1. 解答 ⑤ 8

　三つの数 144, 56 と 40 を共に割り切る最大の整数（最大公約数）$\gcd(144, 56, 40)$ を求めるには、数が小さい場合、次のようにしてそれぞれの数の素因数分解

$$144 = 2^4 \times 3^2, \quad 56 = 2^3 \times 7, \quad 40 = 2^3 \times 5$$

から求めてもよい。しかし、それらの数が巨大数である場合には、『素因数分解すること自体に大きな手間がかかる』ために素因数分解による方法はまったく勧められず、Euclid の互除法を使う。3 つの数 a, b, c の最大公約数 $\gcd(a, b, c)$ を求めるために、次の関係を使うとよい。

$$\gcd(a, b, c) = \gcd\big(\gcd(a, b), c\big).$$

2. 解答 ④ 8 倍

　y が x の a 倍であるとは、$\dfrac{y}{x} = a$ または $y = ax$ の関係をいう（この a を比例定数と呼ぶ)。これより、$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ と $\dfrac{1}{a \times b}$ に $a = 5, b = 3$ を代入して

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3+5}{5 \times 3} = \frac{8}{15}, \quad \frac{1}{5 \times 3} = \frac{1}{15}.$$

　したがって、

$$\frac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a \times b}} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{1}{15}} = \frac{8}{15} \times \frac{15}{1} = 8.$$

3. 解答 ② $\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{5}{3}\right)$

　2 変数の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x + 9y = 22 & (1) \\ 3y = 4x - 9 & (2) \end{cases}$$

を解けばよい。式 (1) から、式 (2) の両辺を 3 倍した $9y = 12x - 27$ を引き算してみると、$2x = 22 - (12x - 27)$ を得る。これより、$2x + 12x = 22 - (-27)$ したがって $14x = 29$. よって、$x = \dfrac{7}{2}$ を得る。この結果を式 (2) に代入して、$3y = 4 \times \frac{7}{2} - 9 = \frac{4 \times 7 - 18}{2} = \frac{10}{2} = 5$. よって、$y = \dfrac{5}{3}$ を得る。

4. 解答 ③ 64 倍

　べき指数法則

$$\big(x^a\big)^b = x^{ab}, \qquad x^a \times x^b = x^{a+b}$$

を使う。

$$\frac{(2^3)^8 \times (2^4)^3}{2^{30}} = \frac{2^{24} \times 2^{12}}{2^{30}} = \frac{2^{24+12}}{2^{30}} = \frac{2^{36}}{2^{30}} = 2^{36-30} = 2^6 = 64.$$

5. 解答 ③ 23 万円

　1 年目に x 万円貯金したとする。「2 年年目は 1 年目より 7 万円少なくしか貯金できなかった」から 2 年目の貯金額は $(x - 7)$ であると読むことができる。「3 年目は頑張って 2 年目の 2 倍となる 32 万円を貯金した」から、関係式 $2(x - 7) = 32$ を得る。この 1 次方程式 $2x - 14 = 32$ を解いて、$x = 23$.

6. 解答 ③ 6000 円

東京から広島県福山市までの 750Km に必要なガソリン容量は

$$750[\mathrm{Km}] \div 16[\mathrm{Km}/\ell] = \frac{375}{8}[\ell] \qquad \Leftarrow \text{単位の使い方び注意する}$$

である。このガソリン量 $[\ell]$ に 1 リットル当たりガソリン価格 128[円/ℓ] を掛けて

$$\frac{375}{8}\ [\ell] \times 128[\text{円}/\ell] = 6000\,\text{円}.$$

7. 解答 ⑤252

摂氏 100[C] は $100 = \frac{5}{9}(f-32)$ を解いて華氏 212[F] に相当し、摂氏-40[C] は $-40 = \frac{5}{9}(f-32)$ を解いて華氏 -40[F] に相当する。これより、求める華氏温度範囲は $212-(-40) = 252$ となる。

しかし、この計算方法はいただけない（同じような計算を 2 回繰り返している)。式 $100 = \frac{5}{9}(f_{max}-32)$ から式 $-40 = \frac{5}{9}(f_{min}-32)$ の両辺を差し引いて、$100-(-40) = \frac{5}{9}(f_{max}-f_{min})$. これより、$f_{max}-f_{min} = 140\times\frac{9}{5} = 252$ が、ほぼ 1 度の計算で求められる。

