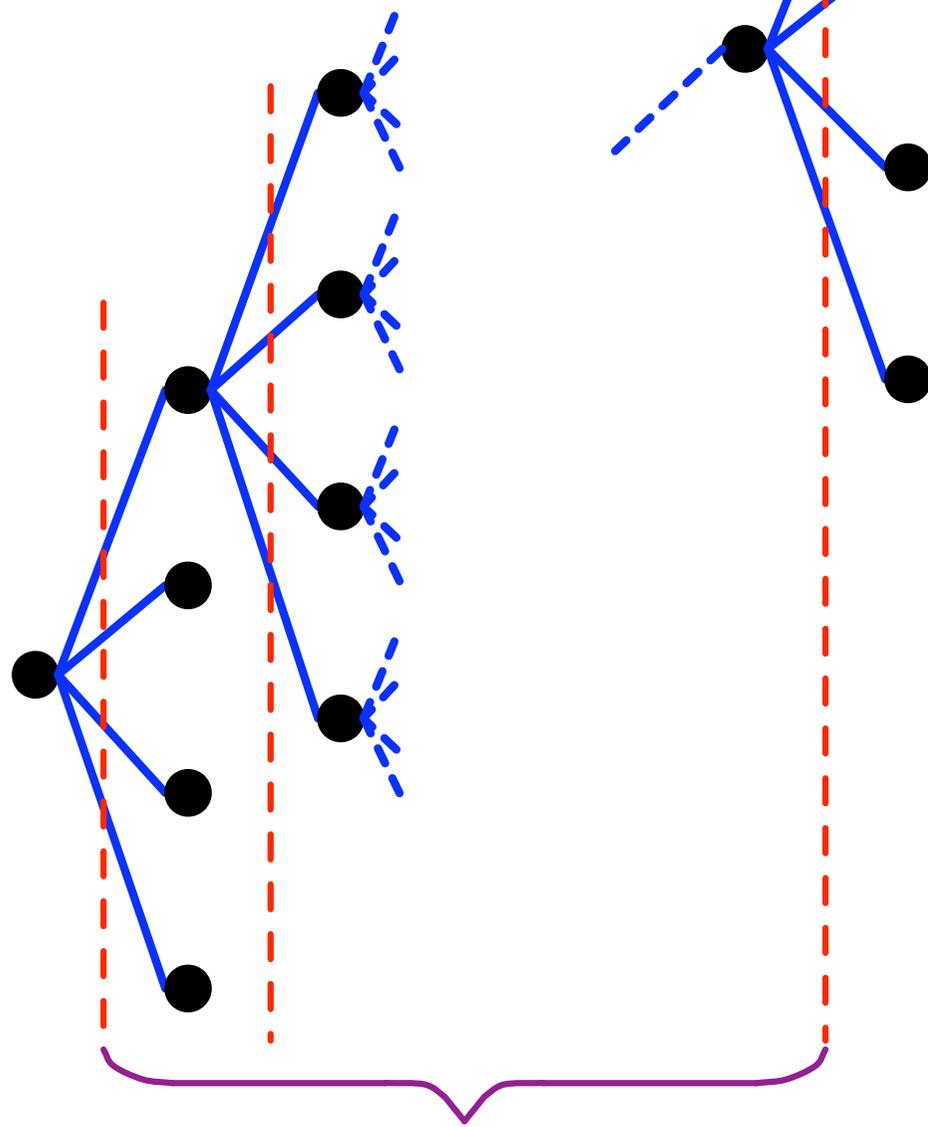


# Small Worldモデル

Watts & Strogatzのネットワークモデル

知人関係を考える・・・

m=4人の例

 $n$ 人の隔たり

## 重複のない $m$ 人の知人

● 各人が互いに重複のない $m$ 人の知人を持つとき

$n$ 次の隔たりで達する人数

$$\underbrace{m \times m \times \dots \times m}_{n \text{ 回掛ける}} = m^n \text{ 人}$$

