音の響きと音階の決定

Pytagoras音階まで

2017 水谷正大

学ぶ

$\mu\alpha\nu\theta\alpha\mu\omega$

学んだこと

$\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$

mathematics 数学

Pythagoras学派

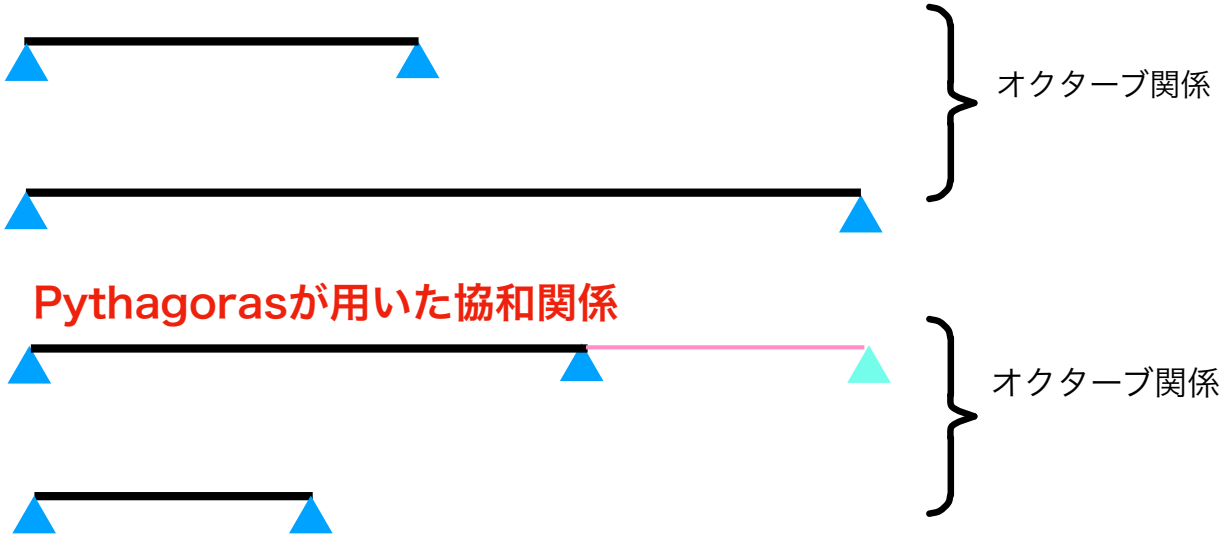
数学

	静止	運動
数(number)	算術 arithmetic	音楽 music
量（quantity）	幾何学 geometry	天文学 astronomy

音楽は数の比を扱う

弦長の比 a : b が鳴る振動比は b : a

長さ	振動数比
1/2	2/1
1	1/1
2/3	3/2
1/3	3/1



振動数が2倍（1/2倍）の音の関係

オクターブ関係

オクターブ等価性

人の聴覚系は、オクターブ関係にある音同士に共通性を見出す（同じ音として聴く）という仮定