8. 解答 ④ 5 年後

元金を x 円、利子を r とすると、n 年後には複利で $x(1+r)^n$ 円となる。$(1+r)^n$ を複利倍率という。$r=0.1$ のとき、1 年後には $1+0.1$ 倍に、2 年後には $(1+0.1)^2 = 1.21$ 倍になる。3 年後は $(1+0.1)^3 = 1.21\times1.1 = 1.331$, 4 年後は $(1+0.1)^4 = 1.331\times1.1 = 1.4641$ 倍になる。5 年後には $(1+0.1)^5 = 1.4641\times1.1 = 1.61051$ となって、元金の 1.5 倍を初めて越えることがわかる。

このように複利計算には手間がかかる。

9. 解答 ③ 2 時

時間が与えられたとき、時計盤が指し示す時刻は時間を 12 で割った整数剰余を表している（ここで、余りが 0 になったときには時計文字盤では 12 時を指すとする)。現在時が時計盤で 0 時（12 時）を指しているとき、ある時間経過したした後の時計盤の時刻は以下の計算から明らかだろう。

$$\begin{array}{ll} 10\div12 = 0\text{ 余り } 10 \to 10\text{ 時}, & 13\div12 = 1\text{ 余り } 1 \to 1\text{ 時}, \\ 17\div12 = 1\text{ 余り } 5 \to 5\text{ 時}, & 12\div12 = 1\text{ 余り } 0 \to 0\text{ 時}, \\ 25\div12 = 2\text{ 余り } 1 \to 1\text{ 時}, & 30\div12 = 2\text{ 余り } 6 \to 6\text{ 時}. \end{array}$$

こうした余りを求める計算を次のように合同式で書き表すことする。

$$a \div b = q\text{ 余り } r \qquad \Rightarrow \quad a \equiv r \pmod{b}$$

与えられた時刻 h[時間] と文字盤上の時刻 t[時間] とは

$$h \equiv t \pmod{12}$$

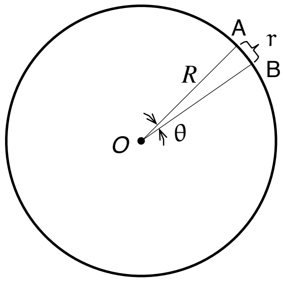
の関係にある。今、文字盤が 3 時を指しているとき、947 時間後とは $3+947 = 950$ 時になる。これより

$$950\div12 = 79\text{ 余り } 2 \qquad \text{つまり } 950 \equiv 2 \pmod{12}$$

から、文字盤の 2 時を指すことがわかる。

10. 解答 ④ 50000

右図のように、地球を半径 R を持つ完全球体とみなし、A のアレクサンドリアと B のシエネが同じ経度線上にあると考えた。$\angle AOB$ を θ[度]、AB 間の球面に沿った長さ r[Km] とすると、円周率 $\pi \approx 3.14$ とする地球一周（赤道）の長さ $L = 2\pi R$[km] との関係は、全周角度が 360 度であることを考慮すると、

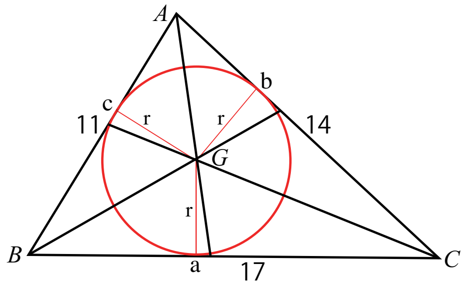


$$2\pi R\frac{\theta}{360} = r, \qquad \text{つまり} \quad L(\theta, r) = \frac{360}{\theta} \times r$$

である。全周 $L = 2\pi r$ が角度 θ と表面距離 r で定まるという意味で全周 L は変数 r と θ の関数であるとして、$L(\theta, r)$ と記した。これより、$L = 2\pi R = \frac{360}{\theta}r = \frac{360}{7.2} \times 1000 = 50000$[Km] となることがわかる。このとき、地球の半径 $R = \frac{5000}{2\pi} \approx 7958$[Km] になる。実際には、地球の赤道半径は約 6378[Km]（極半径は 6 357[Km] で赤道側に扁平)、全周約 40000[km] である。

