\frac{\theta}{\theta + \Delta\theta} \Delta r - \frac{r}{\theta + \Delta\theta} \Delta\theta \right) \quad \leftarrow (\theta + \Delta\theta)^{-1} \text{をべき級数に展開} \\ &\approx \frac{360}{\theta} \left(\Delta r - \frac{r}{\theta} \Delta\theta \right) \quad \leftarrow \Delta \text{に関する2次以上の微小量を見捨てる}\end{aligned}$$

ここでは、 $|s| < 1$ に対するべき級数 $\frac{1}{1-s} = 1 + s + s^2 + s^3 + \dots$ を使って

$$\frac{1}{\theta + \Delta\theta} = \frac{1}{\theta} \times \frac{1}{1 - \left(-\frac{\Delta\theta}{\theta}\right)} = \frac{1}{\theta} \left(1 + \left(-\frac{\Delta\theta}{\theta}\right) + \left(-\frac{\Delta\theta}{\theta}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta\theta}{\theta}\right)^3 + \dots \right)$$

と表し、 $\frac{\Delta\theta}{\theta}$ が十分小さいとして $(\Delta\theta)^2, \Delta\theta\Delta r$ などを含む2次以上の微小項を見捨てる。この結果は数学的には、微小量を表す Δ を Leibniz (ライプニッツと読む：1646～1716) の記法を使って d と表し、次のように微積分の計算をつかって直接計算できる。

$$\begin{aligned}dL(r, \theta) &= \frac{\partial L}{\partial r} dr + \frac{\partial L}{\partial \theta} d\theta \\ &= \frac{360}{\theta} \left(dr - \frac{r}{\theta} d\theta \right)\end{aligned}$$

ここで、 $\frac{\partial}{\partial r}$ は関数 $L(r, \theta)$ を r で**偏微分**することを表す書き方である（この内容は大学レベルの微積分の内容である）。

さて、この結果は次のことを意味している：表面距離 r に関する誤差 Δr によってもたらされる全周誤差 ΔL は Δr に比例するだけであるが、角度誤差 $\Delta\theta$ によってもたらされる ΔL は $\frac{r}{\theta}$ に拡大される（角度 θ が分母にあることに注意）。いまの例では、 $r = 1000$ であるが、小さな値 $\theta = 7.2$ が全周 L に大きな寄与をもたらしているのである。

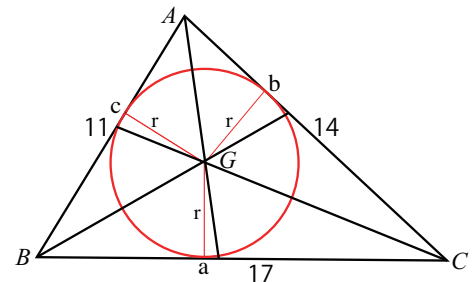
ちなみに、赤道と北極点の間の子午線弧長（全周のほぼ $1/4$ ）の $1/10000000$ （1 万分の1の千分の1）の長さを $1[\text{m}]$ と定めた **MKS 単位系**の体系（長さの単位をメートル $[\text{m}]$ 、重さの単位をキログラム $[\text{kg}]$ 、時間の単位を秒 $[\text{s}]$ を基本単位とする度量衡体系）を採用したのがフランスで、実際に 1798 年に子午線弧長の測量を完了した。このため、白金で作られたメートル原器および国際キログラム原器がパリの国際度量衡局 (BIPM) に保管されている。ただし、1983 年に国際度量衡総会にて、「メートルは、1 秒の 299792458 分の1の時間に光が真空中を伝わる行程の長さ」と定められた。1960 年には国際単位系 (SI) として MKS を拡張した単位系が世界標準となった（この場合、温度は Kelvin 絶対温度目盛 $[\text{K}]$ を使う。 $0[\text{C}]$ は約 $273[\text{K}]$ である）。問題7のように、一部の地域では慣習的にヤード・ポンドや華氏温度が使われている。

11. 解答 ③ 85 g

右図のように、 $\triangle ABC$ の頂点 A と B の角二等分線の交点を G は、実は G を中心とする $\triangle ABC$ の**内接円**の場所である（3 頂点を2等分する線分が1点で交わり、どうして言えるだろうか）。

内接円の中心 G から各辺に接する点、それぞれ a, b, c に降ろした線分は各辺に垂直で、その長さは内接円の半径 r に等しい。したがって、 $\triangle ABG, \triangle BCG$ および $\triangle CAG$ の三角形の「高さ」は同じ r となり、その面積は「底辺」の長さ、それぞれ 11, 17 および 14 の割合となる。したがって、

$$\triangle BCG \text{ の重さ} = 210[\text{g}] \times \frac{17}{11 + 17 + 14} = 210[\text{g}] \times \frac{17}{42} = 85[\text{g}].$$



初等幾何学ほど実用上役に立ち、しかも考える楽しさを味わえるものが他にいろいろあるだろうか。初等幾何学は、紀元前ギリシャ数学の不滅の名著、Euclid による『**原論**』($\Sigma\tau\omicron\iota\chi\epsilon\iota\alpha$:Elements) に初等整数論とともに、あますところなく書かれている。

三角形の内角の和が 180 度であることは、幾何学の 5 つの公理のうちの 5 番目（**平行線公理**。ある線分上にない点を通る線分に平行な直線は 1 本だけである）そのものである。この平行線公理は他の公理から導けるのかどうか最大の課題であった。幾何学は、この平面上の Euclid 幾何学以外にも、天体の運行を記述したり球体である地球上を旅するために発展した**球面幾何学**も同時に発展した。