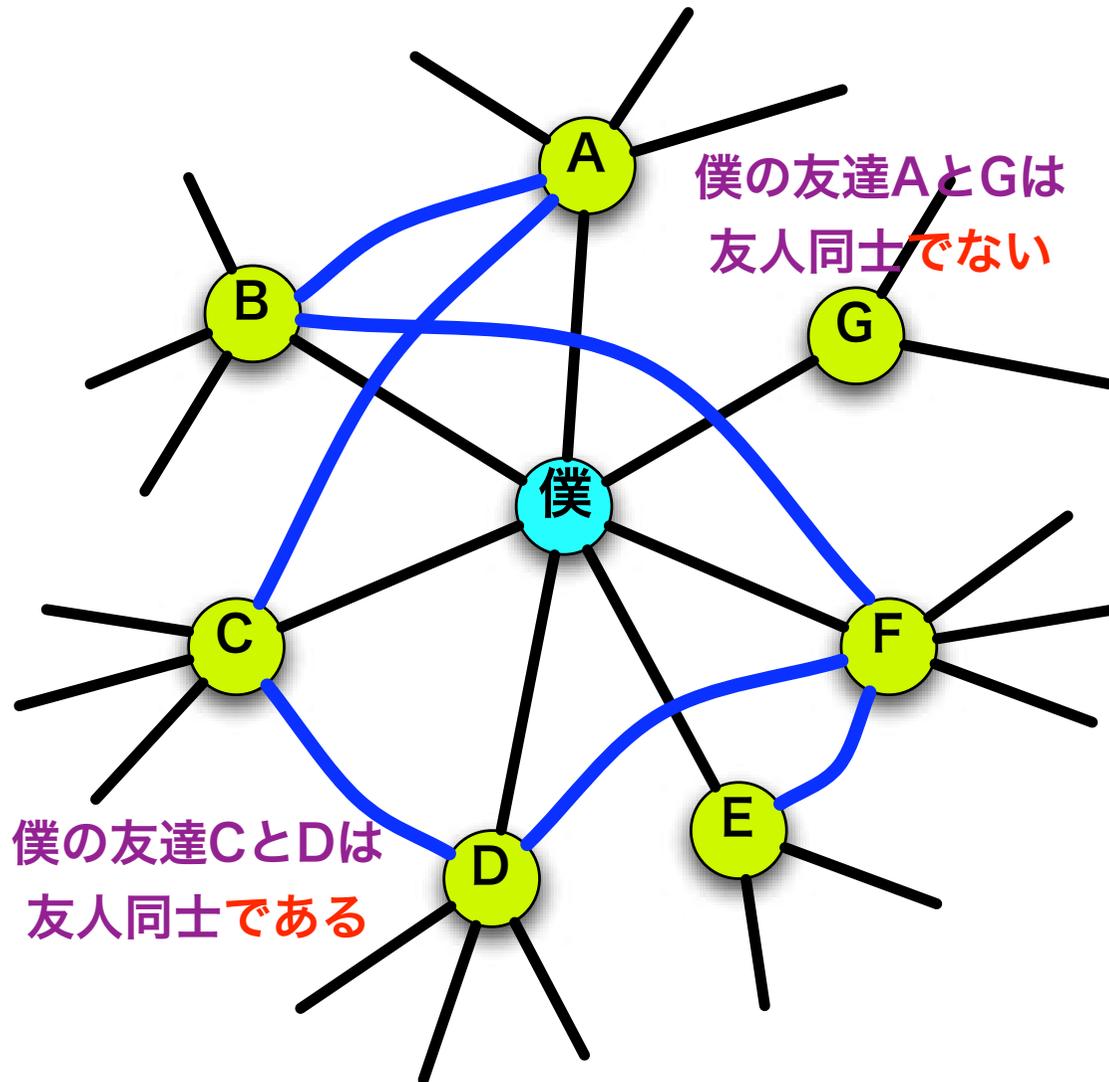
$$50^5 = 312,500,000$$

$$50^6 = 15,625,000,000$$

6人目で150億人を越える！

でも、重複のない知人関係は  
非現実的

# 僕の友達は彼ら同士も友達



友達同士が友達の組

- A-B
- A-C
- C-D
- B-F
- D-F
- E-F

## クラスター性

各人の友達同士が、また互いに友達である度合（群れ易さの尺度）

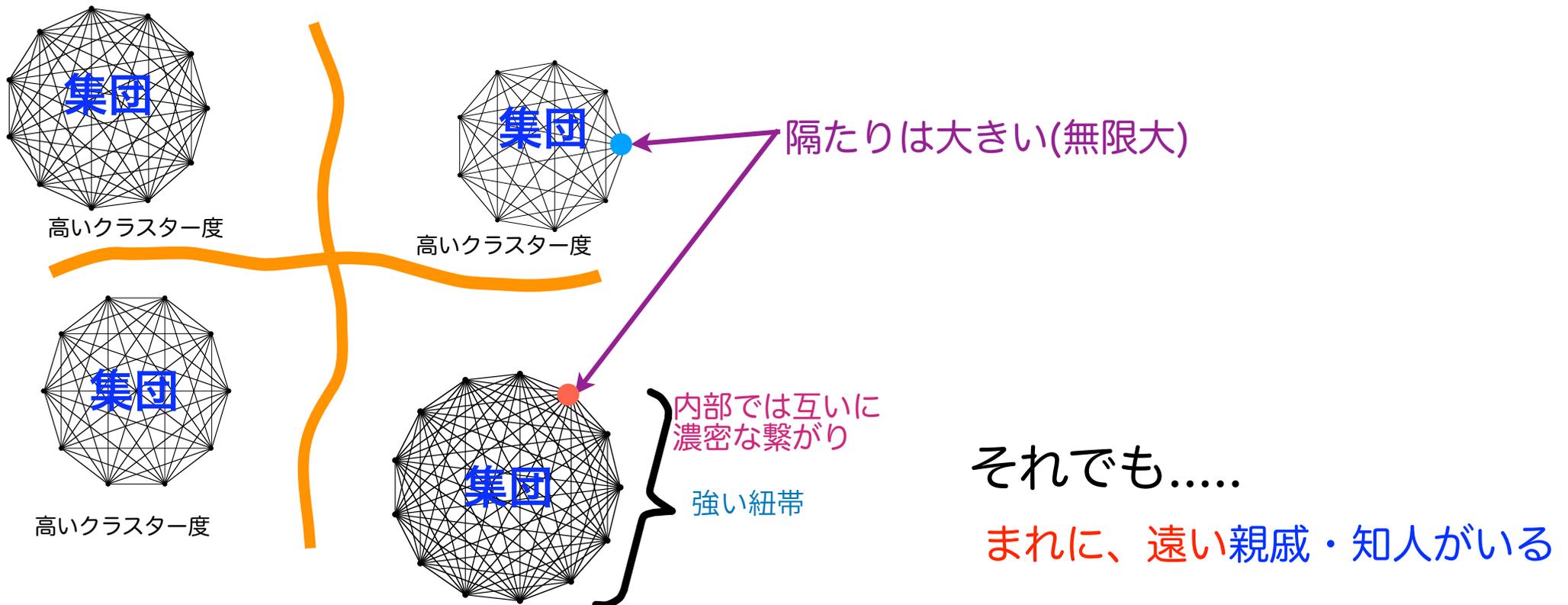
クラスター性が高いネットワークは  
近所同士の結びつきが強い

# 孤立したコミュニティは狭い

孤立したコミュニティ内部では、それぞれが互いに知人関係。他の集団との繋がりは持たないために**狭い**

互いに隔絶(地理的・政治的バリア)