聴いてみよう

musical_scale.nb

音程

2音の高低関係

旋律（メロディ）

2音以上の音程の時間的連なり

ラとソの2音

例「いどのまわりでおちゃわんかいたのだぁれ」

ミ・ソ・ラ・シの4音

例『げんかつやまのたぬきさん』

4度（ド-ファ）／5度（ド-ソ）の音程差

ミ・ソ・ラ・シ・レの5音の登場（Pentatonic scale）

音階において最も基本的。無理なく1オクターブを越えるメロディが可能

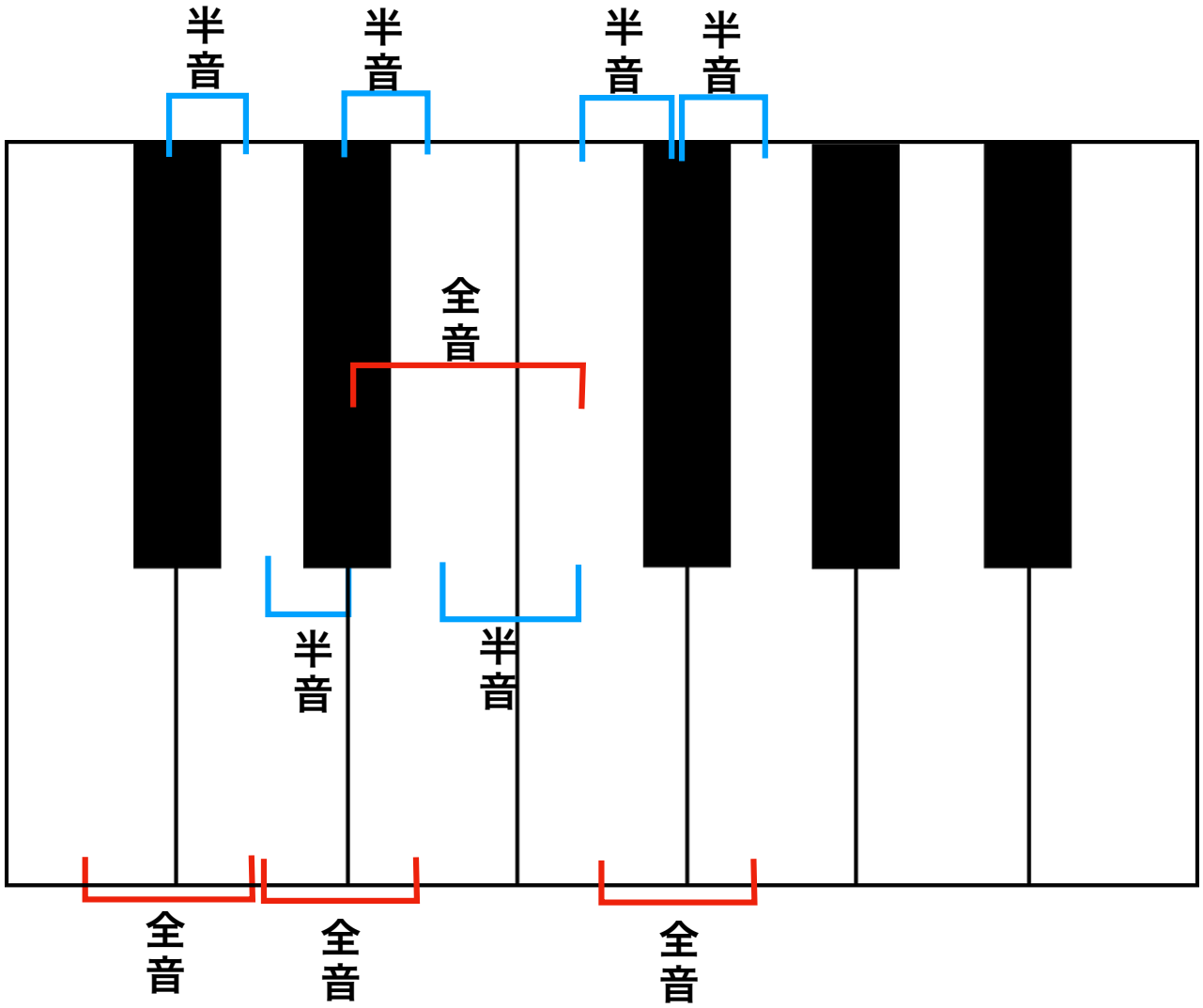
世界中の民族音楽で様々な形式で広く使われている

民謡音階

例『竹田の子守唄』

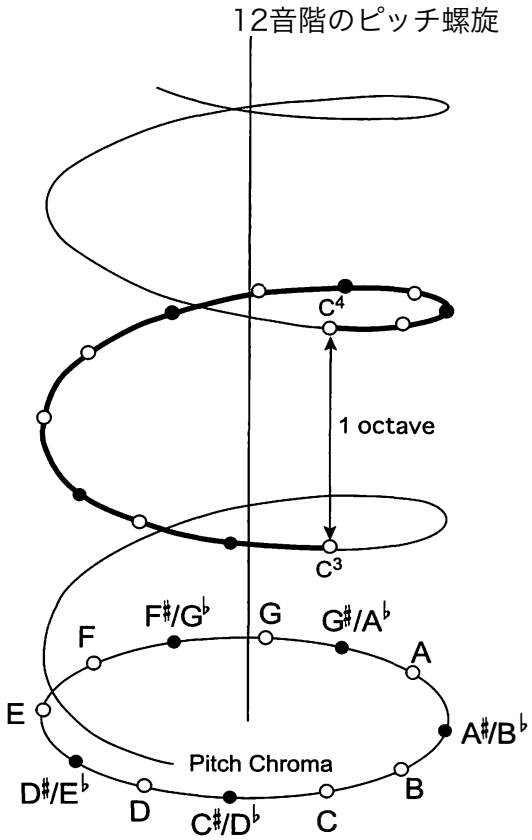
ラ-ド-レ-ミ-ソのソからオクターブ高いソまで

半音 + 半音 = 全音



協和（Consonance）と不協和（Dissonance）