ついに 1892 年、ロバチェフスキー (Lobachevsky) は平行線が 2 本以上ある幾何学を構築し、1835 年の János Bolyai と独立に双曲幾何学の扉を開いた。この非ユークリッド幾何学の流れは、**リーマン幾何学**（リーマン予想の Riemann だ。平行線を持たない）と呼ぶ微分幾何の研究で一般化され、アインシュタイン Einstein による曲がった時空間を記述する**一般相対性理論**、さらには**ブラックホールの理論**へと連なっていく。

12. 解答 ④ 2 倍

左側の弦の長さが $\frac{2}{3}$ 右側の弦の長さが $\frac{1}{3}$ である。弦から生じる音の周波数 $f[\text{Hz}]$ は元の長さ ℓ に逆比例する $f \sim 1/\ell$ ことから、右の弦を弾いて生じる周波数は左の弦の周波数の 2 倍である。これ自体は、たいへん簡単な問題である。

左側の弦から生じる音 G^0 は元の長さ 1 の弦の音の $\frac{3}{2} = 1.5$ 倍の周波数を持ち、右側の弦から生じる音 G^1 は長さ 1 の弦の音の 3 倍の周波数を持っている。それだけの問題とするならこれ以上言うべきことはないが、この音の発生は西洋音階の起源（あるいはピアノ鍵盤のオクターブ間で 12 鍵がること）を明瞭に説明する。興味深く、かつ非常に初等的であるので詳しく説明しておこう。

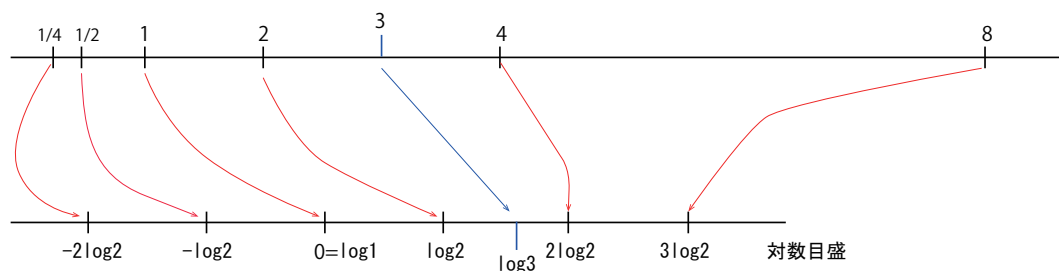
この問題のように、長さ 1 の弦の音を基準として C 音とすると、コマを置いて元の長さを $1/3$ にした周波数が 3 倍の G 音を作った操作を **3 倍操作**ということにする。**ピタゴラス** (Πυθαγόρας, Pythagoras, BC582–BC496 年) はこの操作を繰り返して、今日の西洋音階の基礎を作り上げた。

ある音の周波数の 2 倍の周波数を持つ音を、音楽用語では **1 オクターブ** (octave) 高い音という。弦の長さを半分にすると、振動数は 2 倍になるので、1 オクターブ高い音になるわけだ。2 オクターブ高い音とは元の音の 2 倍の 2 倍、つまり $2^2 = 4$ 倍の周波数を持つ音、3 オクターブ高い音は $2^3 = 8$ 倍の周波数を持つ。この G 音を「ソ」と呼んでいる。逆に、1 オクターブ低い音は元の音の 2 分の 1、つまり $2^{-1} = \frac{1}{2}$ の周波数を持ち、2 オクターブ低い音は $2^{-2} = \frac{1}{4}$ の周波数を持つ。上の G^1 は G^0 の 1 オクターブ高いソの音になっている。

ヒトの聴覚はオクターブ離れている音は（何オクターブ高くても低くても）どれも同じ音に聴こえてしまう。音楽心理学ではこれを『**オクターブ等価性**』という。このことは実際にギターなどを使って確かめることができる。ギター弾きが弦のチューニングを自分の耳だけで行うことができるのはこの事実に基づいている。男性と女性の合唱で、バスとソプラノが混じっていても違和感を感じずに鑑賞できるのも、このオクターブ等価性によっている。

オクターブの理解には**対数概念**が欠かせない。ある数 x と $y \neq 0$ が $y = x^a$ の関係にあるとき、 a を「**対数の底**を x とする y の対数」といい、 $a = \log_x y$ と記す。10 を対数の底とするときは**常用対数**という。次のように対数の底を明記することが不要であることも多い。

下図の上は、 $2^{-2} = \frac{1}{4}$, $2^{-1} = \frac{1}{2}$, 1, 2, 3, $2^2 = 4$ および $2^3 = 8$ を直線上にマークした図である（これらはオクターブの違いはあるが、みな C 音である）。下図の下は、オクターブの関係にあるそれぞれの値の対数をとって、 $\log 2^{-2} = -2 \log 2$, $\log 2^{-1} = -\log 2$, $\log 1 = 0$, $\log 2$, $\log 2^2 = 2 \log 2$ と対数目盛りでマークした図である。3 の音は、後で分かるように G(ソ) である。オクターブ関係にある数 $1/2^n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ は幅 $\log 2$ を持つ等間隔でマークされることに注意してもらいたい。オクターブ等価性を数学的にいえば、ヒトの聴覚は対数目盛的に聞こえるということになる。



オクターブ等価性を前提とすると、音階に関して大変興味深いことがわかってくる。フルキーボードのピアノでは 88 鍵並んでいて、それぞれの鍵盤には名前がつけられている。音の高低によって音を並べたものを**音階** (scale) という。い