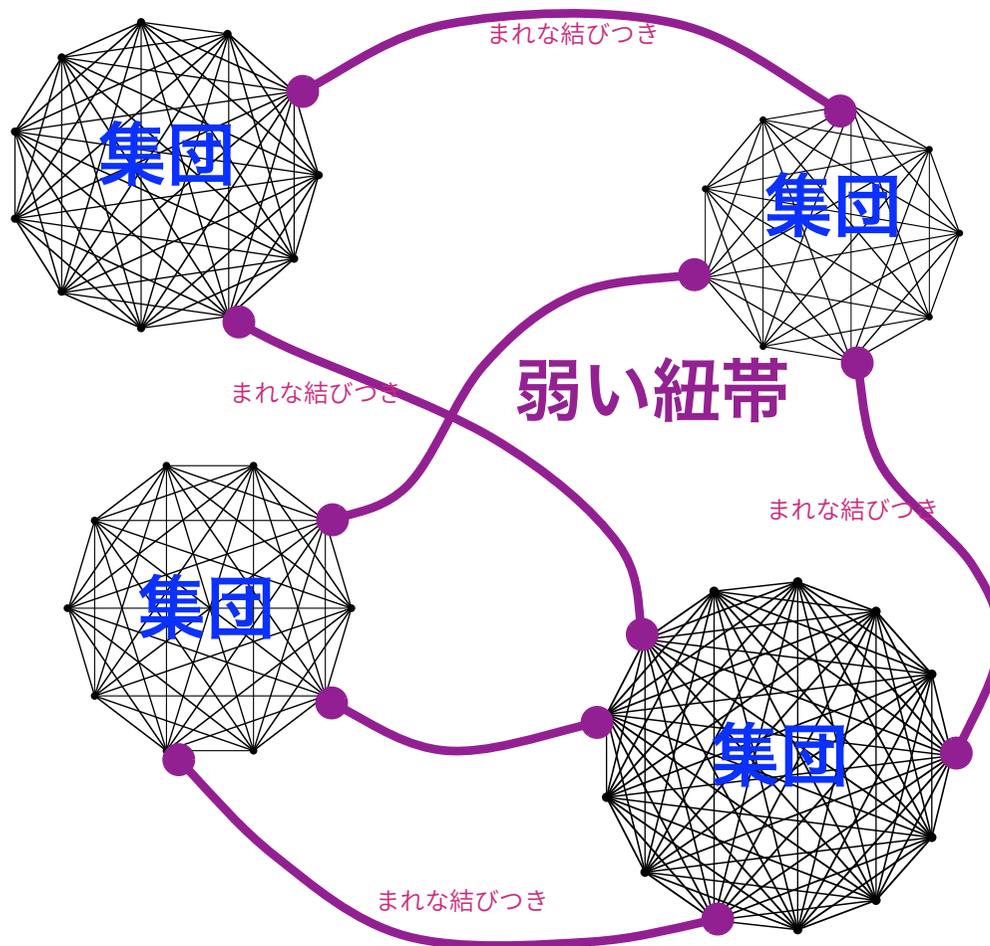
地域社会に住む我々の**基本的生態**



# 弱い紐帯(weak tie)

我々の社会は、**弱い紐帯**を通じて、ある集団から別の集団とがつながっている

Granovetter 1983



わずかな弱い紐帯の存在  
によって知人間の隔たり  
が小さくなる

# Small World性

高いクラスター性

+

平均距離が小さい

をあわせ持つネットワーク

# 「世間は狭い」の意味

英語	it's a small world	イタリア語	è un piccolo mondo	中国語	這是一個小世界
フランス語	le monde est petit	スペイン語	es un mundo pequeño	アラビア語	إنه عالم صغير
ドイツ語	Es ist eine kleine Welt	ヘブライ語	זה עולם קטן	朝鮮語	작은 세상이야

## Small World性は人間社会での経験に合致

人間関係のほとんどは、自分近所のまわりの緊密な関係  
高いクラスター性

わずかだけど、遠く離れた知人関係がある  
小さい平均距離

# Small Worldネットワークの例

俳優の共演、スポーツチーム関係

地球上の知人関係はどうか？

Milgramの実験(1967)、Watts達の実験

標語：地球上の任意の2人は6次の隔たり

Six Degrees of Separation on the Earth

感染

Webページのリンク関係

噂と流行

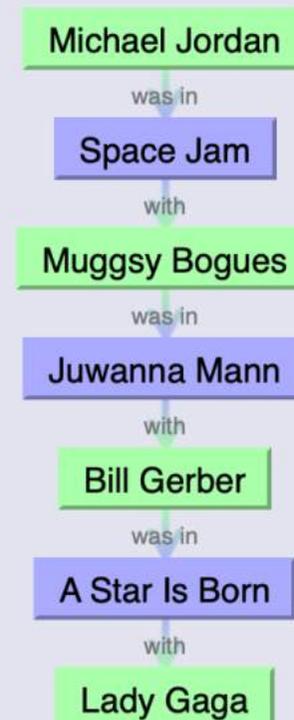
<http://oracleofbacon.org/>

# アメリカ映画の役者たちのBacon指数

Michael Jordan has a Bacon number of 2.



Michael Jordan has a lady gaga number of 3.



lady gaga has a Bacon number of 2.



# Kevin Bacon数 1997, April

$j$  歩での到達頂点数  $j$  歩までの到達頂点累積数

Bacon数 $j$	$ \Gamma_j $	$\Lambda_j$
0	1	1
1	1,181	1,182
2	71,397	72,579
3	124,975	197,554
4	25,665	223,219
5	1,787	225,006
6	196	225,202
7	22	225,224
8	2	225,226

<https://www.baseball-reference.com/oracle/>



## ダルビッシュとベーブ・ルースとの距離

### Chain of Teammates From Yu Darvish to Babe Ruth

[Yu Darvish](#) played with [Jon Lester](#) for the [2019 Chicago Cubs](#)

[Jon Lester](#) played with [David Wells](#) for the [2006 Boston Red Sox](#)

Exclude Jon Lester

[David Wells](#) played with [Phil Niekro](#) for the [1987 Toronto Blue Jays](#)

Exclude David Wells

[Phil Niekro](#) played with [Warren Spahn](#) for the [1964 Milwaukee Braves](#)

Exclude Phil Niekro

[Warren Spahn](#) played with [Elbie Fletcher](#) for the [1949 Boston Braves](#)

Exclude Warren Spahn

[Elbie Fletcher](#) played with [Babe Ruth](#) for the [1935 Boston Braves](#)

Exclude Elbie Fletcher

[Babe Ruth](#)

# 地球上に住む人々の隔たり実験

終了プロジェクト

<http://smallworld.columbia.edu/>



<http://www.sixdegrees.com>

## Six Degrees

SIGN IN OR JOIN

Email Address

Password

SIGN IN

 Remember Me

You're only Six degrees away from everyone...

