Fourier 解析とウェーブレットの基礎

水　谷　正　大 著

大東文化大学経営研究所

まえがき

本書は津田塾大学数学科 3 年生以上を対象に開講している「ウェーブレットと信号処理」（半期）の講義ノートをまとめたものである。基礎的な事柄に絞った上で、この分野に親しみさらに本格的なテキストに取り組むことができることを目標にし、またれ Mathematica をを例にして数式処理システムを援用して計算処理することも視野に入れている。講義をきっかけとして筆者もこの分野について学ぶ機会を得て、巻末に挙げたテキストに触れてきた。力不足のため講義では証明の仔細や関連事項に触れる余裕がなかったために、準備ノートを通読できる形に加筆して補助テキストとして配布してきたものが本書の原型である。

本書は二部に別れている。目次を眺めてわかるように第一部は主に第二部「ウェーブレットの方法」のために「Fourier 解析」の基礎を紹介している。1 部の第 5.4 節では高速 Fourier 変換を利用した画像処理を紹介している。本書では内積表示に Dirac のブラケット記法を使い、Dirac のデルタ関数も導入している。これらの有用性については第一部の第 2.3 節、超関数については第 4 章にまとめている。

Fourier 解析が既知であるときには第二部から読むことができる。ウェーブレット理論の骨子を知りたい場合には第 8 章の多重解像度解析から取り掛かることができる。それより前にある第 6 章および第 7 章では自明なウェーブレット系である Haar 系を例にウェーブレット分解と再構成を丁寧に取り上げ、その実際を第 7.4 節で画像処理として紹介している。

ウェーブレットについて

ウェーブレットとは、多重解像度解析 (MRA) と呼ぶ関数空間において著しい構造を持つ関数空間で構成される直交基底系である。第 8 章で詳しく紹介するように、$\mathbb{R}$ 上の L^2 関数が多重解像度解の性質を満たすとき、関数部分空間列 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ はすべての $j \in \mathbb{Z}$ について $V_j \subset V_{j+1}$ であって $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ となり、$f(2x) \in V_{j+1}$ のときに限って $f(x) \in V_j$ となっている。そのような部分空間 V_0 は、ある $\phi(x)$ とその平行移行から構成される関数系 $\{T_k\phi(x)\}$ が V_0 の正規直交基底

$$V_0 = \overline{\mathrm{span}}\{T_k\phi(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

となっている。この関数をスケーリング関数 $\phi \in V_0$ という。結局、多重解像度解析となっている関数空間 $L^2(\mathbb{R})$ の完全直交基底はスケーリング関数をつかって ϕ から

その伸張 $D_{2^j}(x) = 2^j x (i \in \mathbb{Z})$ と平行移動 $T_k(x)x - k (k \in \mathbb{Z})$ だけから構成される。

MRA では各 V_j の直交補空間を W_j と表すと、互いに直交する部分空間への分解

$$V_j = \bigoplus_{k=1}^{j-J} W_{j-k} \oplus V_J, \qquad j > J, \tag{8.8}$$

が得られ、したがって $L^2(\mathbb{R})$ は

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} W_k \tag{8.9}$$

と分解できる。

多重解像度解析（MRA）が重要であるのは、第 8.4 節で示すように、スケーリング関数 ϕ から定義 8.2 を満たすように関数列 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ をさだめると、$L^2(\mathbb{R})$ の基底となる正規直交ウェーブレット関数系 $\{\psi\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ が構成でき、$L^2(\mathbb{R})$ 内の任意の f に対して、V_j への直交射影 $\hat{P}_j$ を使って

$$\hat{P}_j f = \hat{P}_{j-1} f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f \,|\, \psi_{j,k} \rangle \, \psi_{j,k} \tag{8.7}$$

と表されることにある。多重解像度解析であるように関数空間が構成できると Fourier 解析とは違った観点からの信号解析が可能になる。これがウェーブレットによる信号解析である。問題は、スケーリング関数 ϕ をどのように定めるかである。

まず、第 6 章および第 7 章では、スケーリング関数として自明な Haar 関数を取り上げ、上記のウェーブレットの構成や MRA の性質を具体的に取り上げた（記述がやや冗長でになった）。

スケーリング関数とそれから構成されるウェーブレット関数が混獲とサポートを持ち、かつ、連続な場合は理論的に興味深いだけでなく、神郷処理における広範な鷹揚がもたらされる。Daubechies はそのような求める関数系を組織的に構成する方法を発見した。その概要を第 9 章で紹介した。

なお、本書は大東文化大学経営研究所の好意を得て、筆者の Web サイト `http://www.ic.daito.ac.jp/~mizutani/wavelet/` にて公開している。本書における誤記の正誤についても掲載する。

2018 年 1 月

水谷正大

`mizutani@ic.daito.ac.jp`

目次

第 I 部　Fourier 解析　1

第 1 章　内積と直交性　3
- 1.1　内積空間 3
- 1.2　L^2 と ℓ^2 空間 6
- 1.3　直交系と直交射影 12
- 1.4　基底の完全性（全体性） 27
- 1.5　関数の L^2 収束と一様収束 29
- 1.6　作用素と随伴作用素 32

第 2 章　Fourier 級数　37
- 2.1　さまざまな用語 37
- 2.2　Fourier 級数の基本 41
- 2.3　Dirac 記法再訪 44
- 2.4　Dirichlet 核 53
- 2.5　積分正弦関数 55
- 2.6　Fourier 級数の計算 58
- 2.7　不連続関数の Fourier 級数 63
- 2.8　Gibbs 現象の解析 68
- 2.9　Fourier 級数の収束性 73

第 3 章　Fourier 変換　87
- 3.1　Fourier 変換と反転公式 87
- 3.2　Fourier 変換の性質 96
- 3.3　畳み込み 102

3.4 フィルター 104
3.5 標本化定理 112

第 4 章 超関数 119
4.1 一般化関数 119
4.2 デルタ関数の性質 123
4.3 Fourier 変換を使った微分方程式の解法 127
4.4 量子力学とデルタ関数 135

第 5 章 離散信号と離散 Fourier 変換 139
5.1 離散信号 139
5.2 $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ の直交基底 145
5.3 離散 Fourier 変換 149
5.4 高速 Fourier 変換とその応用 159

第 II 部 Wavelet の方法 165

第 6 章 Haar 関数系 167
6.1 Haar スケーリング関数と Haar ウェーブレット関数 167
6.2 Haar 関数系 172
6.3 Haar 近似関数と詳細関数再訪 179
6.4 Wavelet 変換： 分解と再構成アルゴリズム 186
6.5 高速ウェーブレット変換 199

第 7 章 離散 Haar 系 203
7.1 離散 Haar 関数系 203
7.2 2 次元 Haar ウェーブレット基底 208
7.3 2 次元 Haar ウェーブレット変換 214
7.4 2 次元 Haar ウェーブレット変換の応用 218

第 8 章 多重解像度解析 225
8.1 平行移動から構成される直交基底 225
8.2 多重解像度解析（MRA) 227
8.3 スケーリング関係 230
8.4 ウェーブレット関数系の構成 232

8.5 MRA の分解および再構成公式 236
8.6 分解と再構成法 237

第 9 章 Daubechies の構成方法 241
9.1 スケーリング関数の Fourier 変換 241
9.2 スケーリング関数の反復構成 244
9.3 ウェーブレット関数のゼロモーメント条件 248
9.4 Daubechies の方法 251
9.5 Daubechies の多項式 253

参考文献 259

第 I 部

Fourier 解析

第 1 章

内積と直交性

1.1 内積空間

1.1.1 内積

定義 1.1 ベクトル空間 V を $\mathbb{C}^n$ とする。V の要素 $|\boldsymbol{x}\rangle$ が $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ と列ベクトルで表されているとする。

$|\boldsymbol{x}\rangle, |\boldsymbol{y}\rangle \in V$ の**内積**（inner product）またはスカラー積（scalar product）を次で定義する：

$$\langle \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k^* \, y_k. \tag{1.1}$$

ここで、記号 * は複素共役を表す。

性質 1.2 (内積の性質) 体 K 上のベクトル空間 V 上で定義される内積は、次の性質を持つ。

(1) 正値性： 任意の $|v\rangle \neq 0$ に対して、

$$\langle v \,|\, v \rangle > 0. \tag{1.2}$$

(2) 共役対称性：$|v\rangle, |w\rangle \in V$ に対して、

$$\langle v \,|\, w \rangle^* = \langle w \,|\, v \rangle. \tag{1.3}$$

(3) 線形性：$a, b \in K$ と $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in V$ について

$$\langle u \,|\, av + bw\rangle = a\,\langle u \,|\, w\rangle + b\,\langle u|w\rangle \tag{1.4}$$