いわゆる音の種類を表すドレミである。音階は、実は文化圏によってさまざまであることは大変興味深い。雅楽や声明、あるいはガムランでは音階がどうなっているか調べてみると、ヒトと音楽のつながりについて深い考察が得られるだろう。

以下、いわゆる西洋音階を取り上げよう。小学校で習ったように、ド (C)、レ (D)、ミ (E)、ファ (F)、ソ (G)、ラ (A)、シ (B)、そして再びド (C) となることはだれでも知っている。最初の C 音を C^0 と後の C^1 とでは 1 オクターブの差 (周波数比が 2) がある。今すぐに、自分の声は何オクターブまで発生できるか確認してほしい。

西洋音楽では、低い方から、C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A#, B, そして再び 1 オクターブ高い C というように、12 音階からなっている (#は**シャープ**記号である)。このことはピアノの 1 オクターブ C(ド) から次の C(ド) の間までに色黒 12 鍵あることで確かめられる。ピタゴラスはオクターブ等価性に気づいていて、弦の長さを調整して基準音の 3 倍, $3^3 = 9$ 倍 のように周波数の音を 3^n 倍し (**3 倍操作**)、2 で何回か割って基準音との周波数比が 1 と 2 の間になるように**オクターブ下げ**を実施しながら、音のグループを構成した。これが**ピタゴラス音階**である。

基準音 C(ド) の周波数を 3 倍して 2 でわった周波数比 $\frac{3}{2} = 1.5$ の音を基準音とは違う新しい音 G(ソ) とする。次に、さらに $362 = 9$ 倍して、比が 1 と 2 の間に収まるように $2^3 = 8$ で割った周波数比 $3^2/2^3 = 1.125$ の音を D(レ) とする。さらに、周波数比 $3^3/2^4 = 1.6875$ の音を A(ラ) とする。このことを続けていくのである。この操作は、次のように $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ としたときに、周波数比が

$$1 \leq \frac{3^n}{2^m} \leq 2$$

であるように m を選んだ音が $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ に応じて音階 C, G, D, A を作り上げていくのである。ただし、2 と 3 は**互いに素**であるために、とんな n, m を選んだとしても $3^n/2^m = 1$ とは成り得ない。つまり、3 倍操作とオクターブ下げをどんなに行っても、基準音の 2 倍の周波数を持つ 1 オクターブ上の音を作り出すことはできない。そこで、ピタゴラスは $n = 0, 1, 2, \dots, 11, 1$ まで 3 倍操作することで 12 音 C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A#, B, を作り出すことで打ち切った。なぜなら、 $n = 12$ とした 3 倍操作で得られる 13 番目の音の周波数比は 2 に十分近いいために 1 オクターブ上の音だと見なせるからである。

$$\frac{3^{12}}{2^{18}} = 2.02729$$

この振動数比をさらに 2 で割ったものを 1 オクターブからのズレの指標とすると

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1.01364$$

と約 1% のズレがある。この値を**ピタゴラスのコンマ**という。

次の表は、ピタゴラスが 3 倍操作とオクターブ下げによって 12 音を作った手順を示している。オクターブ下げの欄には基準音 C との周波数比が少数で表されている (面倒な計算だが、小学生の夏休みの宿題にはよいだろう)。

音階	3 倍操作	オクターブ下げ	平均律値	時計位置
C	$3^0 = 1$	1	1	0 時
G	3^1	$\frac{3}{2} = 1.5$	$2^{\frac{7}{12}} = 1.49831$	7 時
D	3^2	$\frac{3^2}{2^3} = 1.125$	$2^{\frac{2}{12}} = 1.12246$	2 時
A	3^3	$\frac{3^3}{2^4} = 1.6875$	$2^{\frac{9}{12}} = 1.68179$	9 時
E	3^4	$\frac{3^4}{2^6} = 1.26563$	$2^{\frac{4}{12}} = 1.25992$	4 時
B	3^5	$\frac{3^5}{2^7} = 1.89844$	$2^{\frac{11}{12}} = 1.88774$	11 時
F#	3^6	$\frac{3^6}{2^9} = 1.42383$	$2^{\frac{6}{12}} = 1.41421$	6 時
C#	3^7	$\frac{3^7}{2^{11}} = 1.06787$	$2^{\frac{1}{12}} = 1.05946$	1 時
G#	3^8	$\frac{3^8}{2^{12}} = 1.60181$	$2^{\frac{8}{12}} = 1.5874$	8 時
D#	3^9	$\frac{3^9}{2^{14}} = 1.20135$	$2^{\frac{3}{12}} = 1.18921$	3 時
A#	3^{10}	$\frac{3^{10}}{2^{15}} = 1.80203$	$2^{\frac{10}{12}} = 1.7818$	10 時
F	3^{11}	$\frac{3^{11}}{2^{17}} = 1.35152$	$2^{\frac{5}{12}} = 1.33484$	5 時
C	3^{12}	$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1.01364$	$2^{\frac{12}{12}} = 2$	12 時

上の表の時計位置を説明しよう。周波数比の対数目盛表示で、基準音 (周波数比 = 1 で対数目盛では 0) の音を時計文字盤の 0 時にあるとする。1 オクターブ高い音 (周波数比 = 2 で対数目盛では $\log 2$) は 360 度まわって再び時計文字盤

の同じ位置（12 時としておく）になる。3 倍操作から得らる音は文字盤の何時になるかを計算してみよう。求める角度を s [度] とすると次が成り立つ。

$$\log 2 : 360 = \log 3 : s$$

$\log 3 / \log 2 = 1.58496$ を使うと、

$$\begin{aligned} s &= 360 \times \frac{\log 3}{\log 2} \\ &= 570.587 \equiv 210.587 \quad (360 \text{ で割った余り}) \end{aligned}$$