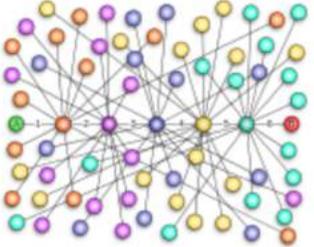
## Six Degrees Social Engine

The Most Exclusive Invite Only Social Network Where You Will Meet Amazing People Based on Your Interests



Build a Professional Networks or start up a group of friends based on your common interests. The Internet has opened our world now let it open its opportunities to you.

GET AN INVITATION NOW!



Six degrees of separation is the idea that all living things and everything else in the world is six or fewer steps away from each other so that a chain of "a friend of a friend" statements can be made to connect any two people in a maximum of six steps.

- Wikipedia

ALREADY HAVE AN INVITATION WITH A CODE?

GET STARTED HERE!

Above image By Daniel' (User:Dannie-walker) - Own work, CC BY-SA 3.0, Link

# Small Worldのモデル

高いクラスター性

+

小さい平均距離

をもつネットワークモデルを探せ

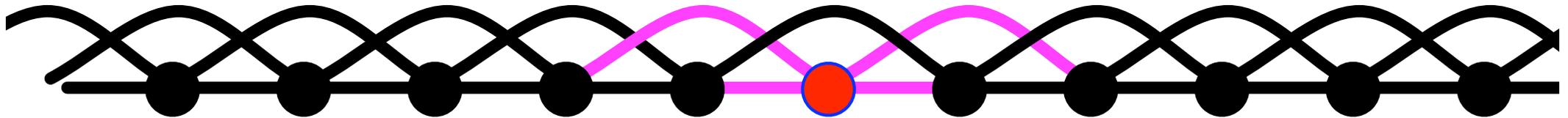
# Small Worldモデル

Watts & Strogatz

次数 $2k$ の1次元格子

各頂点は左右に $k$ 本のリンクを持つ

$k = 2$

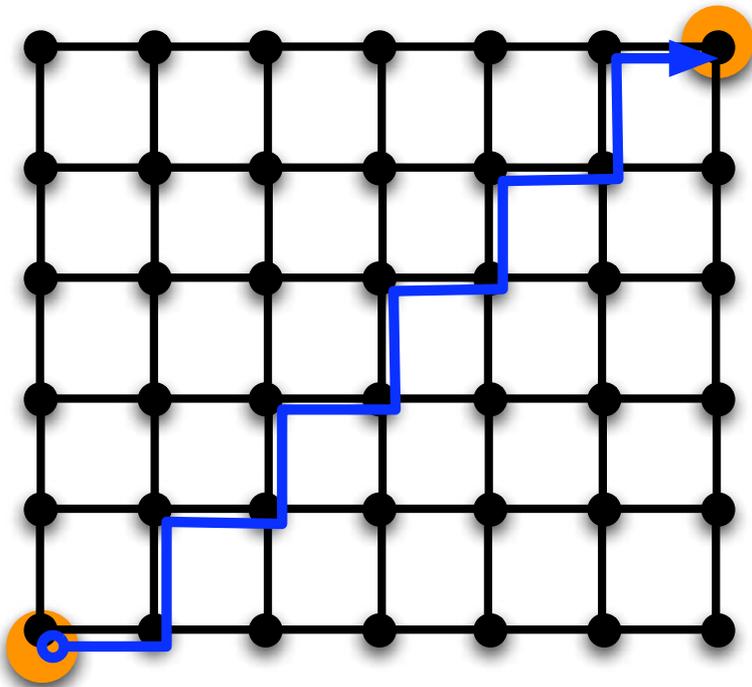


+

各辺を確率  $p$  で繋ぎかえて近道をつくる

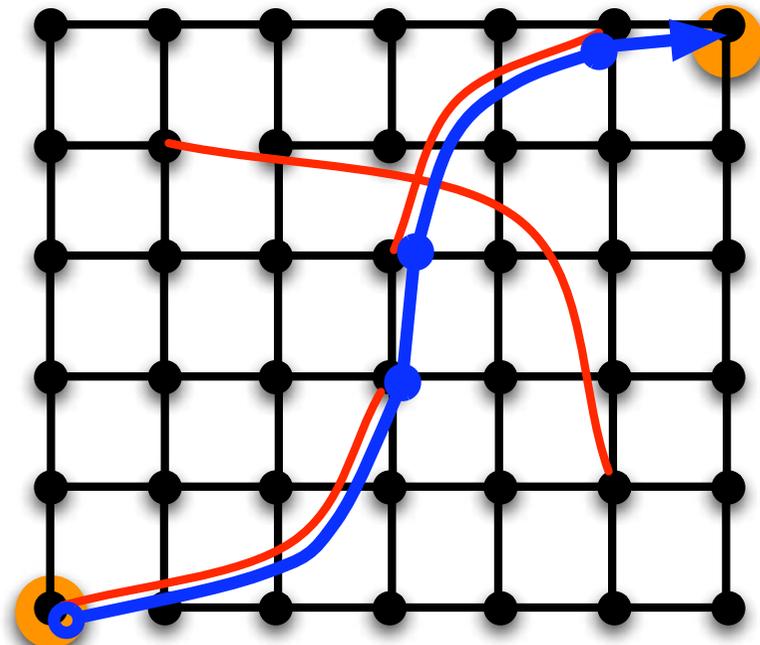
# re-wiringで近道をつくる

規則的格子ネットワーク



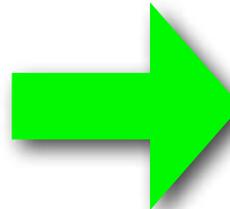
隣接頂点を地道にたどって遠くの頂点にようやく到達  
(平均距離は大きい)