内積の共役対称性と線形性を使うと内積の**反線形性**（antilinear）が確かめられる。

$$\langle av + bw \,|\, u\rangle = a^*\,\langle v \,|\, u\rangle + b^*\,\langle w|u\rangle\,. \tag{1.5}$$

性質 (1) に注意しよう。ベクトルの 2 点 $|\boldsymbol{x}\rangle, |\boldsymbol{y}\rangle \in V$ の内積を式 (1.1) のように‘左から掛ける’$|\boldsymbol{x}\rangle$ については複素共役をとって定義したのには意味がある。仮に 2 つのベクトルの内部積（interiour product）$\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k$ を内積だとしたならば、たとえば $|\boldsymbol{x}\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ に対して $\langle \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x}\rangle = 0$ となってしまうからだ。この事情は、あとで定義する関数内積 1.13 についても同様である。

ここでは $|\boldsymbol{x}\rangle$ を**ケットベクトル**（ket vector）、$\langle \boldsymbol{x}|$ を**ブラベクトル**（bra vector）と呼ぶ。ベクトルやその内積をブラとケットで表す方式を**ブラケット表示**という。ブラケット表記を考案したのは量子力学の完成者の一人である P.A.M.Dirac である[*1]。Dirac は Schrödinger 方程式の解 $\Psi(x)$ として記述されるような量子力学的状態をケット $|\Phi\rangle$ で表し、明快で首尾一貫した理論を与えた [11]。

$|\boldsymbol{x}\rangle, |\boldsymbol{y}\rangle \in V$ について内積 $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle$ を、$|\boldsymbol{y}\rangle$ に対して $\langle \boldsymbol{x}|$ が作用した結果であると見なす。$\langle \boldsymbol{x}|$ と $|\boldsymbol{x}\rangle$ は同じ空間には属しておらず、$\langle \boldsymbol{x}|$ は $|\boldsymbol{y}\rangle$ に作用してスカラー値をもたらす写像とみなすのである。このとき、内積は $\langle \boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}\rangle$ と書くべきかもしれないが、簡素を旨として $\langle \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y}\rangle$ と表すのである。

体 K 上のベクトル空間 V から K への線形写像 $\mathfrak{f}$

$$\mathfrak{f}(a\,|x\rangle + b\,|y\rangle) = a\mathfrak{f}(|x\rangle) + b\mathfrak{f}(|y\rangle)$$

を V 上の線形形式または**線形汎関数**（linear functional）という。V 上の線形汎関数全体を $V^\dagger$ と表すと $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in V^\dagger$ は $a \in K$ に対して

$$\begin{aligned}(\mathfrak{f} + \mathfrak{g})(|x\rangle) &= \mathfrak{f}(|x\rangle) + \mathfrak{g}(|x\rangle)\\ (a\,\mathfrak{f})(|x\rangle) &= a\mathfrak{f}(|x\rangle)\end{aligned}$$

である。つまり線形汎関数全体 $V^\dagger$ は K 上のベクトル空間になっている。この $V^\dagger$ をベクトル空間 V の**双対空間**（dual space）または**共役空間**（conjugate space）という。

[*1] 内積をブラとケットで表してブラケット (bracket) とシャレているのである。

内積の定義式 (1.1) を、$\langle \boldsymbol{x}|$ は V の双対ベクトル空間の要素として

$$\langle \boldsymbol{x}| : |\boldsymbol{y}\rangle \mapsto \langle \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y}\rangle$$

を与えているとみなす。一般に、$|v\rangle \in V$ の双対（共役）$\mathscr{D}_{|v\rangle}$ をブラケット記法をつかって $\langle v|$ と表し、ケット $|u\rangle$ に作用させるとき

$$\mathscr{D}_{|v\rangle}(|u\rangle) = \langle v \,|\, u\rangle \tag{1.6}$$

と記すのである。ケット $|\boldsymbol{x}\rangle$ が列ベクトルとすると、$|\boldsymbol{x}\rangle$ に対応する双対、つまりブラ $\langle \boldsymbol{x}|$ はその転置共役

$$\langle \boldsymbol{x}| = \left(\boldsymbol{x}^t\right)^* = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & \dots & x_n^* \end{bmatrix}$$

に他ならない。

$|u\rangle$ の a 倍からなるケット $a\,|u\rangle$ の共役 $\mathscr{D}(a\,|u\rangle)$ は $a^*\,\langle u|$ であることに注意しよう。

$\mathbb{C}^n$ のようなベクトル空間では、ブラとケットの関係は上の説明のように自明である。一筋ならではいかないのは、ベクトル空間としてその要素が関数 f（つまり関数空間）であるときであるが、ここでは細かい議論は気にしないでおこう。

内積が定義されたベクトル空間を**内積空間** (inner product space) または**前 Hilbert 空間** (pre Hilbert space) という。

定義 1.3 (ノルム) 内積空間 V において $v \in V$ の**ノルム** (norm) を次で定義する

$$\|v\| = \sqrt{\langle v \,|\, v\rangle} \tag{1.7}$$

このようにノルムが内積から誘導されている場合には、ケット $|\cdot\rangle$ 内は、それが関数であるときには 2 乗可積分関数（L^2 関数)、数列であるときには 2 乗総和可能列（ℓ^2 列）であると考える。このために、このような関数（列）のノルムを $\|\cdot\|_2$ と記すことがある。

注意 1.4 ここでは都合上、内積からノルムを定義したが、実は先にノルムが与えられていれば、内積を次のようにして定めることもできる。

定理 1.5 $x, y \in V$（複素空間）としたとき、そのノルムから V の内積は次で定まる（左辺を右辺で定義する)。

$$\langle x \,|\, y\rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 + \frac{i}{4}\|x+iy\|^2 - \frac{i}{4}\|x-iy\|$$

注意 1.6 内積の正値性より、$||v-w||=0$ は直ちに $v=w$ を意味するだろうか (v,w が関数であるときに、各点で $v(x)=w(x)$ かという問題)。また、ある無限列 $\{v_k\}$ と v について

$$\text{もし } \lim_{k\to\infty}||v_k-v||=0 \text{ なら } \lim_{k\to\infty} v_k \overset{?}{=} v.$$

といった収束性についても議論する必要がある。

演習 1.7 Mathematica を使って、等しい長さのベクトルの内積 $\langle \boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}\rangle$ を計算して、内積の性質を検討してみなさい。たとえば、$\boldsymbol{x}=(1+i2,2+i4,3+i6)^t$, $\boldsymbol{y}=(8+i4,6+i3,4+i2)^t$ とする。

ヒント：

```
x = Table[i + I 2 i, {i, 1, 3}]
y = Table[2 i + I  i, {i, 4, 2, -1}]
x.y
    80 I
y.x
    80 I
Conjugate[x].y
    64 - 48 I
x.Conjugate[y]
    64 + 48 I
```

数学では列ベクトルを $\boldsymbol{x}$ としたとき、その行ベクトルを $\boldsymbol{x}^t$ で与えて区別するが、Mathematica ではそれらの区別はなく、それゆえに `Transpose[ ]` や `ConjugateTranspose[ ]` を適切に使うことが必要である。上の場合、`x.y` でも `y.x` でも同じ値が返っており、複素ベクトルでは内積の共役対称性を満たさない。定義 1.1 にしたがうと、複素ベクトルの場合には $\langle x\,|\,y\rangle$ を `Conjugate[x].y` とするのが Mathematica での正しい内積の計算法であることがわかる。

1.2　L^2 と ℓ^2 空間

ノルムは 2 点間を測る「距離」の一種と考えることができる。Fourier 解析やウェーブレット解析では、与えられた関数に対してある関数列を構成して、その関数列の収束性や近似の度合いを考察の対象とすることが多い。また、関数 f の変数としてしばしば x や t を使うが、ここでは一貫した変数表記は使わない。f を**信号** (signal)

だと見なしたとき、位置 x の信号値 $f(x)$、時刻 t の信号値 $f(t)$ など、その都度、状況に適合する変数を使う。ただし、時刻 t はもっぱら $\mathbb{R}$ 上で考えるが、位置 x をある多次元領域で考えたとき f は多変数関数として取り扱わねばならない。

1.2.1　L^2 空間

区間 $[a,b]$ 上の関数の集合 $\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$ を考えよう。

定義 1.8 区間 $[a,b]$ で 2 乗可積分な関数全体を $L^2[a,b]$ と表す：

$$L^2[a,b]=\left\{\,f:[a,b]\to\mathbb{C}\;\middle|\;\int_a^b|f(x)|^2d\mu(x)\equiv\int_a^b f^*(x)f(x)d\mu(x)<+\infty\right\} \tag{1.8}$$