つまり、3 倍操作は時計文字盤にある音をほぼ 210 度（7 時間分）時計回りにすすめる効果を持つ。上の表の時計位置は、3 倍操作によって作られる音が時計位置の何時に現れるかを示している。

ピタゴラス音階はこうした単純な操作によって 12 音階が構成されるのであるが、ピタゴラスのコンマによって、基準 C 音はヒョイ雨の最後の行の C 音にあるように、オクターブ下げでピタゴラスのコンマ 1.01364 というオクターブからの周波数比のズレが生じる（時計文字盤角度では 7.044 度）。このズレは、ピタゴラス音階では協和音としてよく響きにくいことに現れる。**協和**とは、2 音を重ねたとき、2 音の周波数比が単純なほど響きがよく感じるヒトの音楽心理（あるいは数学的単純さ）によっている。ある周波数の整数倍の振動数を持つ音を**倍音** (harmonics) といい、**ヘルムホルツ** (Hermann von Helmholtz, 1821–1894 年) によって深く研究され、声や楽器の音色はさまざまな倍音から構成され豊かな味を出していることがわかった。

さて、基準音（その周波数を e [Hz] とする）から特定の周波数比 w を掛けることによって、 $e \times w^0, e \times w, e \times w^2, \dots$ の周波数を持つ音を作り、13 個めの音の周波数が $e \times w^{12} = 2e$ と e の 1 オクターブ上になるようにすることを考えてみよう。このことは対数目盛で 1 オクターブを 12 等分することに相当する。この比率 w はべき指数法則から、直ちに

$$w = 2^{\frac{1}{12}} = 1.05946$$

でることがわかる。これを**平均律** (Equal temperament) という。上の表には 3 倍操作ではなく平均律を次々とかけた値を載せてある。ピタゴラス音階による周波数比とはわずかにずれていることがわかる。

西洋音楽史上もっとも重要な音楽作品の 1 つである Johann Sebastian Bach(1685–1750) による 2 巻の『**平均律クラヴィーア曲集**』(Das wohltemperierte Klavier: 1722 年第 1 巻 BWV846–BWV869、1742 年第 2 巻 BWV870–BWV893) は、平均律を使って鍵盤楽器であらゆる調に自由に移調できるという利点を実際に示してみせた、ピアノ演奏を志すものが今もなお取り組むべき鍵盤曲の金字塔である。現在のロック・コードの起源は Jazz やブルースで使われる**ブルーノート** (blue note scale) には平均律にはない音が含まれている。ブルーノートによるコード進行はインプロヴィゼーション (アドリブ演奏) を成功させるためにぜひ知っておきたい。

13. 解答 ① $x_p^2 + y_p^2 < r^2$

右図から、直交座標軸に沿った 1 辺の長さが r である正方形 $OABC$ 内に点 O を中心とした半径 r の四分円弧上の点 P から座標軸を降ろした値をそれぞれ x, y とする。点 P は正方形内にあるため、 $0 \leq x \leq r, 0 \leq y \leq r$ である。

円弧上の点 P と原点) との距離はどこも r でなければならない。したがって、**ピタゴラスの定理**より、

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

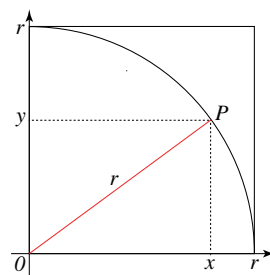
この円内にある条件は、したがって、 $x^2 + y^2 < r^2$ となる。

14. 解答 ① $z = 0.785$ (11 問の続き)

いま、正方形 $OABC$ 内に多数の N 個の点 $p_1, p_2, \dots, p_N$ を**一様にばら撒く**とは、ちょうど平らな地面に無風で雪が積もって場所の区別なく同じように白くなることを意味している（ここでは、雪は同一形状の白い微小粒だとしている）。一様に降り積った雪の量は、地面の面積に比例していることは明らかだろう。

ここでも同じように考えて、一様にばらまかれた点が正方形内にある個数と四分円内にある個数との比は、十分多くの点が撒かれたときには、その面積比に等しいと期待できる。すなわち、円周率 π をつかって半径 r の円の面積 πr^2 を使って、正方形内に一様に撒いた点の総数 n が十分大きくなるにつれて

$$\frac{\text{四分円内にある点の個数}}{\text{正方形内にある点の総数 } n} = \frac{\frac{1}{4}\pi r^2}{r^2} = \frac{\pi}{4}, \quad (n \rightarrow \infty)$$



となるはずである。 $\pi = 3.14$ から、この値は $\pi/4 = 0.785$.

ところで、超越数（有理係数をもつどんな代数方程式の根ではない数）の 1 つである円周率 π （この超越性は 1882 年に F. Lindemann によって証明された）はさまざまな形で計算できることが知られている（円周と半径の比を測定して求めるということではないことに重大な数学的意味がある）。たとえば、Gauß と並んで人類史上最大の数学者の一人である **オイラー**（Leonhard Euler, 1704–1783 年）が 1735 年に Basel 問題として得た有名な結果（リーマンの**ゼータ関数** $\zeta(s)$ の特殊値 $\zeta(2)$ ）は次のようである。