11. 解答 ③ $85\,g$

右図のように、$\triangle ABC$ の頂点 A と B の角二等分線の交点を G は、実は G を中心とする $\triangle ABC$ の内接円の場所である。内接円の中心 G から各辺に接する点、それぞれ a, b, c に降ろした線分は各辺に垂直で、その長さは内接円の半径 r に等しい。したがって、$\triangle ABG$,$\triangle BCG$ および $\triangle CAG$ の三角形の「高さ」は同じ r となり、その面積は「底辺」の長さ、それぞれ 11,17 および 14 の割合となる。したがって、



$$\triangle BCG \text{の重さ} = 210[g] \times \frac{17}{11+17+14} = 210[g] \times \frac{17}{42} = 85[g].$$

12. 解答 ④ 2 倍

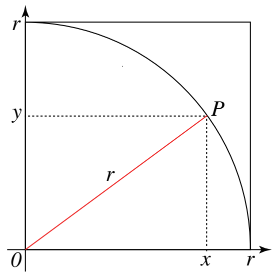
左側の弦の長さが $\frac{2}{7}3$ 右側の弦の長さが $\frac{1}{3}$ である。弦から生じる音の周波数 f[Hz] は元の長さ ℓ に逆比例する $f \sim 1/\ell$ ことから、右の弦を弾いて生じる周波数は左の弦の周波数の 2 倍である。

左側の弦から生じる音 G^0 は元の長さ 1 の弦の音の $\frac{3}{2} = 1.5$ 倍の周波数を持ち、右側の弦から生じる音 G^1 は長さ 1 の弦の音の 3 倍の周波数を持っている。

13. 解答 ① $x_p^2 + y_p^2 < r^2$

右図から、直交座標軸に沿った 1 辺の長さが r である正方形 $OABC$ 内に点 O を中心とした半径 r の四分円弧上の点 P から座標軸を降ろした値をそれぞれ x,y とする。点 P は正方形内にあるため、$0 \leqq x \leqq r, 0 \leqq y \leqq r$ である。

円弧上の点 P と原点) との距離はどこも r でなければならない。したがって、ピタゴラスの定理より、



$$x^2 + y^2 = r^2.$$

この円内にある条件は、$x^2 + y^2 < r^2$ となる。

14. 解答 ① $z = 0.785$（11 問の続き）

いま、正方形 $OABC$ 内に多数の N 個の点を一様にばら撒くとは、ちょうど平らな地面に無風で雪が積もって場所の区別なく同じように白くなることを意味している（ここでは、雪は同一形状の白い微小粒だとしている)。一様に降り積った雪の量は、地面の面積に比例していることは明らかだろう。

ここでも同じように考えて、一様にばらまかれた点が正方形内にある個数と四分円内にある個数との比は、十分多くの点が撒かれたときには、その面積比に等しいと期待できる。すなわち、円周率 π をつかって半径 r の円の面積 πr^2 を使って、正方形内に一様に撒いた点の総数 n が十分大きくなるにつれて

$$\frac{\text{四分円内にある点の個数}}{\text{正方形内にある点の総数 } n} = \frac{\frac{1}{4}\pi r^2}{r^2} = \frac{\pi}{4}, \qquad (n \to \infty)$$

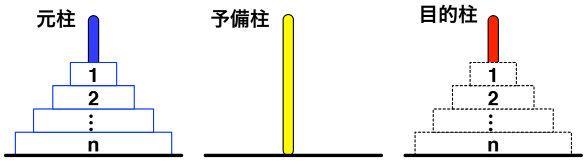
となるはずである。$\pi = 3.14$ から、この値は $\pi/4 = 0.785$.

15. 解答 ② 7 回

この問題はハノイ (Hanoi) の塔として広く知られている。3 枚の円板を移動する採点の手数は 7 回で、次のようである。

1. 元柱 にある円板 1 を、目的柱へ移動
2. 元柱 にある円板 2 を、予備柱へ移動
3. 目的柱 にある円板 1 を、予備柱へ移動
4. 元柱 にある円板 3 を、目的柱へ移動
5. 予備柱 にある円板 1 を、元柱へ移動
6. 予備柱 にある円板 2 を、目的柱へ移動
7. 元柱 にある円板 1 を、目的柱へ移動

$n \geq 1$ 枚の円盤からなる Hanoi の塔の手順 $h(n)$ を考えてみよう。手順 $h(n)$ を遂行するための手数を $H(n)$ と記そう。



$n = 0$ のときは何もしないで済むので $H(0) = 0$。$n = 1$ のときの手順 $h(1)$ は明らかで、元柱にある円盤 1 を目的柱に移動するだけであり、その手数は $H(1) = 1$。$n = 2$ のときの手順 $h(2)$ も、すぐに分かるように、まず基柱にある円盤 1 を呼び柱に移送し、次に基柱にある円盤 2 を目的柱に移動、最後に予備柱にある円盤 1 を目的柱に移動すればよい。したがって、$H(2) = 3$.