ここで、測度 $\mu(x)$（積分の重み）は必ずしも $d\mu(x)=dx$ ではなく、

$$d\mu(x)=w(x)\,dx$$

と**重み関数**（weight）または**密度**（density）$w(x)>0$ を持つことがある。

定義 1.13 で関数 f,g の内積を与えるが、L^2 は内積空間でもある。関数値 $f(x)$ の絶対値を**振幅** (amplitude)、$|f(x)|^2$ をエネルギーということがある（節 2.1（37 ページ））。この用語を使うと、$L^2[a,b]$ は区間 $[a,b]$ にわたる全エネルギーが有限な関数の集合だということができる。

注意 1.9 L^2 は（Lebesgue 積分の意味で）不連続関数を含む「大きな」空間である。実際、$L^2[a,b]$ は無限次元空間である。測度 $d\mu(x)=w(x)dx$ を導入すると、多項式や三角関数は有限区間とは異なり、$(-\infty,\infty)$ で二乗可積分とならない。このため、$L^2[-\infty,\infty]$ を考えるためには、無限大で十分早く減少するような関数族を考える必要がある（例 1.16(2),(3)）。

定義 1.10 (関数族の線形独立（1 次独立）) ある定義域上の有限個の関数族 $\{f_i(t)\}_{i=1}^n$ が線形独立とは、定数 $\{c_i\}_{i=1}^n$, $c_i\in\mathbb{C}$ として $\sum_{i=1}^n c_if_i(t)=0$ となるのが $c_1=\ldots=c_n=0$ のときに限るときである。無限個の関数族 $\{f_i(t)\}_{i=1}^\infty$ が線形独立とは、どのような有限関数族をとってもそれが線形独立なときをいう。

定義 1.11 (無限次元) 線形空間において、ある自然数 N に対して、N 個の線形独立な要素は存在するが、$N+1$ 個の要素はいつも線形従属になるとき、その空間の次元

は N 次元である。一方、そのような N が存在せずに、任意の自然数 n に対して、いつも n 個の要素からなる線形独立な組が存在するとき、その空間は**無限次元**という。

例 1.12 線形独立な無限個の単項式が張る空間 $\mathrm{span}\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ は $L^2[0,1]$ に属する多項式の空間で無限次元である。ただし、$1/x \notin L^2[0,1]$ である。$\int_0^1 (1/x)^2 dx = -\left[\frac{1}{x}\right]_0^1 = +\infty$ となって 2 乗可積分ではないためである。

定義 1.13 (L^2 内積) 関数 $f, g \in L^2[a,b]$ に対して、L^2 内積 $\langle f \,|\, g \rangle_{L^2}$ を次で定義する。

$$\langle f \,|\, g \rangle_{L^2} = \int_a^b f(x)^* g(x)\, d\mu(x) \tag{1.9}$$

$$= \int_a^b f(x)^* g(x)\, w(x) dx \tag{1.10}$$

ここで、測度 $\mu(x)$ は重み関数 $w(x) > 0$ によって

$$d\mu(x) = w(x)\, dx$$

と定められている。

注意 1.14 $\langle f \,|\, g \rangle_{L^2}$ は内積の性質 1.2 を満たす。ただし、$0 = \langle f \,|\, f \rangle_{L^2}$ であっても、$^\forall x \in [a,b]$ の各点で $f(x) = 0$ であるとは限らないことに注意しよう。f が連続であれば区間上で恒等的にゼロであるが、測度ゼロの（不連続点の）集合を除いて f はゼロであるとしか言えない。f と g が区間 $[a,b]$ 上で L^2 の意味で等しい $f(x) = g(x)$a.e とは、区間 $[a,b]$ から測度ゼロ集合を除いた集合について $f(x) = g(x)$ であるということである。

注意 1.15 定義 1.13 は、$\mathbb{C}^n$ 内のブラベクトル $|\boldsymbol{x}\rangle = (x_1, \ldots, x_n)^t$ と ケットベクトル $|\boldsymbol{y}\rangle$ との内積定義 1.1 を、関数 f, g に対して自然に拡張したものなっていることに注意しよう。つまり、ベクトルの第 i-成分 x_i と y_i に関する総和 $\sum_i x_i^* y_i$ とは、$|f\rangle, |g\rangle$ の x-成分をそれぞれ $f(x)$ と $g(x)$ として重み付きで総和 $\int_a^b dx f^*(x) g(x) w(x)$ したものになっている。

$$\sum_i \to \int_a^b dx\, w(x).$$

形式的には、関数 f を関数空間のケットベクトル $|f\rangle$ とみて、f の連続的添字 x の成分が $f(x)$ だと考えることに相当する（節 1.3 の冒頭参照）。

例 1.16 内積はさまざまに定義される。代表的な古典的多項式関数とその直交関係（節 1.3.1）をいくつか紹介しておこう。これらの多項式は各定義域上で完全正規直交基底 $\{e_i(x)\}_{i=0,1,\dots}$ を成しており、定義域上にある任意の関数 $f(x)$ を

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i(x)$$

と展開近似する。

(1) 微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_n(x) - 2x\frac{d}{dx}P_n(x) + n(n+1) = 0 \tag{1.11}$$

を満たす区間 $[-1,1]$ 上の多項式 $P_n(x)$ を **Legendre 多項式**という。

$$\begin{aligned}
&P_0(x) = 1, && P_1(x) = x,\\
&P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, && P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x,\\
&P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}, && \dots
\end{aligned}$$

関数 $\{P_n(x)\}$ は、重み関数 $w(x) = 1$ および積分区間 $[-1,1]$ で定義される次の内積で決まる直交性を持つ。

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}. \tag{1.12}$$

(2) 微分方程式

$$x\frac{d^2}{dx^2}L_n(x) - (1-x)\frac{d}{dx}L_n(x) + nL_n(x) = 0 \tag{1.13}$$

を満たす区間 $[0,\infty)$ 上の多項式 $L_n(x)$ を **Laguerre 多項式**という。

$$\begin{aligned}
&L_0(x) = 1, && L_1(x) = -x+1,\\
&L_2(x) = x^2 - 4x + 2, && L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6,\\
&L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24, && \dots
\end{aligned}$$

関数 $\{L_n(x)\}$ は、重み関数 $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$ および積分区間 $[0,\infty]$ で定義される次の内積で決まる直交性を持つ。

$$\int_{0}^{\infty} L_m(x)L_n(x)\,\mathrm{e}^{-x}dx = (n!)^2\delta_{m,n}. \tag{1.14}$$

(3) 微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}H_n(x) - 2x\frac{d}{dx}H_n(x) + 2nH_n(x) = 0 \tag{1.15}$$

を満たす区間 $(-\infty, \infty)$ 上の多項式 $H_n(x)$ を **Hermite 多項式**という。

$$\begin{aligned} &H_0(x) = 1, && H_1(x) = 2x, \\ &H_2(x) = 4x^2 - 2, && H_3(x) = 8x^3 - 12x, \\ &H_4(x) = 16x^4 - 48x + 12, && \dots \end{aligned}$$

関数 $\{H_n(x)\}$ は、重み関数 $w(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ および積分区間 $[-\infty, \infty]$ で定義される次の内積で決まる直交性を持つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}dx = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{m,n}. \tag{1.16}$$

1.2.2　ℓ^2 空間

関数の空間だけでなく、数列においても内積空間を考えることができる。

定義 1.17 (ℓ^2 空間) 無限個の成分を含むベクトルを両側無限離散列とみなして $\boldsymbol{x} = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$ の全エネルギーが有限であるような（2 乗総和可能な）離散列の集合全体を ℓ^2 と定義する：

$$\ell^2 = \left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; \sum_{i=-\infty}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty、x_i \in \mathbb{C} \right\}. \tag{1.17}$$

定義 1.18 (ℓ^2 内積) $\boldsymbol{x} = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots), \boldsymbol{y} = (\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots) \in \ell^2$ について、ℓ^2 内積 $\langle \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y} \rangle_{\ell^2}$ を次で定義する：

$$\langle \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y} \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^* y_n. \tag{1.18}$$

以降、文脈から明らかな場合は内積を $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ のように記して、内積の取り方を省略して表すことがある。

定義 1.19 (Hilbert 空間) 実または複素内積空間で、内積によって誘導されるノルム（$\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle}$）に関して完備距離空間をなすとき Hilbert 空間という。

例 1.20 L^2 空間や ℓ^2 空間は Hilbert 空間である。

1.2.3　内積の不等式

定理 1.21 (Schwartz の不等式) 内積空間 V において、$x, y \in V$ に対して

$$|\langle x, y\rangle| \leqq \|x\| \cdot \|y\|, \tag{1.19}$$

ここで、等号は x と y が線形従属のときに成立し、そのときは $|\langle x \,|\, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ である。