幾つかの格子辺を近道で置き換えたネットワーク



近道があると、隣接頂点を飛ばして遠くの頂点に速く到達  
(平均距離が小さくなる)

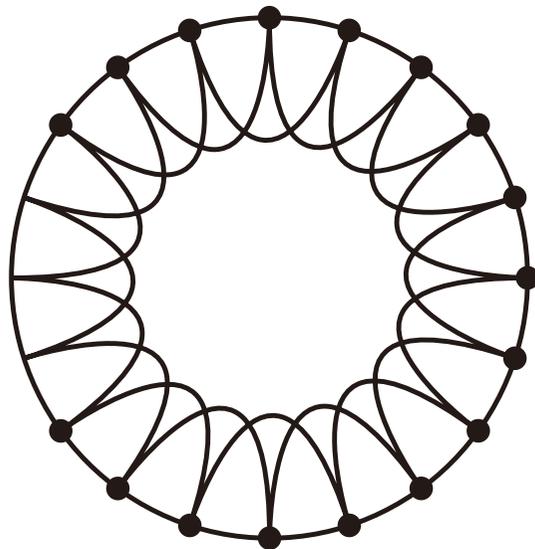
re-wiring



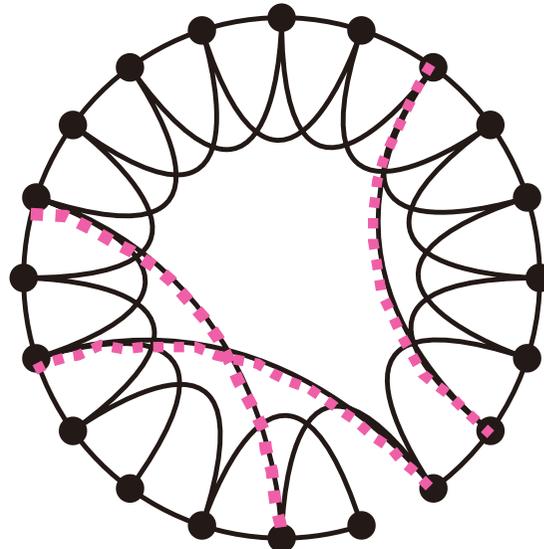
# W-SのSmall Worldモデル

**特徴** 1-parameterで規則格子からランダム  
グラフまで変化可能

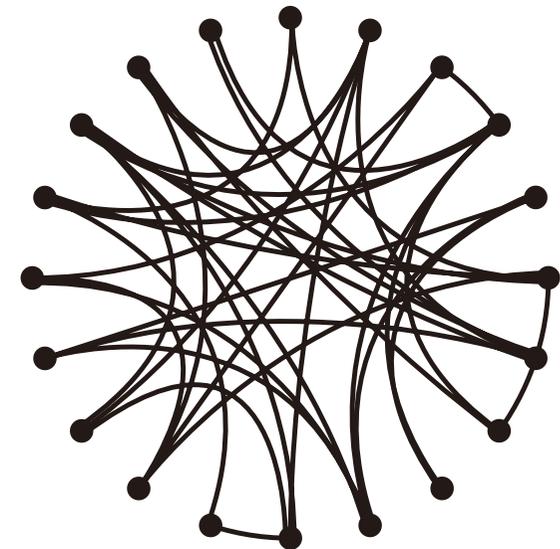
規則的格子ネット  
Regular



スモールワールド  
Small-world



ランダムネット  
Random



繋ぎ変え確率

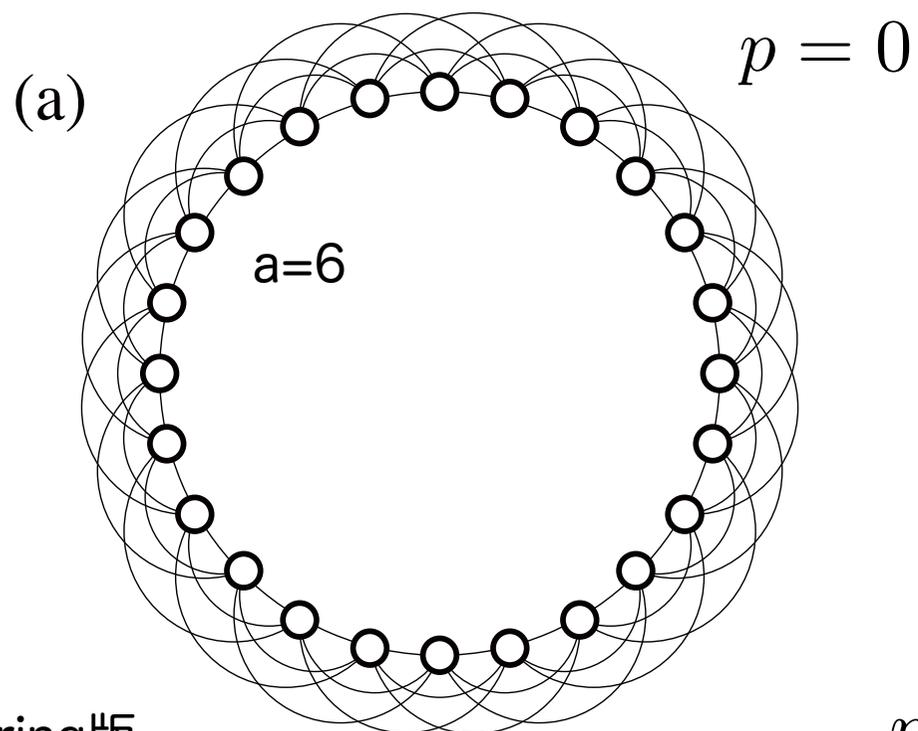
$p = 0$

小 ← つなぎ替えの確率 → 大

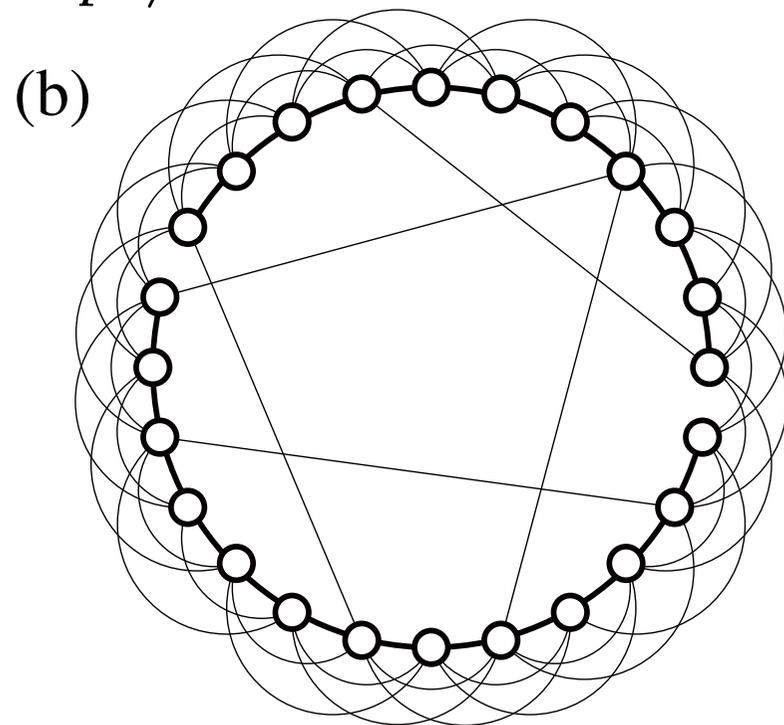
繋ぎ変え確率

$p = 1$

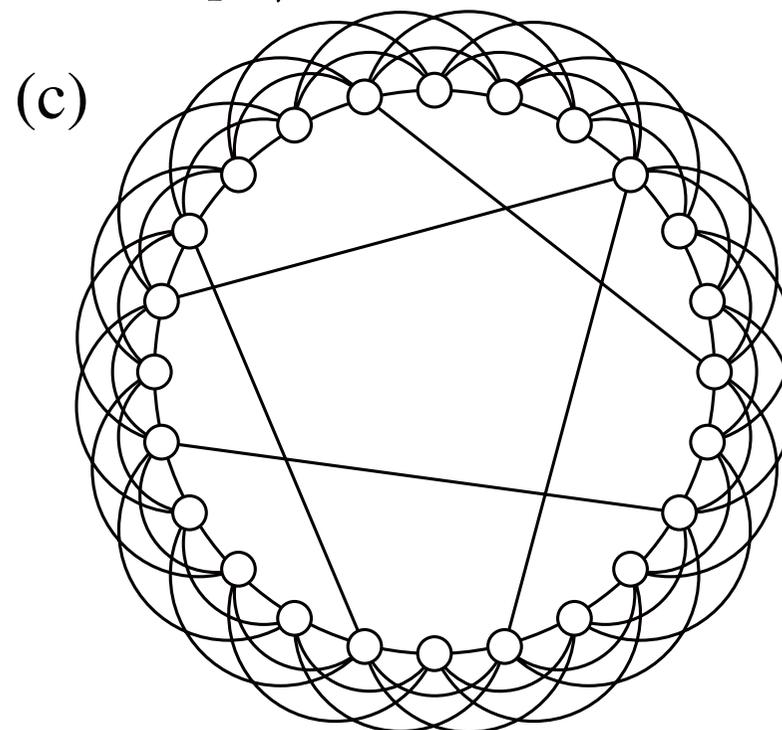
