

Ulam Spiral

素数分布と剰余

2017 水谷正大

正整数を1から順番に正方格子に沿って螺旋状に無限個並べてみる
36までの素数を赤でマークした

36	35	34	33	32	31
17	16	15	14	13	30
18	5	4	3	12	29
19	6	1	2	11	28
20	7	8	9	10	27
21	22	23	24	25	26

Ulamは素数をマークすると特徴的なパターンがあることを見出した

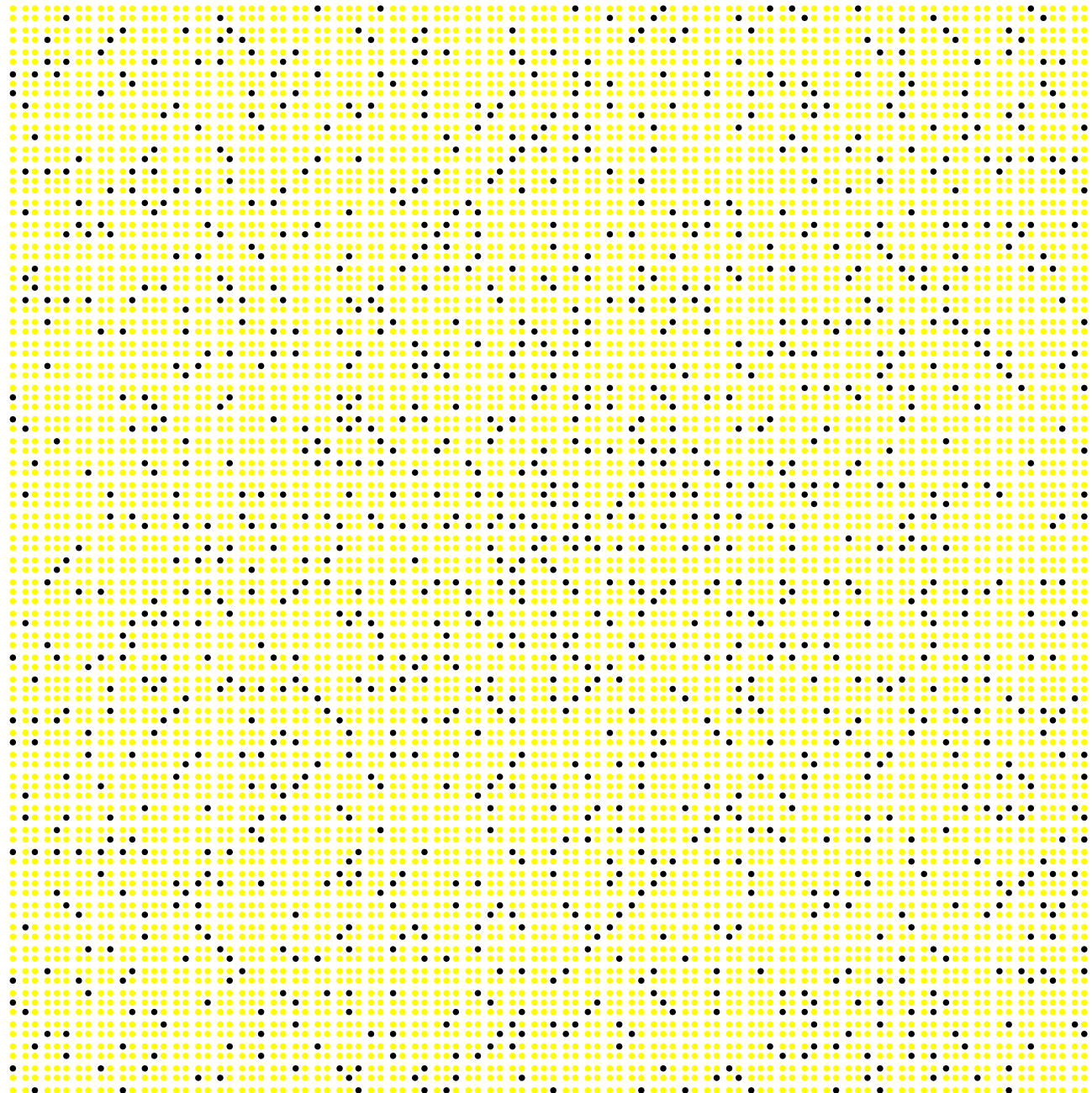
101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