和音（高さの違った音を同時に発する）ときに「美しい」とする振動数比を持つ音程



音階問題

1オクターブ内（振動数比1と2の間）に「ふさわしい音」をいくつか選び出す方法。音階が定まると、オクターブを越えて構成音をつなげても成立する不変性を持つ。

それらの音（とオクターブ音）を組み合わせて旋律を構成するための基礎（scale）を与える。

音律を調整するソフトウエア

YAMAHA Scale Tuner

MIDI楽器の音階を純正律やアラブ音律など各種の音階に変えることができる
指定した基本音階を直接スピーカから聴くこともできる。

聴いてみよう

音律演奏サンプルを聴く

音律演奏サンプル　坂崎紀『平均律の歴史的位置』参考資料

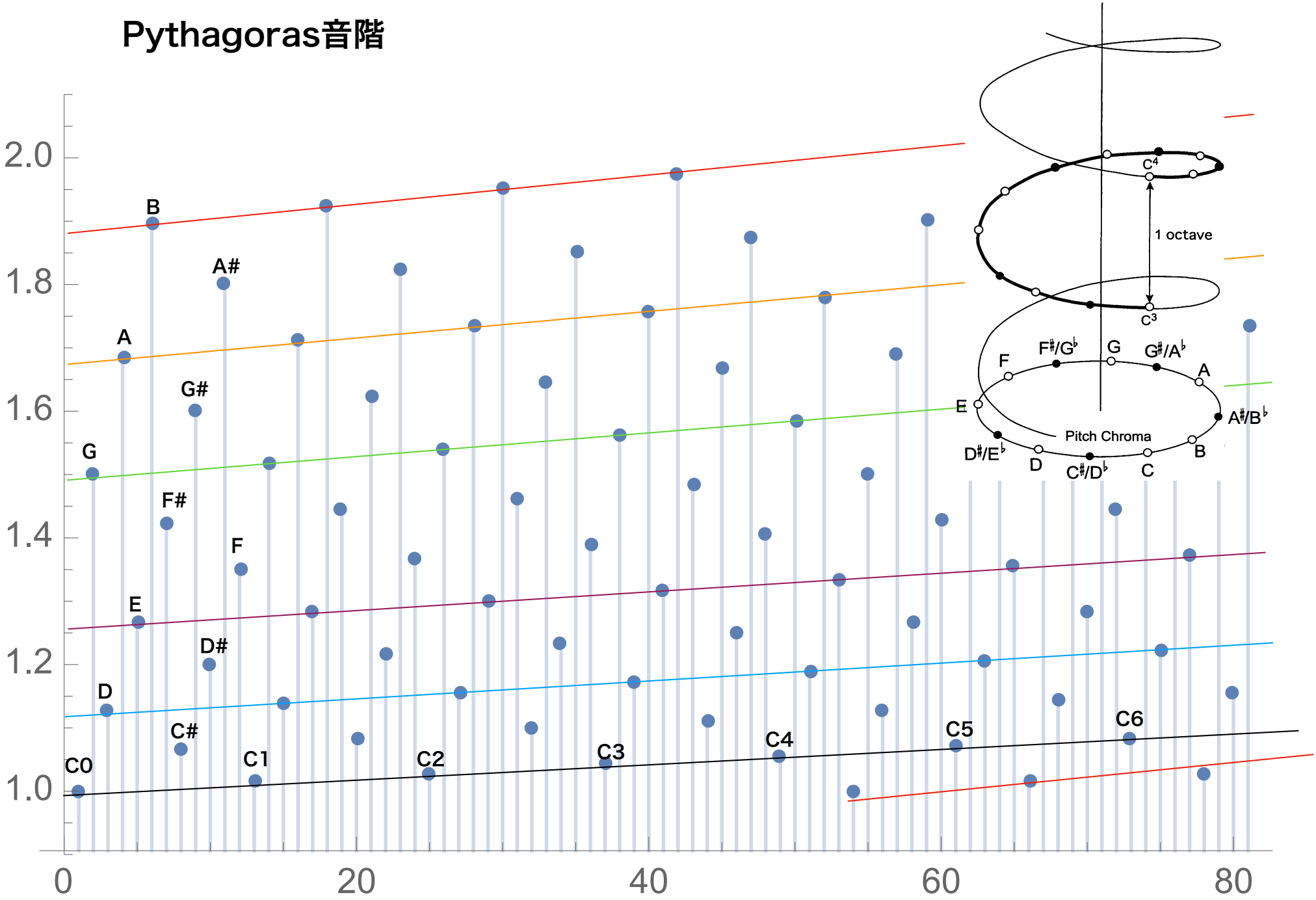
https://www.seitoku.ac.jp/daigaku/music/bltn/bltn1/tuning2017/tuning.html