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

この無限級数を使って π がいくらでも正確に求めることができる（もちろん、数値的には効率のよい方法ではない）。

点を撒くという行為は**確率的事象**である。問題 12 は、上記のような解析的方法に依らずに、このような確率現象を利用して π を求めることができると示唆している。様々な方式によって発生させた**擬似乱数** (pseudo random number) を使って、複雑な理論的計算を数値的に求めてしまうという計算手法を『**モンテカルロ法**』という。モンテカルロ (Monte Carlo) はモナコ公国にある地区の名前（カジノとして世界的に有名）である。乱数を使ったこの数値計算手法は、スタニスワフ・ウーラム (Stanisław Ulam, 1909–1984 年) によって考案され、近代における最高の数学者の一人である**フォン・ノイマン** (John von Neumann, 1903–1957 年) が名づけた。ノイマンの活躍は非常に幅広く、今日のプログラム内蔵式コンピュータアーキテクチャをノイマン型と称するなど多くの用語に名を留めている。

$r = 1$ として区間 $[0, 1]$ 上の乱数 x, y をパソコンで発生させるという初等的な**プログラミング課題**として、 π をモンテカルロ法を使った数値計算をすることができる。擬似乱数を使って正方形内に置いた点 (x, y) が 4 分円内にあるかを条件 $x^2 + y^2 < 1$ によって判定し、正方形内に十分大きな n 個の点を撒き、4 分円内にある点の個数を求めののである。

次は、Python で書いた実際のソースコードである。1 行目で乱数モジュールを読み込み、3 行目で発生させる点の総数 n を与え（以下の例では 10 万個）、4 行目で 4 分円内に点があると判定されるたびに 1 つずつ加算するカウンター `counter` の初期値を 0 にしている。5 行目から 9 行目がプログラム本体である。

```
1  import random
2
3  n = 100000
4  count = 0
5  for i in range(0, n):
6      x = random.random()
7      y = random.random()
8      if x*x + y*y < 1.0:
9          count += 1
10
11 print "Pi = ", 4.0 * count / n
```

5 行目から `for` 構文による繰り返し文が始まる。6 行目から 9 行目までのブロックを繰り返しカウンタ `i` が 0 から $n-1$ まで変化しながら n 回繰り返す（`i` はこのプログラムでは何の役目も果たしていない）。6 行目と 7 行目で $[0, 1]$ 上の擬似乱数を生成させて変数 `x` と `y` に代入している。8 行目で発生させた点 (x, y) が 4 分円内にあるかを $x^2 + y^2 < 1$ によって判定し、9 行目はこの条件を満たすならカウンター値 `counter` を 1 つ上げている。こうして 4 分円内にある点の個数を数えるのである。14 行目は計算結果の出力で、分かりやすいように、表示した計算結果が π の近似値となるように `count / n` を 4 倍している。

生成させた点の総数をいくら増やしても、プログラム結果は以下の例のように $\pi = 3.1415926535897932385\dots$ には近づかない。

```
Pi = 3.1422
Pi = 3.14072
```

この事実はコンピュータで生成している**乱数の品質**に問題があることを示している。一体何が問題なのだろうか。

直感的にはこのことは当然のことであって、論理的規則にしたがって正確に動作するコンピュータから、でたらめで何

の規則性もない乱数を生成すること自体が「矛盾」していると考えことはほぼ正しい。しかしながら、モンテカルロ法による数値計算（数学的に正しい結果をもたらす確率が1に近づく）の需要は極めて高い。そこで、精緻な数学的理論を駆使して厳しい乱数検定に合格するような乱数集合の発生の方法が研究されており、今日ではだれでもその知識や乱数集合を利用できる。日本では統計数理研究所 <http://random.ism.ac.jp/> の乱数ライブラリが有名である。

15. 解答 ② 7回

この問題はハノイ (Hanoi) の塔として広く知られている。3 枚の円板を移動する採点の手数は 7 回で、次のようである。

1. 元柱 にある円板 1 を、目的柱へ移動
2. 元柱 にある円板 2 を、予備柱へ移動
3. 目的柱 にある円板 1 を、予備柱へ移動
4. 元柱 にある円板 3 を、目的柱へ移動
5. 予備柱 にある円板 1 を、元柱へ移動
6. 予備柱 にある円板 2 を、目的柱へ移動
7. 元柱 にある円板 1 を、目的柱へ移動

こうして眺めるとなんだか複雑そうだが、何枚の円盤があっても実はたいへん「簡単に」移動手順を知ることができる。

まず、問題 8 で取り上げた $n \geq 0$ の階乗 $n!$ を改めて定義しておこう。 $f(n) = n!$ と記したとき、

$$f(0) = 1$$

$$f(n) = n \times f(n-1)!$$

である。こうした関係式を**漸化式**ということがある。すると、 $f(3) = 3 \times f(2) = 3 \times 2 \times f(1) = 3 \times 2 \times 1 \times f(0) = 3 \times 2 \times 1 \times 1$ と計算できる。こうした計算のポイントは、 $f(n)$ を求めるためには、 $f(n-1)$ を知っていればよいという点にある。 $f(n-1)$ の計算には $f(n-2)$ をというようにして、最後には $f(0)$ の値がわかればよいということになっている。そこに到達すれば、そこから手繰り寄せて $f(n) = f(0) \times f(1) \times \cdots \times f(n-1) \times n$ と計算できるわけだ。このような考え方を**再帰** (recursion) といい、問題解決において広範に利用される考え方である（「**分割統治法** (divide and conquer algorithm)」と呼ばれることもある）。この機会に、是非その実際を理解しておこう。

$n \geq 1$ 枚の円盤からなる Hanoi の塔の手順 $h(n)$ を考えてみよう。手順 $h(n)$ を遂行するための手数を $H(n)$ と記そう。