Increasing randomness



$p \neq 0$  ReWiring版

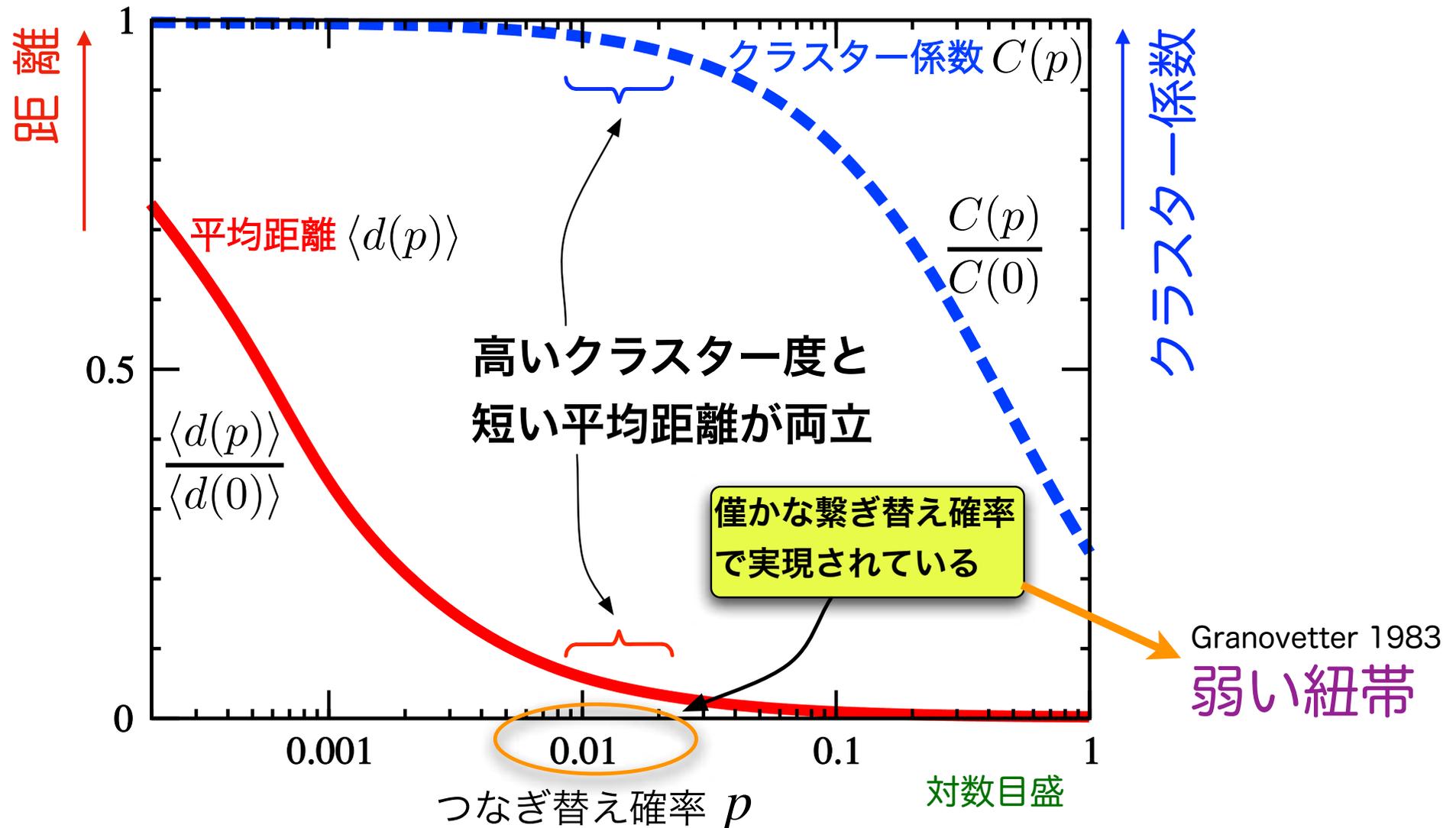


$p \neq 0$  非ReWiring版



# Watts & Strogatzモデルの数値結果

Watts & Strogatz, Nature 393(1998)



# Small Worldモデルの意義

高いクラスター性（密集度）と短い平均距離が  
両立し得ることを示した

どんなrewiring確率  $p$  でもグラフ次数はベキ分布にならない

格子的世界（局所的にしか動けない社会）を前提

空間的制約性を意識したモデル

空間的に離れた地点との接続は稀(まれ)

モデルが格子に基づいている帰結

巨大ネットワーク分析を  
進めていくと…

多くのネットワークには

さらに、著しい特徴がある  
ことがわかってきた

# 複雑ネットワークの特徴

巨大(large)

数万～数百・千億個の頂点  $n$  からなる

疎(sparse)