Pythagoras音階の構成

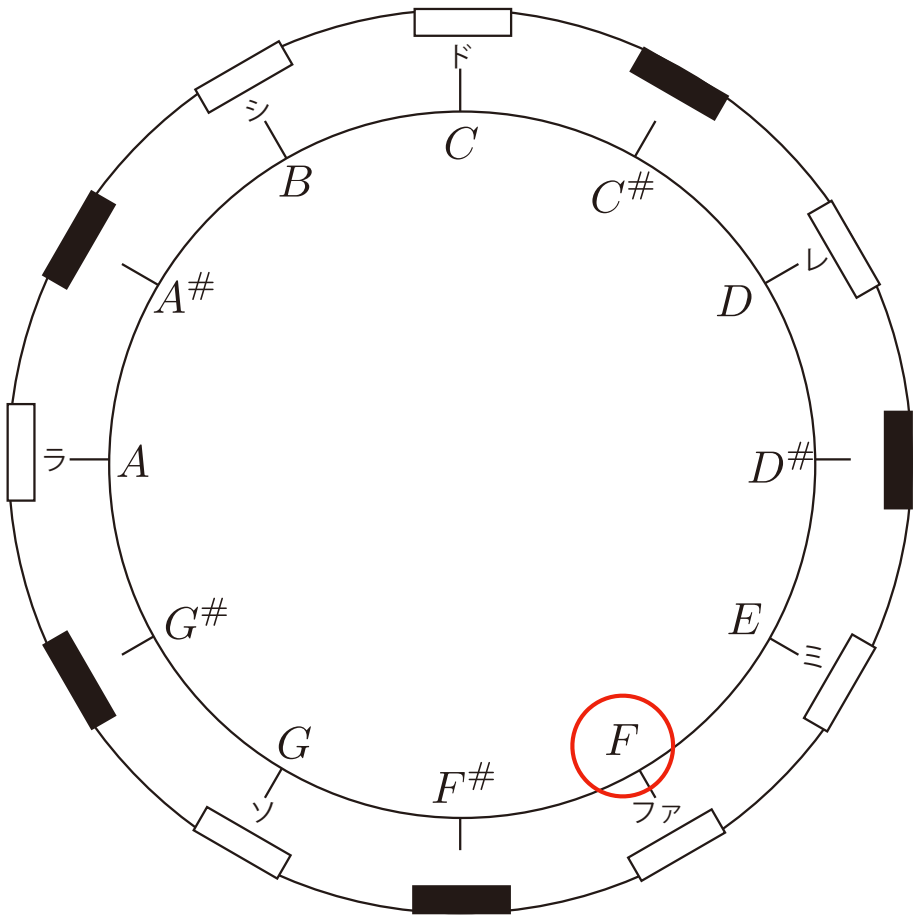
振動数を3/2倍して1オクターブに収めることを繰り返す

音階	3 倍操作	オクターブ下げ	平均律値	時計位置
C	$3^0 = 1$	1	1	0 時
G	3^1	$\frac{3}{2} = 1.5$	$2^{\frac{7}{12}} = 1.49831$	7 時
D	3^2	$\frac{3^2}{2^3} = 1.125$	$2^{\frac{2}{12}} = 1.12246$	2 時
A	3^3	$\frac{3^3}{2^4} = 1.6875$	$2^{\frac{9}{12}} = 1.68179$	9 時
E	3^4	$\frac{3^4}{2^6} = 1.26563$	$2^{\frac{4}{12}} = 1.25992$	4 時
B	3^5	$\frac{3^5}{2^7} = 1.89844$	$2^{\frac{11}{12}} = 1.88774$	11 時
F#	3^6	$\frac{3^6}{2^9} = 1.42383$	$2^{\frac{6}{12}} = 1.41421$	6 時
C#	3^7	$\frac{3^7}{2^{11}} = 1.06787$	$2^{\frac{1}{12}} = 1.05946$	1 時
G#	3^8	$\frac{3^8}{2^{12}} = 1.60181$	$2^{\frac{8}{12}} = 1.5874$	8 時
D#	3^9	$\frac{3^9}{2^{14}} = 1.20135$	$2^{\frac{3}{12}} = 1.18921$	3 時
A#	3^{10}	$\frac{3^{10}}{2^{15}} = 1.80203$	$2^{\frac{10}{12}} = 1.7818$	10 時
F	3^{11}	$\frac{3^{11}}{2^{17}} = 1.35152$	$2^{\frac{5}{12}} = 1.33484$	5 時
C	3^{12}	$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1.01364$	$2^{\frac{12}{12}} = 2$	12 時