$n = 0$ のときは何もしないで済むので $H(0) = 0$ 。 $n = 1$ のときの手順 $h(1)$ は明らかで、元柱にある円盤 1 を目的柱に移動するだけであり、その手数は $H(1) = 1$ 。 $n = 2$ のときの手順 $h(2)$ も、すぐに分かるように、まず基柱にある円盤 1 を呼び柱に移送し、次に基柱にある円盤 2 を目的柱に移動、最後に予備柱にある円盤 1 を目的柱に移動すればよい。したがって、 $H(2) = 3$ 。

では、 $n > 2$ のときの手順 $h(n)$ はどうだろうか。このときは、次のように考えれば一気に見通しがつくはずである。元柱にある n 枚の円盤群 $[1..n]$ を、 $(n-1)$ 枚の円盤群 $[1..(n-1)]$ と 1 枚の円盤 n にわけて考える。手順 $h(n)$ を実行するためには、円盤群 $[1..(n-1)]$ を手順 $h(n-1)$ を使って元柱から予備柱に移した上で、基柱にある円盤 n を目的柱に移動し、その後で予備柱にある円盤群 $[1..(n-1)]$ を手順 $h(n-1)$ を使って目的柱に移動すればよい。すなわち、手数 $H(n)$ は次のように書ける。

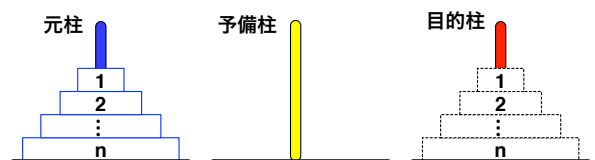
$$H(n) = 2H(n-1) + 1, \quad H(0) = 0.$$

この漸化式が

$$H(n) = 2^n - 1$$

を満たすことは、代入してみれば確かめられる。

こうして、手順 $h(n)$ は手順 $h(n-1)$ によって解決されることがわかった。実際、 $n = 3$ のとき、先に示した手順 $h(3)$ が手順 $h(2)$ で記述されていることを確かめてみてほしい。では、手順 $h(4)$ (手数は $2^4 - 1 = 15$ 回)、さらに手順 $h(5)$



(手数は $2^5 - 1 = 31$ 回) を実際に試してみよう。

16. 解答 ⑤ 84 通り

出発地の烏丸御池から目的の御所南小の南西角まで、南北に 7 本、東西に 4 本の道がある。最短路に行くことにすれば、これらの道のたどり方は、6 回東に 1 区間歩くこと、および、3 回北に 1 区画歩いて目的地に到達するという経路をたどることになる。

この問題は、“ $E =$ 東に 1 区画” のカードが 6 枚、“ $N =$ 北に 1 区画” のカードが 3 枚あり、これら 9 枚の E および N の 2 種類のカードを 1 列に並べる場合の数 ${}_9C_6 = {}_9C_3$ を求めることと同等である。

$${}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

$$\text{から、} \binom{9}{6} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84.$$

空間 X において、次の公準

- i) 任意の $x, y \in X$ に対し、 $d(x, y) = d(y, x)$,
- ii) $x \neq y$ である任意の $x, y \in X$ について、 $0 < d(x, y) < \infty$,
- iii) 任意の $x \in X$ について、 $d(x, x) = 0$,
- iv) 任意の $x, y, z \in X$ について、 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (三角不等式)

を満たすような実関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ が存在するとき、 (X, d) を距離 d を持つ距離空間という。二次元平面 $\mathbb{R}^2$ のとき、 $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ に対して

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

は Euclid 距離として広く知られている (ピタゴラスの定理を使っている)。空間への距離の導入の仕方は多数あり、目的に応じてさまざまに使われている。この問題の 2 つの交差点を結ぶ道の最短経路長のように、

$$d_M(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

も距離の公準を満足することを確認することができる (確かめてみよ)。この d_M をマンハッタン距離と呼ぶ (1988 年に出版されたあるテキストにそのように名前が付けられている)。これを京都距離と呼んでも差し支えないのだが、一般的でないのはたいへん残念である (普及してもらいたい)。

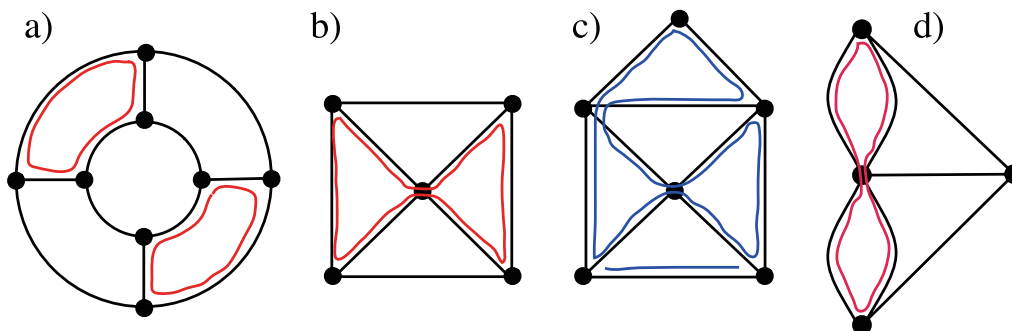
17. 解答 ② 1 個

(a), (b), (c), (d) の各グラフにおいて、辺を共有しないように閉路 (closed path) を書いてみる。このとき、下図のようにして、グラフ (c) だけが 3 つの閉路を頂点で閉路同士をつないで 1 つの閉路に拡大できる。そ残る下辺については、左下の頂点で閉路をあけることによって、右下の頂点に到達できる。つまり、グラフ (c) の左下の頂点から出発して、右下の頂点に至る経路が一筆書きになっている。