では、$n > 2$ のときの手順 $h(n)$ はどうだろうか。このときは、次のように考えれば一気に見通しがつくはずである。元柱にある n 枚の円盤群 $[1..n]$ を、$(n-1)$ 枚の円盤群 $[1..(n-1)]$ と 1 枚の円盤 n にわけて考える。手順 $h(n)$ を実行するためには、円盤群 $[1..(n-1)]$ を手順 $h(n-1)$ を使って元柱から予備柱に移した上で、基柱にある円盤 n を目的柱に移動し、その後で予備柱にある円盤群 $[1..(n-1)]$ を手順 $h(n-1)$ を使って目的柱に移動すればよい。すなわち、手数 $H(n)$ は次のように書ける。

$$H(n) = 2H(n-1) + 1, \qquad H(0) = 0.$$

この漸化式が

$$H(n) = 2^n - 1$$

を満たすことは、代入してみれば確かめられる。

こうして、手順 $h(n)$ は手順 $h(n-1)$ によって解決されることがわかった。

16. 解答 ⑤ 84 通り

出発地の烏丸御池から目的の御所南小の南西角まで、南北に 7 本、東西に 4 本の道がある。最短路を行くことにすれば、これらの道のたどり方は、6 回東に 1 区間歩くこと、および、3 回北に 1 区画歩いて目的地に到達するという経路をたどることになる。

この問題は、“E = 東に 1 区画” のカードが 6 枚、“N = 北に 1 区画” のカードが 3 枚あり、これら 9 枚の E および N の 2 種類のカードを 1 列に並べる場合の数 ${}_9\mathrm{C}_6 = {}_9\mathrm{C}_3$ を求めることと同等である。

$${}_n\mathrm{C}_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

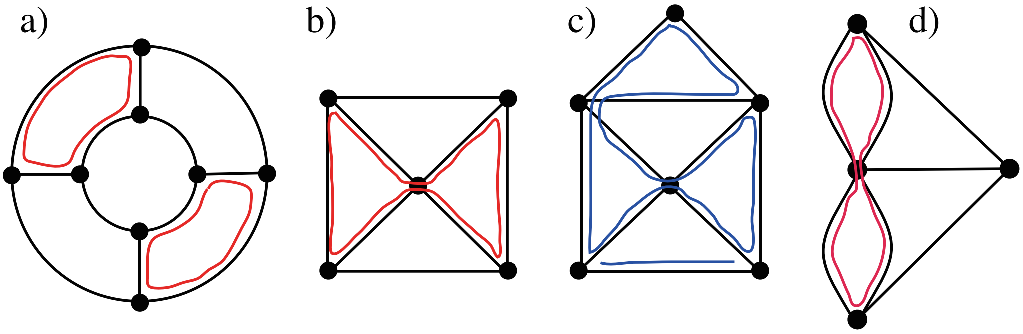
から、$\binom{9}{6} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84.$

17. 解答 ② 1 個

(a), (b), (c), (d) の各グラフにおいて、辺を共有しないように閉路 (closed path) を書いてみる。このとき、下図のようにして、グラフ (c) だけが 3 つの閉路を頂点で閉路同士をつないで 1 つの閉路に拡大できる。そ残る下辺については、左下の頂点で閉路をあけることによって、右下の頂点に到達できる。つまり、グラフ (c) の左下の頂点から出発して、右下の頂点に至る経路が一筆書きになっている。

それ以外のグラフ (a), (b), (d) ではこのような閉路をつなぎあわせて一筆書きをすることはできない。仮に閉路を頂点でつないだとしても、下図のように、残っている辺を辿ろうとしたとき、他に残っている辺をたどるためにはペンを上げざるをえないためだ。したがって、これらのグラフは一筆書き不可能であることがわかる。

グラフの頂点（●）に接続している辺（—）の数を頂点の次数という。



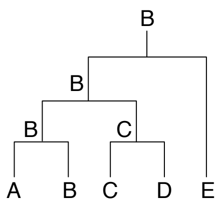
次の表は、グラフ (a) から (d) についての全頂点の次数をリストしてものである。