1番から350番目までの整数リスト

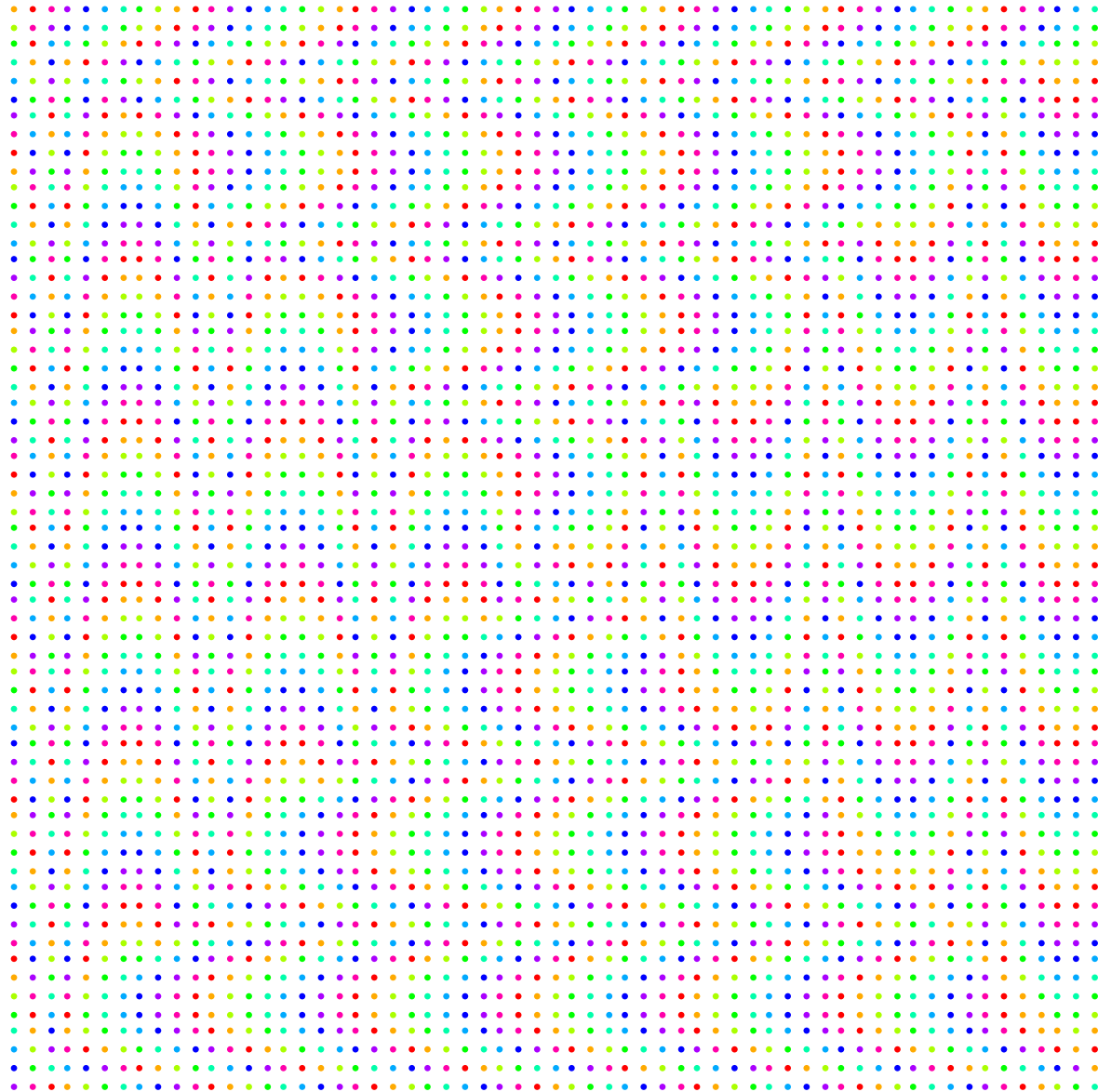
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,
101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181,
191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277,
281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383,
389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487,
491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601,
607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709,
719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827,
829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947,
953, 967, 971, 977, 983,, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033, 1039, 1049,
1051, 1061, 1063, 1069, 1087, 1091, 1093, 1097, 1103, 1109, 1117, 1123, 1129, 1151,
1153, 1163, 1171, 1181, 1187, 1193, 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249,
1259, 1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361,
1367, 1373, 1381, 1399, 1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451, 1453, 1459,
1471, 1481, 1483, 1487, 1489, 1493, 1499, 1511, 1523, 1531, 1543, 1549, 1553, 1559,
1567, 1571, 1579, 1583, 1597, 1601, 1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627, 1637, 1657,
1663, 1667, 1669, 1693, 1697, 1699, 1709, 1721, 1723, 1733, 1741, 1747, 1753, 1759,
1777, 1783, 1787, 1789, 1801, 1811, 1823, 1831, 1847, 1861, 1867, 1871, 1873, 1877,
1879, 1889, 1901, 1907, 1913, 1931, 1933, 1949, 1951, 1973, 1979, 1987, 1993, 1997,
1999, 2003, 2011, 2017, 2027, 2029, 2039, 2053, 2063, 2069, 2081, 2083, 2087, 2089,
2099, 2111, 2113, 2129, 2131, 2137, 2141, 2143, 2153, 2161, 2179, 2203, 2207, 2213,
2221, 2237, 2239, 2243, 2251, 2267, 2269, 2273, 2281, 2287, 2293, 2297, 2309, 2311,
2333, 2339, 2341, 2347, 2351, 2357