それ以外のグラフ (a), (b), (d) ではこのような閉路をつなぎあわせて一筆書きをすることはできない。仮に閉路を頂点でつないだとしても、下図のように、残っている辺を辿ろうとしたとき、他に残っている辺をたどるためにはペンを上げざるをえないためだ。したがって、これらのグラフは一筆書き不可能であることがわかる。

グラフの頂点 (●) に接続している辺 (—) の数を頂点の次数という。





次の表は、グラフ (a) から (d) についての全頂点の次数をリストしてものである。

グラフ	次数リスト
(a)	(3,3,3,3,3,3,3,3)
(b)	(3,3,3,3,4)
(c)	(2,4,4,4,3,3)
(d)	(3,5,3,3)

グラフ (c) のように、頂点の次数が 2 つの頂点を除いてすべて偶数のとき (**半 Euler グラフ**) では、奇数次数をもつ頂点から出発して、もう一つの奇数次を持つ頂点に至るように一筆書きが可能である。頂点の次数がすべて偶数であるグラフ (**Euler グラフ**) では、どの頂点から始めても同じ頂点に戻るように一筆書きが可能である。

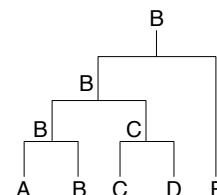
一方、奇数の次数を持つ頂点が 3 個以上あるグラフは、一筆書き不可能である。グラフ (d) はケーニヒスベルクの橋の問題として知られているもので、Euler が 1736 年に解いてグラフ理論を創始するきっかけとなった有名なグラフである。当時プロセイン領にあった Königsberg (現在はロシア連邦カリニングラード) に流れているプレーゲル川に架かっている 7 つの橋を 2 度通らずにすべて渡って元に戻ってくることができるかという問題がケーニヒスベルクの橋の問題である。その様子は現在でも Google Map で確認できる (ロシア領カリニングラードは飛び地である。当地は複雑な歴史事情があり、調べてみると興味深い)。

哲学者**カント** (Immanuel Kant, 1724–1804 年) はケーニヒスベルクに生まれ当地で学び、最終的に 46 歳に教授就任して以来、終生ケーニヒスベルクに留まった。Euler と親交があったかどうかは不明だが同じ空気を吸っていたはずである。

一筆書きを始めとするグラフ問題は、日常生活やあらゆる技術で活用されている。地図のナビゲーションはもちろん、交通管制などあらゆる流通において必須の知識になっている。

18. 解答 ③ C

$x \preceq y$ を「 y は x より強い引き分け」と意味すると考えよう。トーナメント結果からと次のようになる。



$$A \preceq B, \quad D \preceq C, \quad C \preceq B, \quad E \preceq C.$$

この結果からは、 B が一番強いことと、 $D \preceq C \prec B$ という順序は決定できる。しかし、 A, E が D, C, B の順序にどのように係るのは判定できない。

別の試合結果 $C \preceq A$ から $C \preceq A \prec B$ が、 $E \preceq C$ から $E \preceq C \preceq A \preceq B$ が結論できる (それでも、 $E \preceq D$ なのか $D \preceq E$ かは依然不明である)。これより、2 番目に強いのは A 、3 番目に強いのは C である。

こうした勝敗はさらに**順序概念**として抽象化して考えることができ、以下に見るように順序は重要な数学的構造であることがわかる。ある集合 S において、次の公準

- 1) S に属するどんな 2 要素 $a, b \in S$ についても、かならず

$$a \preceq b, \quad \text{または} \quad b \preceq a$$

が成立。 $b \preceq a$ を $a \succ b$ と書く。

2) $a \leq b$, と $b \leq a$ が同時に整理するのは、 $a = b$ かつそのときに限る。

3) $a \leq b, b \leq c$ ならば、 $a \leq c$ である (推移律)

を**全順序の公理**という。この全順序の公理を満たす関係 $\leq$ を持つ集合を**全順序集合** (totally ordered set) または**線型順序集合**という。全順序集合では、任意の a, b について $a \leq b$ または $a \geq b$ であるので、どんな要素の組に対しても**比較可能**である。

問題にある勝ち抜き方式のトーナメントに参加するチーム集合 $T = \{A, B, C, D, E\}$ は、たとえば、 A と C との順序関係が定まらないため、 T は全順序集合ではない。このように、私達の周りには比較不可能な要素を持つ集合に満ちあふれている (具体的な例を挙げてみよう)。

比較できないような要素の存在を認めるような順序に関する枠組みを設定することができる。集合 E のある要素の組 a, b に対して $a \leq b$ で与えられる関係があつて、次の公準

i) すべての $a \in E$ について、 $a \leq a$ 。

ii) ある $a, b \in E$ について $a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば、実は $a = b$ 。

iii) ある $a, b, c \in E$ について $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば、 $a \leq c$ である (推移律)

を満たすような集合 E 上の関係を**半順序関係** (semi ordered relation) という。純数学的には順序関係というときには、この半順序関係をいうことが多い。問題にある勝ち抜き方式のトーナメントに参加するチーム集合 $T = \{A, B, C, D, E\}$ には、既に見たように半順序構造が入っている。定義から明らかなことだが、全順序集合は半順序集合であるが、半順序集合は全順序集合とは限らない。

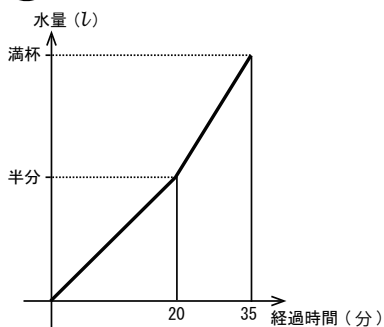
ある集合 V を考え、その要素の大小 (身長や体重、売上や貿易高など) を考えることが可能であれば、それら要素を大小順に一列に並べることができるので、この V は全順序集合である。また、辞書がそうであるように単語をアルファベット順に並べることができる (**辞書式順序**) ので、単語全体も全順序集合になる。このように、全順序関係は誰にとっても親しみがあるはずだ。さらに、この問題でみたように、競技大会での勝敗などでは半順序集合を考えることができることもわかった。