辺の数  $M$  が頂点数程度  $M \sim n$

Small World現象

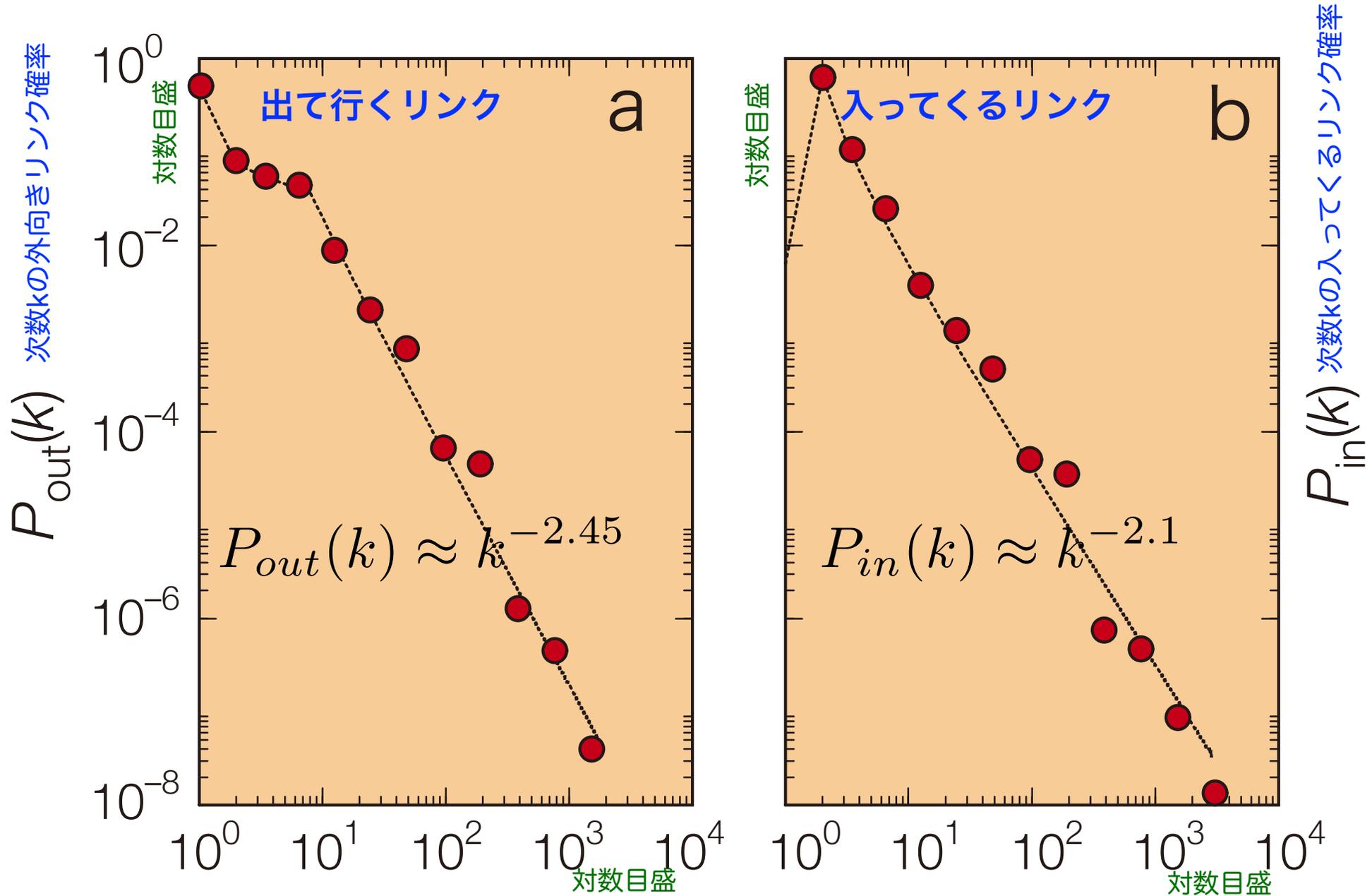
小さな平均距離と高いクラスター性

スケールフリーネットワーク 見えない法則の存在

頂点の次数分布がベキ法則に従う

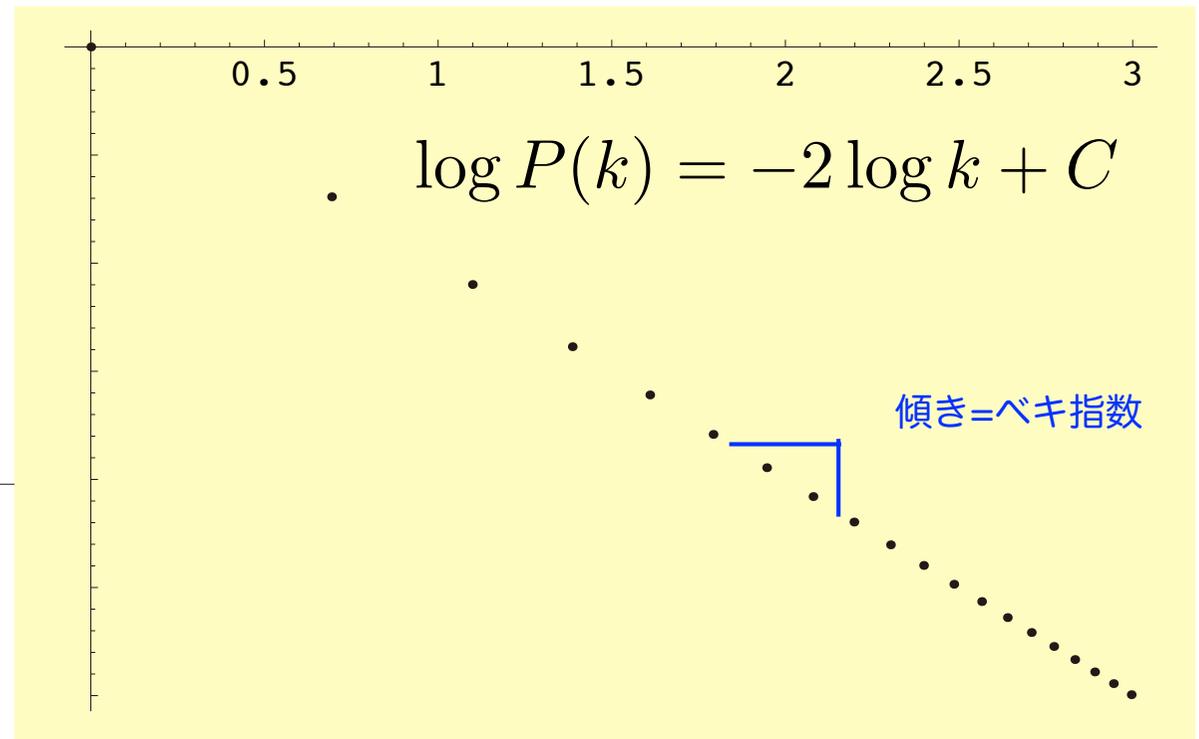