Ulamが発見(1964)した螺旋配置内の素数模様

10203までに表れる素数を黒でプロット



数を9で割ったときの余り(0,1,2,3,4,5,6,7,8)に応じた9種類の色
で塗り分けるとパターンが表れる



数をpを決めて、pで割ったときの余り $\{0,1,2,\dots,p-1\}$ に応じてp種の色で塗分け

難しいことではない！

螺旋的に $1,2,\dots,p-1, 0,1,2,\dots,p-1, 0,1,2,\dots,p-1, 0,1,2,\dots,p-1$ を繰り返していただく

p=6の場合

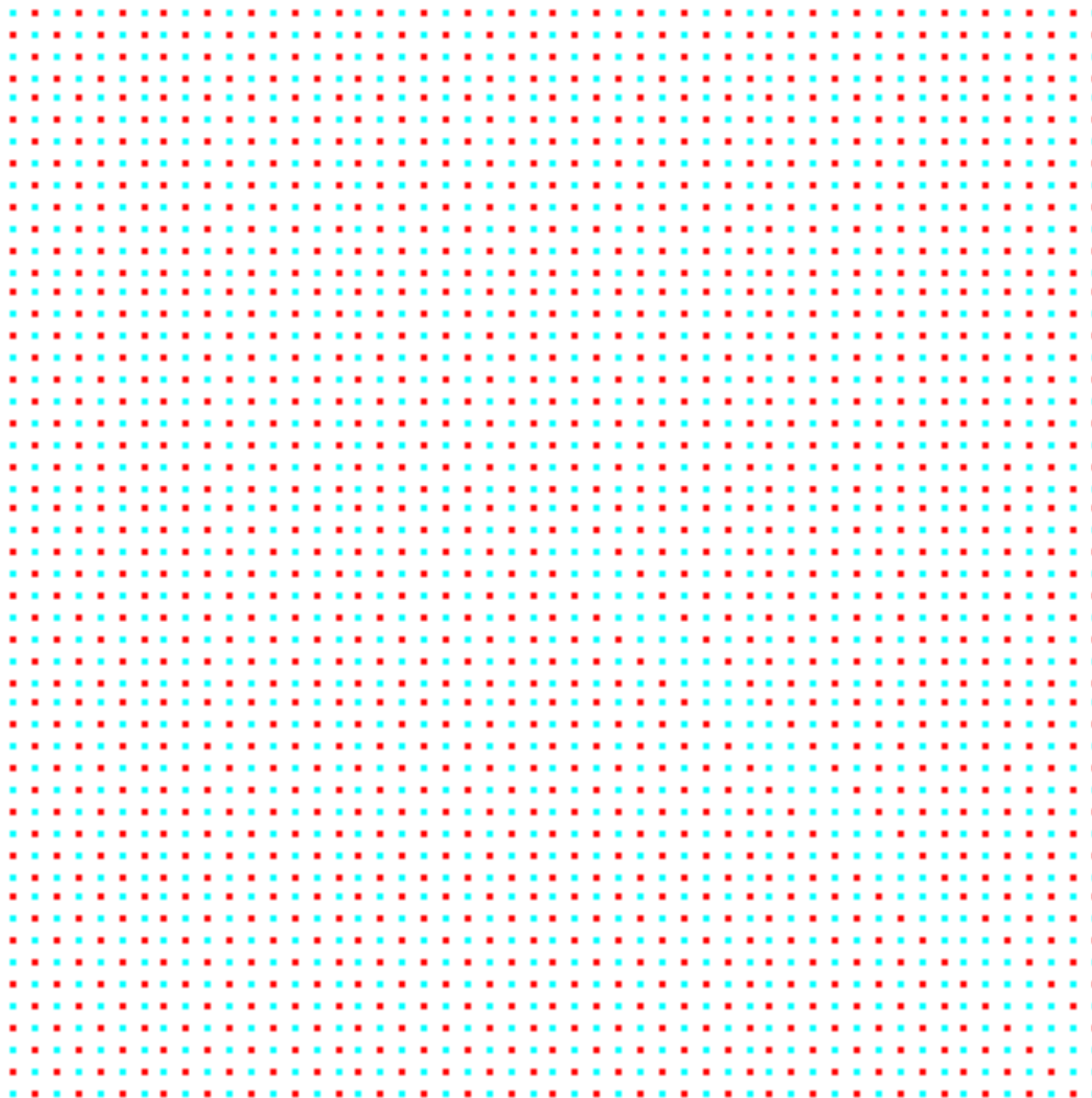
余りが0になる場所を赤い0とした

64	63	62	61	60	59	58	57
37	36	35	34	33	32	31	56
38	17	16	15	14	13	30	55
39	18	5	4	3	12	29	54
40	19	6	1	2	11	28	53
41	20	7	8	9	10	27	52
42	21	22	23	24	25	26	51
43	44	45	46	47	48	49	50



4	3	2	1	0	5	4	3
1	0	5	4	3	2	1	2
2	5	4	3	2	1	0	1
3	0	5	4	3	0	5	0
4	1	0	1	2	5	4	5
5	2	1	2	3	4	3	4
0	3	4	5	0	1	2	3
1	2	3	4	5	0	1	2

pで割った余りに応じた塗り分けのアニメーション (p=2から30変化)



正整数を1から順番に三角格子に沿って螺旋状に並べて
pで割った余りに応じた塗り分けのアニメーション (p=2から40まで変化)