証明　$\langle x \,|\, y\rangle = |\langle x \,|\, y\rangle| \mathrm{e}^{i\phi}$ とする。

$$\begin{aligned}
0 &\leqq \|\mathrm{e}^{-i\phi}x - ty\|^2 = \left\langle \mathrm{e}^{-i\phi}x - ty \,\middle|\, \mathrm{e}^{-\imath\phi}x - ty \right\rangle \\
&= \|x\|^2 - t\left(\left\langle \mathrm{e}^{-i\phi}x \,\middle|\, y\right\rangle + \left\langle y \,\middle|\, \mathrm{e}^{-i\phi}x\right\rangle\right) + t^2\|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 - t\left(\left\langle \mathrm{e}^{-i\phi}x \,\middle|\, y\right\rangle + \left\langle \mathrm{e}^{-i\phi}x \,\middle|\, y\right\rangle^*\right) + t^2\|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2t\mathrm{Re}\left(\left\langle \mathrm{e}^{-i\phi}x \,\middle|\, y\right\rangle\right) + t^2\|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2t|\langle x \,|\, y\rangle| + t^2\|y\|^2
\end{aligned}$$

上式右辺は t についての非負 2 次方程式であるので、相異なる 2 実根をもたないための判別式条件

$$D = 4|\langle x, y\rangle|^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leqq 0$$

から、結果を得る。 ■

定理 1.22 (三角不等式) 内積空間 V において、$x, y \in V$ に対して

$$\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|, \tag{1.20}$$

ここで、等号は x と y が互いに他の非負倍数、つまり $x = a\,y\,(a > 0)$ のときに成立。

証明　途中で、Schwartz の不等式を使う。

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y \,|\, x+y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\langle x \,|\, y\rangle\right) + \|y\|^2 \\ &\quad \text{Schwartz の不等式より} \\ &\leqq \|x\| + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 \\ &= \left(\|x\| + \|y\|\right)^2\end{aligned}$$

もし $|\langle x \,|\, y\rangle| = \|x\|\cdot\|y\|$ のときは、線形従属である。 ■

1.3　直交系と直交射影

1.3.1　直交系

定義 1.23 空間 V 内の組 $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_N\rangle\}$ があって、任意の $f \in V$ がその線形結合

$$|f\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i\ |v_i\rangle\,.$$

によって一意に表されるとき、$\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_N\rangle\}$ を ベクトル空間V の**基底** (basis) という。このとき、基底の組は**空間 V を張る**といい、$V = \mathrm{span}\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_N\rangle\}$ と表す。

この定義は、基底の数 N は無限個つまり空間 V が無限次元の場合も含んでいる。

定義 1.24 内積空間 V において

(1) $x, y \in V$ が**直交** (orthogonal) しているとは、$\langle x \,|\, y\rangle = 0$ のときである。
(2) V のベクトル集合 $\{e_i\}_{i=1}^{N}$ が**正規直交系** (orthonormal) であるとは、$||e_i|| = 1$ かつ $i \neq j$ について $\langle e_i \,|\, e_j\rangle = 0$ のときである。
(3) V の部分空間 V_1 と V_2 が直交している $V_1 \perp V_2$ とは、各 $x \in V_1$ と $^\forall y \in V_2$ について $\langle x \,|\, y\rangle = 0$ であるときをいう。

注意 1.25 空間 V の基底が与えられていれば、定理 1.54（Gram-Schmidt の直交化法）によって、正規直交基底を構成することができる。基底として正規直交基底を採用すると、次の定理 1.26 のように、何かと都合がよい。

定理 1.26 内積空間 V の部分空間 $V_0 \subseteq V$ の正規直交基底を $\{|e_1^0\rangle, |e_2^0\rangle, \ldots, |e_N^0\rangle\}$ とする。このとき、任意の $|f\rangle \in V_0$ は

$$|f\rangle = \sum_{i=1}^{N} \left\langle e_i^0 \,\middle|\, f \right\rangle |e_i^0\rangle = \sum_{i=1}^{N} |e_i^0\rangle \langle e_i^0 | f\rangle \tag{1.21}$$

と表される。

証明　$\{|e_1^0\rangle, |e_2^0\rangle, \ldots, |e_N^0\rangle\}$ が V_0 の基底であることから、任意の $f \in V_0$ は基底の線形結合によって一意に表される：

$$|f\rangle = \sum_{i=1}^{N} f_i \, |e_i^0\rangle \,. \tag{1.22}$$

係数 f_k を求めるためには、f と e_k の内積をとって基底の直交性を用いればよい。

$$\left\langle e_k^0 \,\middle|\, f \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} f_i \left\langle e_k^0 \,\middle|\, e_i^0 \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} f_i \, \delta_{ik} = f_k.$$

■

例 1.27 $\frac{x}{2} = -y = \frac{z}{3}$ の関係にあるベクトル $(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$ は $(2, -1, 3)^t$ 方向を向き、平面 $\{(x, y, z) \,|\, 2x - y + 3z = 0\}$ に直交している。

例 1.28 $L^2([0, 1])$ の 2 つの関数 f, g

$$f(x) = \begin{cases} \text{非零} & 0 \leqq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{それ以外} \\ \text{非零} & \frac{1}{2} \leqq x < 1 \end{cases}$$

は直交している（$\langle f \,|\, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$）。

例 1.29 次の $\mathbb{R}$ 上で定義される 2 つの関数 ϕ と ψ

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x < 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}, \tag{1.23}$$

$$\psi(x) \begin{cases} 1 & 0 \leqq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leqq x < 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{1.24}$$

は正規直交している（$\|\phi\| = \|\psi\| = 1$ で、$\langle \phi \,|\, \psi\rangle = 0$ である）。ϕ を Haar のスケーリング関数、ψ を Haar のウェーブレット関数という。

演習 1.30 Haar のスケーリング関数 ϕ と Haar のウェーブレット関数 ψ のグラフを描いてみなさい。また 2 つの関数 ϕ, ψ からなる関数系 $\{|\phi\rangle, |\psi\rangle\}$ は正規直交、つまり L^2 内積が $\langle\phi,\phi\rangle_{L^2} = \langle\psi,\psi\rangle_{L^2} = 1$, $\langle\phi,\psi\rangle_{L^2} = 0$ であることを示しなさい。また、この事実を Mathematical で上のプログラムで確かめてみなさい。

ヒント：Mathematical では、ϕ および ψ を次のように定義する。

```
haarScaling[t_] := If[t < 0 || 1 <= t, 0, 1]
haarWavelet[t_] :=
Piecewise[{{1, 0 <= t && t < 1/2}, {-1, 1/2 <= t && t < 1}}, 0]
```

これより、全区間 $[-\infty,\infty]$ にわたる内積は、$\phi(x)$, $\psi(x)$ については $[0,1]$ での積分として次のように計算できる。

```
Integrate[haarScaling[t] haarWavelet[t], {t, 0, 1}]
Integrate[haarScaling[t]^2, {t, 0, 1}]
Integrate[haarWavelet[t]^2, {t, 0, 1}]
```

演習 1.31 区間 $[n, n+1)$ で値 1 それ以外の区間では値 0 をとる $\mathbb{R}$ 上の関数は区間 I の特性関数 χ_I を使って $\chi_{[n,n+1)}(x)$ と表される。これを Haar のスケーリング関数 $\phi(x)$ を使って

$$\chi_{[n,n+1)}(x) = \phi(x-n)$$

と表すことができる。関数系 $\left\{\phi(x-n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{R}$ で正規直交系をなすことを筆算で示しなさい。

いま、関数 $f(x) = \chi_{[1/2,5/2)}(x)$ としたとき、この正規直交系を使って $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_n\phi(x-k)$ のように展開できるかを検討しなさい。任意の関数が正規直交基底を使って展開できる条件とはなんだろうか。

例 1.32 例 1.12 でみた単項式系 $\mathrm{span}\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ を考えよう。区間 $[a,b]$ で連続な関数を求める精度で一様に多項式を使って近似することができる（Weierstrass の近似定理 1.68）。つまり、多項式全体は $[a,b]$ 上の連続関数の空間で稠密である。しかし、これらは互いに直交していない（非負の $i \neq j$ について $\left\langle x^i \,\middle|\, x^j \right\rangle = \int_0^1 x^i \cdot x^j \, dx = \frac{1}{i+j+1}$）。

例 1.33 $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx\right\}_{n=1,2\ldots}$ は区間 $[0,\pi]$ 上で正規直交系であることが確かめられる。この事実から、Weierstrass の近似定理 1.68 を使うと、$[0,\pi]$ で連続な関数 f はこの関数系を基底として展開可能であるを次のようにして示すことができる。任