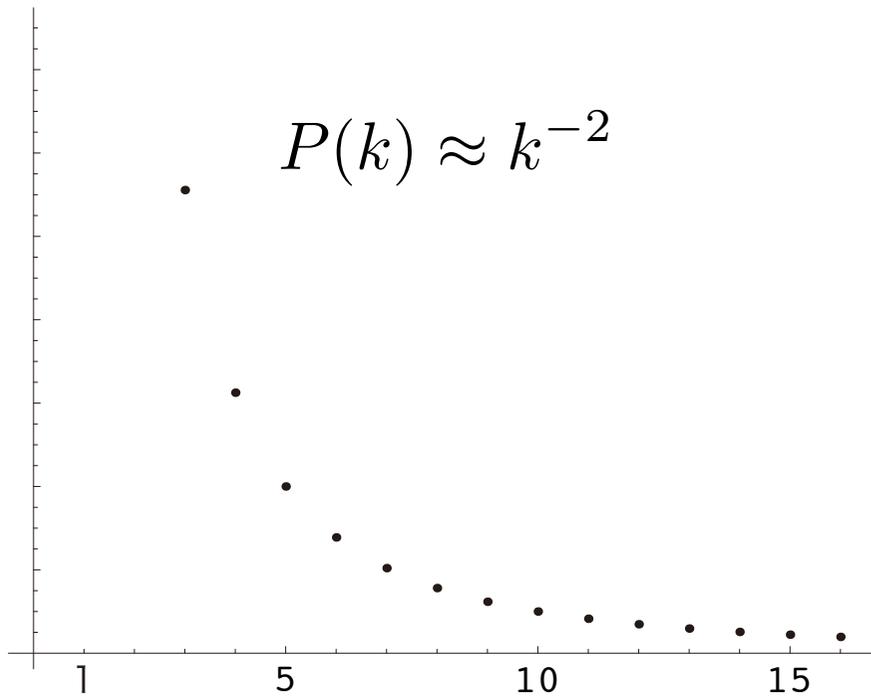
# Webページの次数分布

A-L. Barabási, Nature 401(1999)



# ベキ分布

$$P(k) \approx k^{-\gamma} \quad \text{ベキ指数 } \gamma$$



$$\log P(k) = -\gamma \log k + C$$