Pythagoras音階



2 : 3協和音程に基づく Pytagoras の 12 音階と平均律



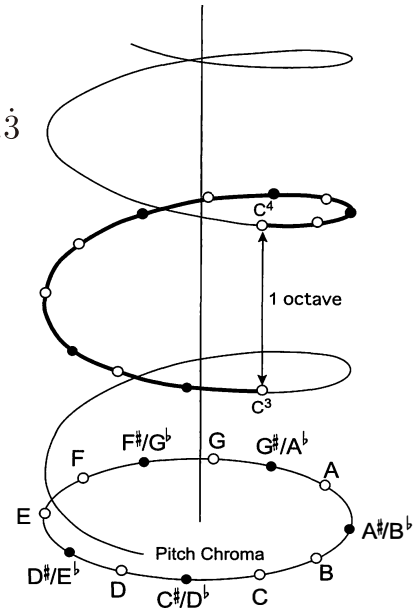
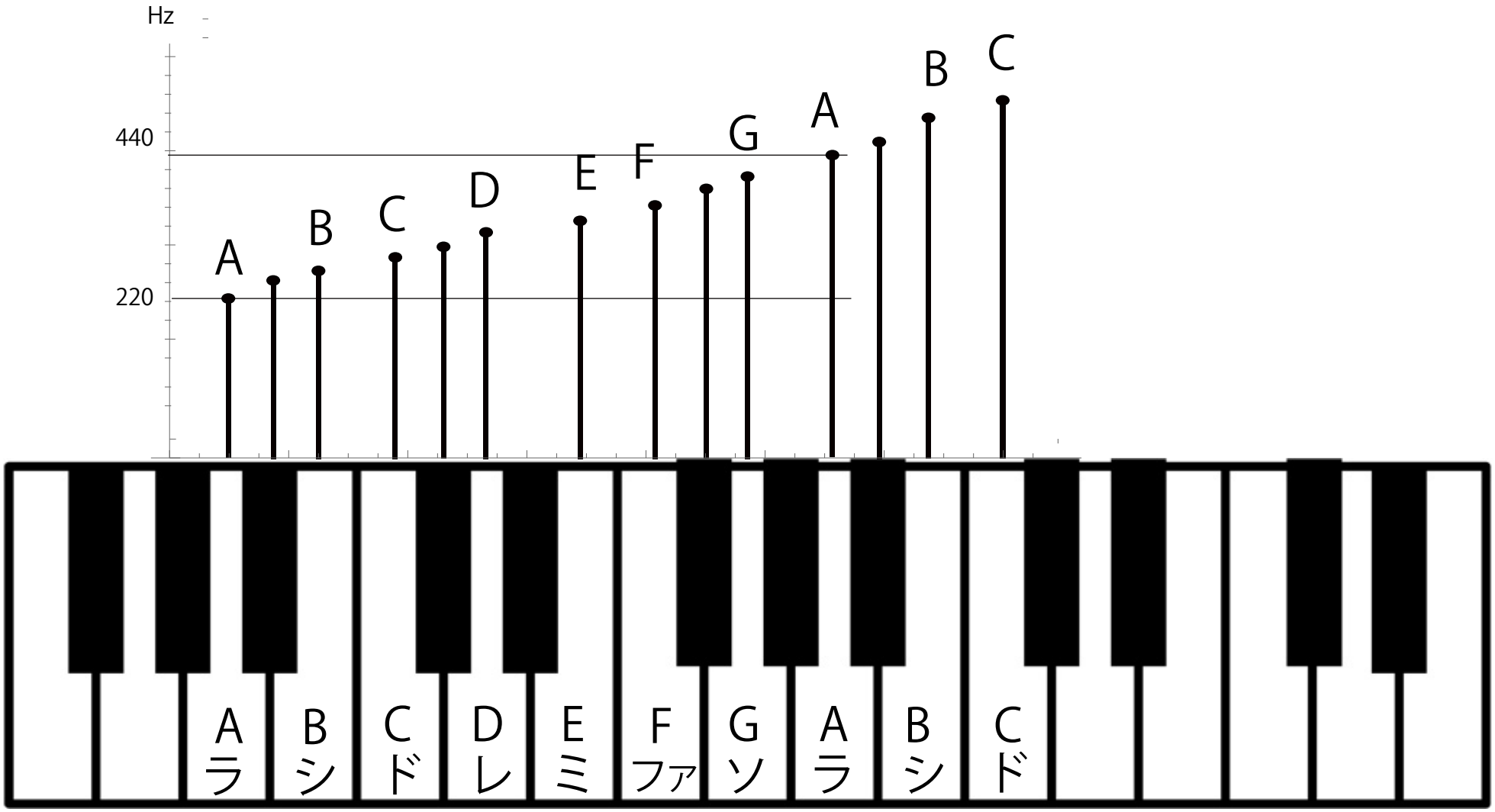
音階	3 倍操作	オクターブ下げ	平均律値	時計位置
C	$3^0 = 1$	1	1	0 時
G	3^1	$\frac{3}{2} = 1.5$	$2^{\frac{7}{12}} = 1.49831$	7 時
D	3^2	$\frac{3^2}{2^3} = 1.125$	$2^{\frac{2}{12}} = 1.12246$	2 時
A	3^3	$\frac{3^3}{2^4} = 1.6875$	$2^{\frac{9}{12}} = 1.68179$	9 時
E	3^4	$\frac{3^4}{2^6} = 1.26563$	$2^{\frac{4}{12}} = 1.25992$	4 時
B	3^5	$\frac{3^5}{2^7} = 1.89844$	$2^{\frac{11}{12}} = 1.88774$	11 時
F#	3^6	$\frac{3^6}{2^9} = 1.42383$	$2^{\frac{6}{12}} = 1.41421$	6 時
C#	3^7	$\frac{3^7}{2^{11}} = 1.06787$	$2^{\frac{1}{12}} = 1.05946$	1 時
G#	3^8	$\frac{3^8}{2^{12}} = 1.60181$	$2^{\frac{8}{12}} = 1.5874$	8 時
D#	3^9	$\frac{3^9}{2^{14}} = 1.20135$	$2^{\frac{3}{12}} = 1.18921$	3 時
A#	3^{10}	$\frac{3^{10}}{2^{15}} = 1.80203$	$2^{\frac{10}{12}} = 1.7818$	10 時
F	3^{11}	$\frac{3^{11}}{2^{17}} = 1.35152$	$2^{\frac{5}{12}} = 1.33484$	5 時
C	3^{12}	$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1.01364$	$2^{\frac{12}{12}} = 2$	12 時

ファ (F) の協和問題

$$3^{11}/2^{17} = 1.352.. \not\approx \frac{4}{3} = 1.\dot{3}$$

Octave の **Pythagoras のカンマ**

$$3^{12}/2^{19} - 1 = 0.01364$$



ピタゴラスの12音階