意の f に対して、

$$v(x) = f(\cos^{-1} x) \quad \text{すなわち } v(\cos x) = f(x)$$

で定義される関数 v は区間 $[-1, 1]$ で連続。したがって、Weierstrass の近似定理より $v(x)$ は x の多項式で必要な精度で一様に近似可能である。このことは $f(x)$ が $\cos x$ の多項式で必要な精度で一様に近似できることを示している。ところで

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\cos nx + \binom{n}{1} \cos(n-2)x + \binom{n}{2} \cos(n-4)x + \dots \right]$$

に注意すれば、$\cos x$ の n 次多項式は $1, \cos s, \dots, \cos ns$ の一次結合で表されることから、主張は証明された。

例 1.34 関数系 $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \right\}_{n=1,2\dots}$ は区間 $[0, \pi]$ 上で正規直交系である。区間 $[0, \pi]$ で連続であって $f(0) = f(\pi) = 0$ の条件を満たす関数 f はこれらの一次結合として必要な精度で一様に近似できることができる。この関数系はすべて $x = 0, \pi$ で 0 となることから、条件 $f(0) = f(\pi) = 0$ を落とすことができず、区間 $[0, \pi]$ 上の任意の連続関数を展開することはできない。

演習 1.35

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x \, dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx = \pi$$

から、2 組 $\left\{ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \right\}$ は $L^2([-\pi, \pi])$ で正規直交系であることが確かめられる。一般に、関数の組

$$\left\{ \frac{\cos n\,x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin n\,x}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1,2,\dots} \tag{1.25}$$

が $L^2([-\pi, \pi])$ の正規直交系であることを示しなさい。

演習 1.36 式 (1.25) の複素数版は簡単に確かめられる。平面波の組

$$\left\{ \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \tag{1.26}$$

が $L^2([-\pi, \pi])$ の正規直交系であることを示しなさい。

演習 1.37 単位円領域 $D = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leqq 1\}$ 上の 2 乗可積分な関数空間

$$L^2(D) = \left\{ f : D \to \mathbb{C} \,|\, \iint_D |f(x,y)|^2 \, dxdy < +\infty \right\}$$

を考える。$L^2(D)$ 上の内積を次で定義する：

$$\langle f \,|\, g \rangle := \iint_D f(x,y)^* g(x,y) \, dxdy.$$

関数族 $\{z_n(x,y) = (x+iy)^n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ が $L^2(D)$ で直交していることを示しなさい（極座標系を使う）。この関数族から正規直交系を構成しなさい。

1.3.2　直交射影

定義 1.38 内積空間 V の有限閉部分空間を V_0 とする。$|f\rangle$ を V の任意の要素としたとき、次の性質を持つ $|f_0\rangle$ を $|f\rangle$ の V_0 への**直交射影**（orthogonal projection）あるいは正射影といい、$\hat{P_{V_0}} |f\rangle$ と記すことにする。

$$|f\rangle \in V \quad \text{かつ} \quad |f\rangle - |f_0\rangle \perp V_0 \tag{1.27}$$

すなわち、$|f_0\rangle = P_{V_0} |f\rangle$ であるとは

$$|f\rangle = |f_0\rangle + |w\rangle \quad (|f_0\rangle \in V_0, \quad |w\rangle \perp V_0) \tag{1.28}$$

が成り立つことである。

$|f\rangle \in V$ と閉部分空間 V_0 が与えられると、射影 $\hat{P_{V_0}} |f\rangle$ は一意に定まる。実際、

$$|f\rangle = |f_{01}\rangle + |w_1\rangle = |f_{02}\rangle + |w_2\rangle \quad |f_{0i}\rangle \in V_0, \quad |w_i\rangle \perp V_0, \quad (i = 1,2)$$

とすれば、$|f_{01} - f_{02}\rangle = |w_2 - w_1\rangle$. この両辺と $\langle f_{01} - f_{02}|$ との内積をとると $||f_{01} - f_{02}||^2 = \langle f_{01} - f_{02} \,|\, w_2 - w_1 \rangle = 0$. したがって、$|f_{01}\rangle = |f_{02}\rangle$ であり $|w_1\rangle = |w_2\rangle$ を得る。

定理 1.39 内積空間 V の有限部分空間 V_0 の正規直交基底を $\{|e_1^0\rangle, \ldots, |e_N^0\rangle\}$ とする。このとき、任意の $|f\rangle \in V$ に対して

$$|f_0\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle e_j^0 \,|\, f \rangle \, |e_j^0\rangle = \sum_{j=1}^{N} |e_j^0\rangle \, \langle e_j^0 | \, f \rangle$$

と置くと、$|f_0\rangle = \hat{P_{V_0}}|f\rangle$ である。ここで、$\hat{P_{V_0}}$ を

$$\hat{P}_0 = \sum_{j=1}^{N} |e_j\rangle\langle e_j| \tag{1.29}$$

とする。

証明　部分空間 V_0 は有限次元であるので閉部分空間である。$|f_0\rangle \in V_0$ は明らか。

$$\begin{aligned}\left\langle f - f_0 \mid e_k^0 \right\rangle &= \left\langle f \mid e_k^0 \right\rangle - \left\langle f_0 \mid e_k^0 \right\rangle = \left\langle f \mid e_k^0 \right\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{N} \langle f|e_j^0\rangle \langle e_j^0 \,\middle|\, e_k^0 \right\rangle \\ &= \left\langle f \mid e_k^0 \right\rangle - \left\langle f \mid e_k^0 \right\rangle = 0 \quad (k = 1, \ldots, N)\end{aligned}$$

よって、$(f - f_0) \perp V_0$. ■.

系 1.40 任意の $\hat{P} = \sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|$ は次の性質をもつ：

$$\hat{P}^2 = \hat{P}.$$

証明

$$\begin{aligned}\hat{P}^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |e_k\rangle\langle e_k|\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|e_k\rangle\langle e_k| \\ &\quad \langle e_i|e_k\rangle = \delta_{ik} \text{ を使って} \\ &= \sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i| = \hat{P}.\end{aligned}$$

■

(1.21) の両辺を眺めると、改めて定理 1.26 は次のように表される（Dirac のブラケット表記で初めて可能となった表式である）。

定理 1.41 空間 V の閉部分空間 V_0 を張る正規直交基底系 $\{|e_j^0\rangle\}_{k=1}^{N}$（$N$ は無限でもよい）について、演算子 $|e_k^0\rangle\langle e_k^0|$ の総和

$$\hat{P}_{V_0} = \sum_{k=1}^{N} |e_k^0\rangle\langle e_k^0| \tag{1.30}$$

は、V から V_0 への**射影作用素** $\hat{P}_{V_0} : V \to V_0$ である。たとえば、V 空間に属する任意のケット $|f\rangle$ の V_0 への直交射影は、$|f\rangle = \hat{P}_{V_0}|f\rangle$ から直ちに

$$|f\rangle = \sum_{k=1}^{N} |e_k^0\rangle \langle e_k^0|f\rangle \tag{1.31}$$

と、係数 $\{\langle e_k^0|f\rangle\}$ を持つ直交基底 $\{|e_k^0\rangle\}$ によって展開されることが自明となる（ケット $|f\rangle$ のベクトル成分 $(\langle e_1^0|f\rangle, \ldots, \langle e_N^0|f\rangle)^t$ を計算することに相当する）。

次の定理は、Hilbert 空間において閉部分空間への直交射影の存在を保証する基本定理である。

定理 1.42 (射影定理) V_0 を Hilbert 空間 V の閉部分空間次元、$|f\rangle$ を V の任意の要素とする。このとき、$|f\rangle$ の V_0 への正射影 $|f_0\rangle = \hat{P}_{V_0}|f\rangle$ が一意に存在し、$|f\rangle$ は

$$|f\rangle = |f_0\rangle + |w\rangle \quad (|f_0\rangle \in V_0, \quad |w\rangle \in V_0^{\perp})$$

の形に一意に表される。

証明

一意性は既に考えたので、$\hat{P}_{V_0}|f\rangle$ の存在を示せばよい。$|f\rangle$ から V_0 への最短距離

$$\delta = \inf_{|g\rangle \in V_0} ||f - g||$$

を考えよう。inf の定義から、V_0 内に

$$f_n \in V_0, \quad ||f - f_n|| \to \delta \quad (n \to \infty)$$

であるような列 $\{|f_n\rangle\}$ が存在する。$\{|f_n\rangle\}$ が収束すれば、その極限 $|f_0\rangle = \lim_{n\to\infty}|f_n\rangle$ が求める $P_{V_0}|f\rangle$ であることを示そう。

