プログラムの形式理論

Nプログラム ≡ whileプログラム

は万能な計算能力を持つ

水谷正大

Nプログラム

Nプログラムで使用する4つの命令

入力 入力命令

```
input(x,y,...)
```

x,y,...

自然数値を格納する変数

代入 代入命令

```
x := t
```

t,t'

算術式(+,-,x,÷)

if文 判定命令

```
c(x,t')?
```

true false

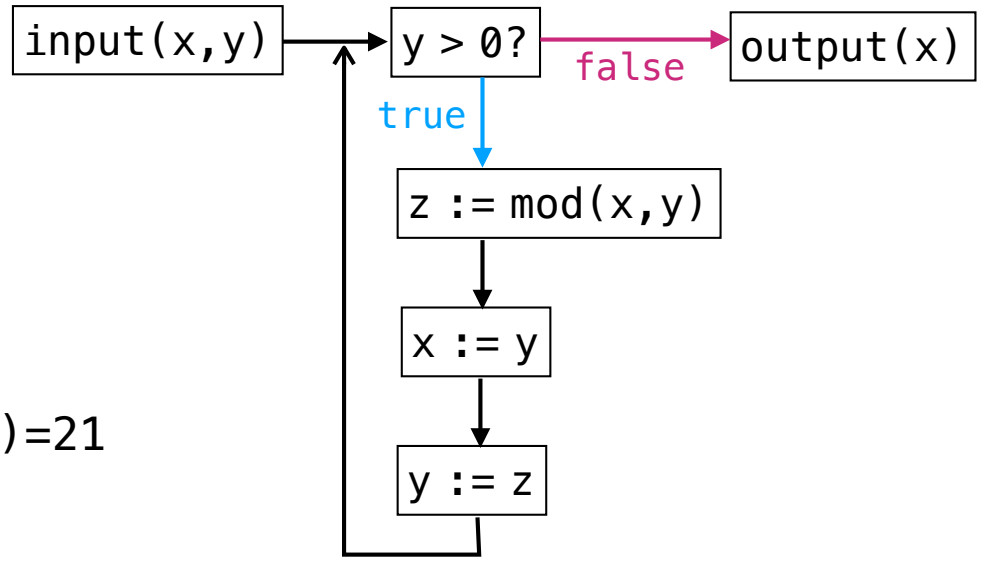
出力 出力命令

```
output(y)
```

入力と出力は最初と最後に1つづつだけ、
途中に代入と判定はいくらあってもよい

最大公約数gcd(x,y)を計算する

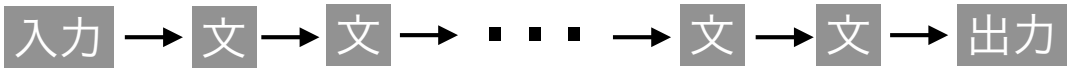
$$\gcd(x,y) = \begin{cases} \gcd(y, \mathrm{mod}(x,y)) & y > 0 \text{ のとき} \\ x & y = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$



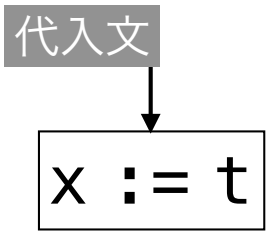
gcd(524,42)=gcd(42,21)=gcd(21,0)=21

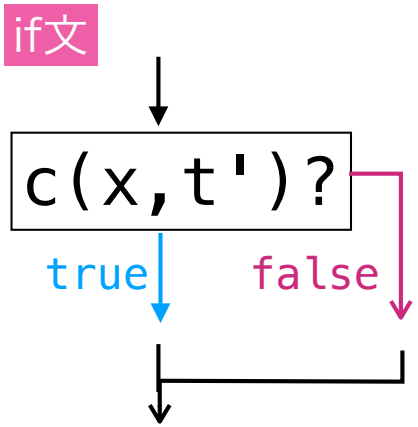
whileプログラム

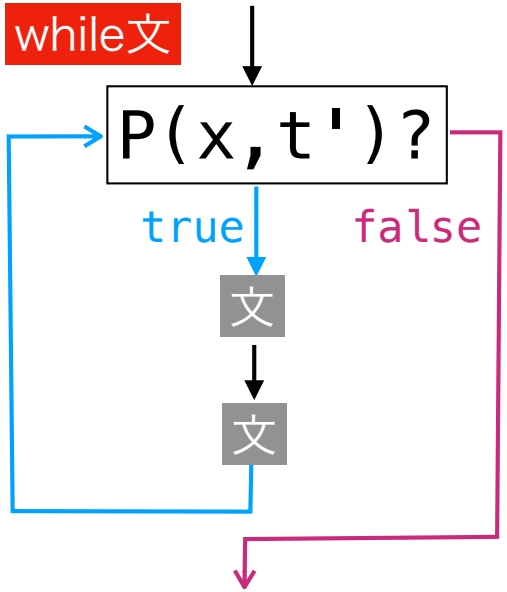
先頭からから順に実行されて出力に至る



whileプログラムで使用する3種類の文







この3つを組み合わせて1つの「文」として並べる

SCRATCH のブロック

Nプログラムとwhileプログラムの表現力

定理　任意のNプログラムPに対して、同じ計算をする whileプログラムP'がある

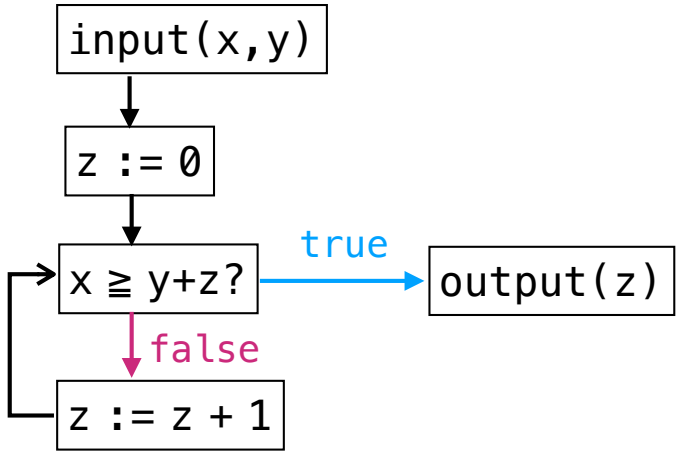
系　Nプログラムで計算される全体は、whileプログラムで計算される全体に等しい

定理　すべての初等関数はNプログラムで計算できる

ただし逆は不成立。

例）自然数上の差は部分関数

$$\mathrm{dif}_P(x,y) = \begin{cases} x - y & x \geqq y \text{ のとき} \\ \text{無定義} & x < y \text{ のとき} \end{cases}$$



定理　Nプログラムで計算できる関数全体の集合は
帰納関数全体の集合に一致する

例）原始帰納的でない帰納関数（計算可能関数）

Ackermann関数

$$A(0,y) = y+1$$
$$A(x+1,0) = A(x,1)$$
$$A(x+1,y+1) = A(x,A(x+1,y))$$

$$\begin{aligned} A(1,y) &= A(0,A(1,y+1)) = A(1,y-1)+1 \\ &= A(0,A(1,y-2))+1 = A(1,y-2)+2 \\ &\cdots \\ &= A(1,0)+y = y+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(2,y) &= A(1,A(2,y-1)) = A(2,y-1)+2 \\ &= A(1,A((2,y-2))+2 = A(2,y-2)+4 \\ &\cdots \\ &= A(2,0)+2y = A(1,1)+2y \\ &= 2y+3. \end{aligned}$$