しかし、順序の概念は大小や勝敗に留まらない。ある集合 Ω を決めて、その部分集合全体 $A_1, A_2, A_3, \dots$ を考えてみよう。 $A_i \subseteq A_k$ (A_i が A_k に含まれるか、または等しい) のとき、 $A_i \leq A_k$ と記すことにすると、**集合の包含関係**は半順序関係であることがわかる。実際、互いに他を含み合わない2つ集合 A_j と A_ℓ ($A_j \subseteq A_\ell$ でも $A_\ell \subseteq A_j$ でもなく、しかし $A_j \cap A_\ell$ が空集合でない) は比較可能でない。

また、正の整数全体 $\mathbb{Z}^+$ を考え、 n が m を割り切るとき、つまり n が m の約数である ($m = qn$ と表される) とき、 $m \leq n$ と記そう。この順序を導入した集合 $\mathbb{Z}^+$ は半順序集合となる。実際、互いに他を割りきらない数、たとえば5と9は比較可能ではない。この順序関係では $6 \leq 3$ と記されることになる、大小関係とは逆になることに注意しよう (大小関係を導入した時には全順序集合になる)。

数学的には、ある集合に順序関係が導入できるかどうかは、その集合の性質を解明する上で大変大きな手段になる。そもそも、集合に順序関係が導入できるかは自明なことではないということは人生の教訓として知っておくべきことである。

19. ④ 120 分



注入口から1分間に注入される水量 $[l]$ を $a [l/\text{分}]$ 、排水口から1分間に排出される水量 $[l]$ を $b [l/\text{分}]$ とする。20分経過して見にいたらタンクに水が半分溜まっていたことから、 $a > b$ である。左図のように、この20分間は排水口が開いていたために、1分間に注入される水量は $(a - b) [l/\text{分}]$ となり、タンク容量 $T [l]$ の半分を満たしていたということから

$$20(a - b) = \frac{T}{2},$$

また排水口を閉じて 15 分でタンクが満杯になったことから

$$15a = \frac{T}{2}$$

である。したがって解くべき方程式は、求めるべき変数 a と b に関する次の 2 元連立 1 次方程式である。

$$\begin{cases} 20(a-b) = \frac{T}{2} & (1) \\ 15a = \frac{T}{2} & (2) \end{cases}$$

タンク容量 T を求めることは必要ないことに注意しよう。式 (2) から $30a = T$ 、つまり排水口を閉じて注水していれば、30 分でタンクを満杯にできたということがわかる（注水口から 1 分間当たり $T/30$ [ℓ /分]）の割合で注水）。

式 (1) を $40(a-b) = T$ と書いて、この結果を代入すると、 $a = 4b$ の関係が得られる。つまり、排水口から排出される水量は、注水の $1/4$ であることになる。この結果は、再び式 (1) を使うと、 $30a = 30 \times 4b = T$ 、つまり、満杯のタンクを排水するには 120 分かかることがわかる。

複数の関係式を考慮して、ある量の最大化または最小化を達成する値を求める方策を検討する問題を**線形計画法** (LP, Linear Programming) といい、OR (オペレーション・リサーチ) などで盛んに利用されている。線型とは、変数間の関係が（この問題のように折れ線を含む）直線で表されるという範囲で問題を取り扱うという意味である。LP は数学的には、目的とする量を表す線型関係式と、その変数に課されるさまざまな変数についての制約関係（線型不等式）で表される。たとえば、2 つの変数 x, y について、与えられた数 a, b, c, d, e, f を使って表される制約関係

$$\begin{cases} x, y \geq 0 \\ ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

のもとで、目的量 $qx + qy$ を最大にする x, y を求める問題は線型計画問題である。

一般の n 変数の線型計画問題で求める変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ は制約条件から決まる**多面体の頂点**のどれかになっていることから、数理的取り扱いが研究されてきた。制約条件がない場合（不等式関係でなく、すべて等式関係になっている場合）には、求める解は連立 1 次方程式を解くだけであるが、制約条件のある線形計画問題を数値的に解くことは実用上たいへん重要である。1984 年に Karmarkar によって発表された**カーマーカー法**は日米で特許を出願し、物議をかもした。

20. ㊦ 5000 円分

タイプ A,B,C,D の商品が入っている確率はそれぞれ、 $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, $\frac{30}{100} = \frac{1}{3}$, $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ である。このことから、福袋の商品の**期待値**は

$$12000 \times \frac{1}{2} + 15000 \times \frac{1}{3} + 20000 \times \frac{1}{5} = 15000$$

となる。

これより、1 袋に入っている商品セットは 15000 円の価値があると考えるのは**合理的**である。このために 10000 円支払っているために、5000 円分お得ということになる。

投資した金額とその見返りとして将来得られると予想できる利益を期待値として計算することは、企業経営はもとよりデリバティブなど金融の世界では重要である。たとえば、各種保険事業（生保、損保や信託銀行）などにおける保険料の算定は**アクチュアリー**と呼ぶ高度な専門職が行っている。アクチュアリーになるためには公益社団法人日本アクチュアリー会 <http://www.actuaries.jp/> が主催する**確率統計**、年金数理などに関する試験に合格することが必要だ。