$|f_n\rangle \in V_0$ で、V_0 は閉であるから、$\lim_{n\to\infty}|f_n\rangle \in V_0$. このとき、$||f - f_n|| \to ||f - f_0|| = \delta$ であるので

$$||f - f_0|| = \min_{|g\rangle \in V_0} ||f - g||$$

である。ここで、$|w\rangle$ を V_0 の任意の要素、t を実数として、$|f\rangle$ と $|f_0 + tw\rangle \in V_0$ との差のノルムの 2 乗 $\ell(t) = ||f - (f_0 + tw)||$ を考えてみる。

$$\begin{aligned}\ell(t) &= \|f - f_0 - tw\|^2 \\ &= \|f - f_0\|^2 - 2t\mathrm{Re}\,(\langle f - f_0 \,|\, w\rangle) + t^2\|w\|\end{aligned}$$

となり、$|f_0\rangle$ が $|f\rangle$ に最近接であるならば $t=0$ で $\ell(t)$ は最小値となり、$\ell'(0)=0$ より $\mathrm{Re}\,(\langle f-f_0\,|\,w\rangle)$ であることから、

$$\langle f-f_0\,|\,w\rangle = 0 \quad (|w\rangle \in V_0)$$

が導かれ、$|f-f_0\rangle$ は任意の $|w\rangle \in V_0$ に直交していることがわかった。したがって、$|f_0\rangle = P_{V_0}\,|f\rangle$ である。

最後に、$\{|f_n\rangle\}$ の収束性を示すために、$\{|f_n\rangle\}$ が Cauchy 列であることを導こう。中線定理から

$$||(f-f_n)+(f-f_m)||^2 + ||f_m-f_n||^2 = 2||f-f_n||^2 + 2||f-f_m||^2$$

に注意すると

$$4\left\|f-\frac{f_n+f_m}{2}\right\|^2 + ||f_m-f_n||^2 = 2||f-f_n||^2 + 2||f-f_m||^2.$$

$(|f_n\rangle + |f_m\rangle)/2 \in V_0$ から、$\left\|f-\frac{f_n+f_m}{2}\right\|^2 \geqq \delta^2$ を使って

$$||f_m-f_n||^2 \leqq 2||f-f_n||^2 + 2||f-f_m||^2 - 4\delta^2$$

を得る。右辺は $n,m\to\infty$ で $2\delta^2+2\delta^2-4\delta^2=0$ に収束し、$||f_n-f_m||\to 0$ $(n,m\to\infty)$ がわかった。 ■

例 1.43 $L^2([-\pi,\pi])$ において、その部分空間 V_0 が $\left\{e_1^0(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, e_2^0(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{\pi}}\right\}$ で張られているとする。$f(x)=x$ の V_0 への射影 $f_0(x)$ は、定理 1.41 より

$$f_0(x) = \left\langle e_1^0 \,\middle|\, f\right\rangle e_1(x) + \left\langle e_2^0 \,\middle|\, f\right\rangle e_2(x)$$

で与えられる。第 1 項の係数は、区間 $[-\pi,\pi]$ にわたり被積分関数が奇関数であるために直ちに 0。第 2 項の係数は、$\left\langle e_2^0 \,\middle|\, f\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\sin x\,dx = 2\sqrt{\pi}$ より

$$f_0(x) = 2\sin x.$$

ここではあえて関数と内積のブラケット記法を混用した。以下の例でも、自在に関数とブラケット記法を混用してもよい。

演習 1.44 Mathmematica を使って、例 1.43 の結果を確かめなさい。
（ヒント）

```
e1[t_] := Cos[t]/Sqrt[Pi];
e2[t_] := Sin[t]/Sqrt[Pi];
ip[p1_, p2_] := Integrate[p1 p2, {t, -Pi, Pi}] (* 変数 t に関する関数 p1
と p2 の内積 *)
Projection[t, e1[t], ip]
Projection[t, e2[t], ip]
```

例 1.45 (1.23) の Haar スケーリング関数 $\phi(x)$ と (1.24) の Haar ウェーブレット関数 $\psi(x)$ で張られる $L^2[0,1]$ の部分空間を $V_1 = \mathrm{span}\{\phi(x), \psi(x)\}$ とする。関数 $f(x) = t$ とするとき、

$$\langle \phi \,|\, f \rangle = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}, \quad \langle \psi \,|\, f \rangle = \int_0^{1/2} x\,dx - \int_{1/2}^1 x\,dx = -\frac{1}{4}$$

に注意すると、f の V_1 への直行射影 $f_1(x)$ は

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \langle \phi \,|\, f \rangle\, \phi(x) + \langle \psi \,|\, f \rangle\, \psi(x) = \phi(x)/2 - \psi(x)/4 \\ &= \begin{cases} 1/4 & 0 \leqq x < 1/2 \\ 3/4 & 1/2 \leqq x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

で与えられる。

演習 1.46 演習 1.35 から、$V_n = \mathrm{span}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \dfrac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \dfrac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{k=1,\ldots,n}$ は $L^2([-\pi,\pi])$ の部分空間である。関数 $f(x) = x^2$ の $n = 1, 2, 3$ で定まる空間 V_1, V_2 および V_3 への直交射影を計算しなさい。V_∞ を張る基底は、完全正規直交系である。

演習 1.47 Mathematica を使って、例 1.46 の関数 $f(x) = x^2$ を空間 V_1, V_2 および V_3 へ直交射影して得られる関数のグラフを描きなさい。

（ヒント）Mathematica では、演習 1.44 で見たように、内積関数をたとえば `ip` として別に定義しておくと、関数 f の関数 g による射影 $\langle g(t) \,|\, f(t) \rangle\, |g(t)\rangle$ を `Projection[f[t], g[t], ip]` で計算できる（Mathematica ヘルプの `Projection` 参照）。

図 1.1 は、関数 $f(x) = x^2$ を $L^2([-\pi,\pi])$ の部分空間 V_3 へ直交射影して得られる関数 $\pi^2/3 - 4\cos x + \cos 2x - 4/9 \cos 3x$ のグラフである。($[-\pi,\pi]$ の範囲では元の関数 x^2 を近似しているといえないだろうか（V_1, V_2 への射影結果と比較してみよう)。

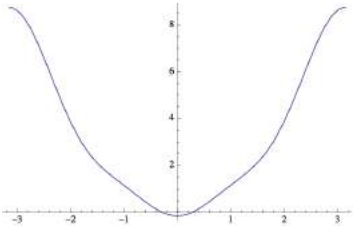


図 1.1　$V_{n=3}$ で張られる部分空間へ関数 $f(x) = x^2$ を直交射影して得られた関数のグラフ。n が大きくなるほど、元の関数 $f(x)$ をよく近似する様子が伺える。

```
base[t_, n_] :=
 Flatten[{1/Sqrt[2 Pi],
   Table[{Cos[k t]/Sqrt[Pi], Sin[k t]/Sqrt[Pi]}, {k, 1, n}]}] (*基 底
関数系*)
ip[p1_, p2_] := Integrate[p1 p2, {t, -Pi, Pi}] (*内積関数*)
f[t_] = t; (* 元の関数 t *)
pf1[t_] =
 Sum[Projection[f[t], base[t, 1][[i]], ip], {i, 1, Length[base[t, 1]]}] (*n=1
の射影関数*)
Plot[pf1[t], {t, -Pi, Pi}] (*射影関数のプロット*)
pf2[t_] =
 Sum[Projection[f[t], base[t, 2][[i]], ip], {i, 1, Length[base[t, 2]]}] (*n=2
の射影関数*)
Plot[pf2[t], {t, -Pi, Pi}] (*射影関数のプロット*)
pf3[t_] =
 Sum[Projection[f[t], base[t, 3][[i]], ip], {i, 1, Length[base[t, 3]]}] (*n=3
の射影関数*)
Plot[pf3[t], {t, -Pi, Pi}] (*射影関数のプロット*)
f2[t_] = t^2; (* 射影される対象関数 t^2 *)
pf23[t_] =
 Sum[Projection[f2[t], base[t, 3][[i]], ip], {i, 1, Length[base[t, 3]]}] (*n=3
の射影関数*)
Plot[pf23[t], {t, -Pi, Pi}]
```

演習 1.48 例 1.29 の Haar のスケーリング関数 $\phi(x)$ と Haar のウェーブレット関数 $\psi(x)$ で次のように張られる $L^2([0,1])$ の部分空間 $\mathrm{span}\,\{\phi(x), \psi(x), \psi(2x), \psi(2x-1), \psi(2x+1)\}$ に対して、関数 $f(x) = x$ を直行射影しなさい。