グラフ	次数リスト
(a)	(3,3,3,3,3,3,3,3)
(b)	(3,3,3,3,4)
(c)	(2,4,4,4,3,3)
(d)	(3,5,3,3)

グラフ (c) のように、頂点の次数が 2 つの頂点を除いてすべて偶数のとき（**半 Euler グラフ**）では、奇数次数をもつ頂点から出発して、もう一つの奇数次を持つ頂点に至るように一筆書きが可能である。頂点の次数がすべて偶数であるグラフ（**Euler グラフ**）では、どの頂点から始めても同じ頂点に戻るように一筆書きが可能である。

一方、奇数の次数を持つ頂点が 3 個以上あるグラフは、一筆書き不可能である。グラフ (d) はケーニヒスベルクの橋の問題として知られているもので、Euler が 1736 年に解いてグラフ理論を創始するきっかけとなった有名なグラフである。

18. 解答 ③ C



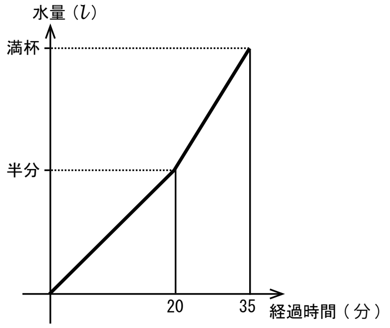
$x \preccurlyeq y$ を「y は x より強いか引き分け」と意味すると考えよう。トーナメント結果からと次のようになる。

$$A \preccurlyeq B, \quad D \preccurlyeq C, \quad C \preccurlyeq B, \quad E \preccurlyeq C.$$

この結果からは、B が一番強いことと、$D \preccurlyeq C \prec B$ という順序は決定できる。しかし、A, E が D, C, B の順序にどのように係るのかは判定できない。

別の試合結果 $C \preccurlyeq A$ から $C \preccurlyeq A \prec B$ が、$E \preccurlyeq C$ から $E \preccurlyeq C \preccurlyeq A \preccurlyeq B$ が結論できる（それでも、$E \preccurlyeq D$ なのか $D \preccurlyeq E$ かは依然不明である）。これより、2 番目に強いのは A、3 番目に強いのは C である。

19. ④ 120 分



注入口から1分間に注入される水量 $[\ell]$ を $a\,[\ell/分]$、排水口から1分間に排出される水量 $[\ell]$ を $b\,[\ell/分]$ とする。20分経過して見にいたらタンクに水が半分溜まっていたことから、$a > b$ である。左図のように、この20分間は排水口が開いていたために、1分間に注入される水量は $(a-b)\,[\ell/分]$ となり、タンク容量 $T\,[\ell]$ の半分を満たしていたということから

$$20(a-b) = \frac{T}{2},$$

また排水口を閉じて15分でタンクが満杯になったことから

$$15a = \frac{T}{2}$$

である。したがって解くべき方程式は、求めるべき変数 a と b に関する次の2元連立1次方程式である。

$$\begin{cases} 20\,(a-b) = \dfrac{T}{2} & (1) \\ \\ 15\,a = \dfrac{T}{2} & (2) \end{cases}$$

タンク容量 T を求めることは必要ないことに注意しよう。式 (2) から $30a = T$、つまり排水口を閉じて注水していれば、30分でタンクを満杯にできたということがわかる（注水口から1分間当たり $T/30\,[\ell/分]$）の割合で注水)。

式 (1) を $40(a-b) = T$ と書いて、この結果を代入すると、$a = 4b$ の関係が得られる。つまり、排水口から排出される水量は、注水の 1/4 であることになる。この結果は、再び式 (1) を使うと、$30a = 30 \times 4b = T$、つまり、満杯のタンクを排水するには120分かかることがわかる。

20. ④ 5000円分

タイプ A,B,C,D の商品が入っている確率はそれぞれ、$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, $\frac{30}{100} = \frac{1}{3}$, $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ である。このことから、福袋の商品の**期待値**は

$$12000 \times \frac{1}{2} + 15000 \times \frac{1}{3} + 20000 \times \frac{1}{5} = 15000$$

となる。

これより、1袋に入っている商品セットは15000円の価値があると考えるのは**合理的**である。このために10000円支払っているために、5000円分お得ということになる。