演習 1.49 Mathematica を使って、例 1.48 で直交射影して得られる関数のグラフを描いてみなさい。

（ヒント）先の例 1.46 の `ip` ように、内積関数 `iph` を別に定義しておく。

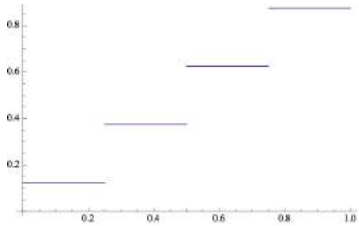


図 1.2　Haar スケーリング関数 $\phi(x)$ と Haar ウェーブレット関数 $\psi(x)$ で張られる部分空間 $\{\phi(x), \psi(x), \psi(2x), \psi(2x-1)\} \in L^2([0,1])$ へ関数 $f(x) = x$ を直交射影して得られた関数のグラフ。関数 x を近似する階段関数になっている。さらに細かく近似するためにどのようにして Haar 基底関数系を選べばよいのだろうか。この解答はウェーブレット理論によって得られる。

```
haarScaling[t_] := If[t < 0 || 1 <= t, 0, 1] (*Haar scaling 関
数*)
(*Haar wavelet*)
haarWavelet[t_] :=
Piecewise[{{1, 0 <= t && t < 1/2}, {-1, 1/2 <= t && t < 1}}, 0]
(*基底関数系*)
hbasis[t_] =
  {haarScaling[t], haarWavelet[t], haarWavelet[2t], haarWavelet[2t-1]}
f[t] = t; (* 射影される対象関数 t *)
iph[p1_, p2_] := Integrate[p1 p2, {t, 0, 1}] (*内積関数*)
(*直交射影した関数*)
hpf[t_] = Sum[Projection[f[t], hbasis[t][[i]], iph], {i, 1, 4}]
Plot[hpf[t], {t, 0, 1}]
```

演習 1.50 演習 1.49 において、射影される対象関数を $f(x) = \sin 2\pi x$ に変更し、`hbasis[t]` の張る空間に正射影した関数のグラフを描きなさい。

さらに、Haar スケーリング関数 $\phi(x)$ と Haar ウェーブレット関数 $\psi(x)$ を使って、Mathematica を使って

```
haarbasis[t_, n_] :=
 Flatten[{haarScaling[t],
   Table[haarWavelet[2^j t - k], {j, 0, n}, {k, 0, 2^j - 1}]}]
```

で得られる関数の組が張る空間 $H_n, (n \geqq 1)$ を考えよう。

$$H_n = \mathrm{span}\left\{\phi(x), \left\{\psi(2^j x - k)\right\}_{j=0,\ldots,n, k=0,\ldots,2^j-1}\right\} \tag{1.32}$$

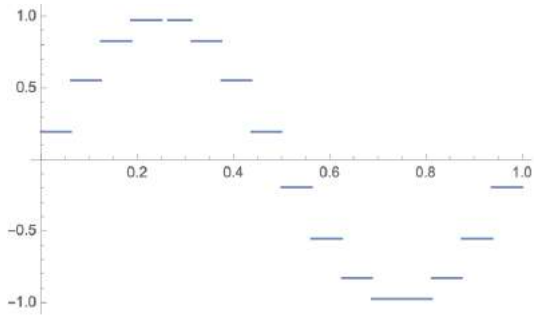


図 1.3　関数 $f(x) = \sin 2\pi x$ を式 (1.32) の Haar 関数系で張られる空間 H_3 に正射影して得られる関数のグラフ。

演習演習 1.49 は、$n = 1$ として

```
f[t_] := Sin[2Pi t];
haarbasis[t, 1];
hpf3[t_] = Sum[Projection[f[t], haarbasis[t, 1][[i]], iph],
    {i, 1, Length[haarbasis[t, 1]]}];
```

のように計算できることに注意しよう。このとき、`haarbasis[t, 3]` によって関数空間 H_3 を張る基底を生成した後に、$f(x) = \sin 2\pi x$ を H_3 へ正射影して得られる関数のグラフが図 1.3 のようになることを確かめなさい。

n を大きくしていくと、$f(x)$ の関数空間 H_n へ正射影して得られる関数は $f(x)$ に近づいていくと予想される。試しに、$n = 4$ としてときの H_4 へ正射影した関数のグラフを描いてみなさい。

1.3.3　直交補空間

定義 1.51 (直行補空間) V_0 を内積空間 V の部分空間とする。V_0 の**直行補空間** (orthogonal complement) $V_0^\perp$ を次で定義する：

$$V_0^\perp = \{|v\rangle \in V \mid {}^\forall |w\rangle \in V_0 \text{ について } \langle w \,|\, v\rangle = 0\}$$

定理 1.52 V_0 を内積空間 V の有限次元部分空間とする。このとき各 $|f\rangle \in V$ は $|f_0\rangle \in V_0$ と $|f_1\rangle \in V_0^\perp$ によって一意に $|f\rangle = |f_0\rangle + |f_1\rangle$ と分解され、V は

$$V = V_0 \oplus V_0^\perp$$

と直和で表される。

証明　$|f\rangle \in V$ として、$|f_0\rangle$ を $|f\rangle$ の V_0 への直交射影とする。$|f_1\rangle = |f - f_0\rangle$ とすると、定理 1.42 より、$|f_1\rangle \perp V_0$ である。$|f\rangle = |f_0 + (f - f_0)\rangle = |f_0 + f_1\rangle$ において、$f_1 \perp V_0$. したがって、$f_1 \in V_0^\perp$. ■

例 1.53 例 1.27 の平面 $V_0 = \{(x, y, z)^t \,|\, 2x - y + 3z = 0\}$ を考える。

$\left\{|e_1\rangle = \frac{1}{21}(1, -4, -2)^t, |e_2\rangle = \frac{1}{6}(2, 1, -1)^t\right\}$ は正規直交系（$\|e_1\| = \|e_2\|$, $\langle e_1 \,|\, e_2\rangle = 0$）で V_0 を張る。

さて、ベクトル $|v\rangle = (x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$ の V_0 への直行射影 $|v_0\rangle$ は

$$\begin{aligned}|v_0\rangle &= \langle e_1 \,|\, v\rangle\, |e_1\rangle + \langle e_2 \,|\, v\rangle\, |e_2\rangle \\ &= \left(\frac{x - 4y - 2z}{21}\right)(1, -4, 2)^t + \left(\frac{2x + y - z}{6}\right)(2, 1, -1)^t.\end{aligned}$$

一方、$|e_3\rangle = \frac{1}{14}(2, -1, 3)^t$ は $\|e_3\| = 1$ かつ $|e_3\rangle \perp V_0^\perp$ であることが確かめられる（$\langle e_3 \,|\, e_1\rangle = \langle e_3 \,|\, e_2\rangle = 0$）。$v_1$ を

$$\begin{aligned}|e_3\rangle &= \langle e_3 \,|\, v\rangle\ |e_3\rangle \\ &= \frac{2x - y + 3z}{14}(2, -1, 3)^t\end{aligned}$$

で定義すると、v_1 は $V_0^\perp$ への直交射影になっている（$\langle v_1 \,|\, e_1\rangle = \langle v_1 \,|\, e_2\rangle = 0$）。

1.3.4　正規直交基底の選出

次の定理 1.54 の正規直交基底の構成法は、ベクトル空間を張る正規直交基底の組としていくらでも（連続無限に）異なる組を選び出せることも意味している（2 次元平面の x-y 軸を原点の回りに任意角度だけ回転した x'-y' 軸を思い浮かべればよい）。

定理 1.54 (Gram-Schmidt の正規直交基底の構成) 内積空間 V の任意の部分空間が N 個の基底 $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_N\rangle\}$ で張られているとする。このとき、V の正規直交基底 $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots\}$ が構成でき、各 $|e_j\rangle$ は基底 $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots\}$ の線形結合として次のように表される。

$$
\begin{aligned}
|e_1\rangle &= |\tilde{e_1}\rangle / \sqrt{\|\tilde{e_1}\|}, \quad |\tilde{e_1}\rangle = |v_1\rangle \\
|e_2\rangle &= |\tilde{e_2}\rangle / \sqrt{\|\tilde{e_2}\|}, \quad |\tilde{e_2}\rangle = |v_2\rangle - \langle e_1 \,|\, v_2\rangle \, |e_1\rangle \\
&\cdots \\
|e_N\rangle &= |\tilde{e_N}\rangle / \sqrt{\|\tilde{e_N}\|}, \quad |\tilde{e_N}\rangle = |v_N\rangle - \sum_{k=1}^{N-1} \langle e_k \,|\, v_N\rangle \, |e_k\rangle \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

証明

■

演習 1.55 例 1.12 および 1.32 で扱った $L^2([0,1])$ 空間の単項式 $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ を Gram-Schmidt の方法を使って区間 $[0,1]$ 上の正規直交基底を構成しなさい。また、Mathematica でその結果を検算しなさい。

（ヒント）Mathematica を使うと、$\{1, x, x^2, x^3\}$ までの $L^2([0,1])$ の単項式系の正規直交化基底は次で得られる。計算結果の検証をしてみなさい。

```
Orthogonalize[{1, t, t^2, t^3}, Integrate[#1 #2, {t, 0, 1}] &]
```

演習 1.56 区間 $[-1,1]$ 上の単項式 $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ を Gram-Schmidt の方法で構成した正規直交基底は $\left\{\sqrt{n+\frac{1}{2}}P_n(x)\right\}_{n=0,1,2,\ldots}$ であることを確かめなさい。ここで、$P_n(x)$ は区間 $[-1,1]$ で定義された Legendre 多項式である（例 1.16(1)）。$P_n(x)$ は Legendre の方程式

$$
(1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dt^2} - 2x\frac{dP_n(x)}{dt} + n(n+1)P_n(x) = 0
$$

の特解である。Legendre 多項式系は区間 $[-1,1]$ 上の完全正規直交系である。

たとえば、$P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$, $P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$ などである。Mathematica を使うと、この結果を検算してみなさい。

（ヒント）

```
Orthogonalize[{1, t, t^2, t^3}, Integrate[#1 #2, {t, -1, 1}] &]
```

演習 1.57 Legendre 多項式 $P_n(x)$ の Rodrigues 公式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

から

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(x-1)^{n-k}(x+1)^k$$

を示しなさい。$x=1$ の $P_n(x)$ の値を求めなさい。また、$\{P_n(x)\}_{n=0,1,2,\ldots}$ の正規直交性を示しなさい。

Mathematica を使って、$P_0(x),P_1(x),\ldots,P_{20}(x)$ の区間 $[0,1]$ 上のグラフを重ねて表示しなさい。

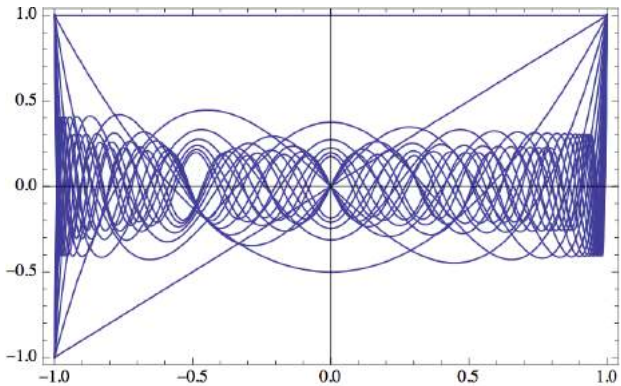


図 1.4　Legendre 関数 $P_n(x)$ の区間 $[-1,1]$ でのグラフ（$n=0,1,2,\ldots,20$）

1.4　基底の完全性（全体性）

繰り返しになるが、もう一度定義として以下を述べておこう。

定義 1.58 内積空間 V の部分空間 $V_0 \subseteq V$ の正規直交基底 $E^0 = \{|e_1^0\rangle, |e_2^0\rangle, \ldots, |e_N^0\rangle\}$ について、ベクトル（関数）$f \in V$ から次で定まる数列 $\{f_n\}_{n=1}^N$

$$f_n = \langle e_n^0 \,|\, f\rangle$$

を f の基底 E^0 による**展開係数**（あるいは Fourier 型展開係数 Fourier-type expanding coefficients）または v の成分という。このとき、f の V_0 への正射影は

$$\sum_{k=1}^{N} \langle e_n^0 \,|\, f\rangle \, |e_k^0\rangle$$

で与えられる。

明らかに

$$\|f - \sum_{k=1}^{N} f_n e_k^0\|^2 = \int \left((x) - f_n e_k^0(x)\right)^2 \, dx \geqq 0$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} 0 \leqq \|f - \sum_{k=1}^{N} f_n e_k^0\|^2 &= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{N} |f_k|^2 - \sum_{i=1}^{N} f_i \, \langle e_i^0 \,|\, f\rangle - \sum_{j=1}^{N} f_j \, \langle f \,|\, e_j^0\rangle \\ &= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{N} |f_k|^2 - 2\sum_{i=1}^{N} |f_i|^2 \end{aligned}$$

である。すなわち、内積空間 V 内の部分空間 $V_0 \subseteq V$ における任意の正規直交基底 E^0 について、$^\forall f \in V$ に対して

$$\sum_{k=1}^{N} |f_k|^2 \leqq \|f\|^2 \tag{1.33}$$

が成立する。この (1.33) を **Bessel の不等式**という。気になるのは、この不等式がどんな条件のもとで $N \to \infty$ のときに等式 $\sum_{k=1}^{N} |f_k|^2 \to \|f\|^2$ となるかである。

定義 1.59 空間 V の任意の**区分的に連続**（piecewise continuous）な関数[*2] $f \in V$ に対して、V の基底 $E = \{|e_n\rangle\}_{n=1,2,\ldots}$ を使って f を展開 $\sum f_n\,|e_n\rangle$ したとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k e_k\|^2 < \varepsilon, \quad f_k = \langle e_k \,|\, f\rangle\,, \qquad n > N$$

であるような N が存在するとき、f は最小二乗の意味（つまり L^2 の平均収束の意味で）でいくらでも良く近似できるといい、そのような V の基底を**完全**（complete）または**全体的**（total）であるという。V の完全性（全体性）は必ずしも基底の直交性を要求していないことに注意する。

この定義から、基底の完全直交性は Bessel の不等式において等式が成り立つ場合となることがわかった。

定理 1.60 (完全性の条件) 空間 V の基底 $E = \{|e_n\rangle\}_{n=1,2,\ldots}$ が完全であるためには、任意の連続関数 $f \in V$ の展開係数 $\{f_n = \langle e_n \,|\, f\rangle\}$ に対して、Bessel の完全性関係

$$\|f\|^2 = \sum_k |f_n|^2$$

が成立すれば十分である。Bessel の完全性関係は、$g \in V$ の展開係数 $\{g_n = \langle e_n \,|\, g\rangle\}$ と併せて、**Parseval の等式**

$$\langle f \,|\, g\rangle = \sum_k f_k^* \, g_k$$

の形にも表される（定理 2.45）。

証明　クーラン=ヒルベルト [5] の第 2 章や、関数解析の書物を参照。 ■

基底の完全性は関数の展開可能性（各点収束） $f = \sum_k f_k e_k$ を意味するわけではなくことに注意する。ここでは平均収束をいうだけである。この方向での議論に興味ある場合には、ヒルベルト空間論を含む関数解析の書物を研究する必要がある。このテ

[*2] ここでは、区分的に連続な関数を、その定義域が有限個の部分領域（1 変数関数の場合には部分区間）に分かれ、その各内部で関数が連続で、各部分領域の内部から境界に近づくときに関数値が定まった有限境界値を持つものとしよう。もっと都合がよいのは、区分的に**滑らか**（piecewise smooth）な関数である。これは、区分的に連続かつ区分的に連続な導関数をもつことである。

キストでは、厳密さは追求せずに、必要に応じて注意する程度にとどめておくことにする。

基底の完全性の議論を深めると、定理 1.41 は次のように書き換えることができる。実をいうと、次の主張は縮退のない離散固有値を持つ線形演算子の固有関数が張る空間の完全性についての議論から得られるものであるが、その前提や厳密さを忘れて部分空間への射影演算子の理解を踏まえれば、形式的にその意味は容易に理解できるはずだ。

定理 1.61 可分な Hilbert 空間 H の完全正規直交基底系 $\{|e_k\rangle\}_{k=1,2,\ldots}$ において、演算子 $|e_k\rangle\langle e_k|$ の総和

$$\hat{I}_H = \sum_k |e_k\rangle\langle e_k| \tag{1.34}$$

は、H 上の恒等作用素である。このとき、H に属する任意のケット $|f\rangle$ は、$|f\rangle = \hat{I}_V|f\rangle$ から直ちに

$$|f\rangle = \sum_k |e_k\rangle\langle e_k|f\rangle$$

と、係数 $\{\langle e_k|f\rangle\}$ を持つ完全正規直交基底 $\{|e_k\rangle\}$ によって展開できる。

1.5　関数の L^2 収束と一様収束

関数列 $\{f_n\}$ の関数 f への収束について考えよう。関数列の収束には、各点収束、一様収束、L^2 収束などの概念がある。

定義 1.62 (各点収束) 関数列 $\{f_n\}$ が関数 f に区間 $[a,b]$ で各点収束 (pointwise convergence) するとは、各 $x \in [a,b]$ について、$\forall\varepsilon > 0$ に対して、ある整数 $N = N(\varepsilon, x)$ が存在して、全ての $n \geqq N$ について

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

が成立するときである。N は ε と x に依存して決まっていることに注意しよう。各 x を固定すると、十分大きな $n \geqq N$ について $f_n(x)$ は $f(x)$ に近くなるのである。

定義 1.63 (一様収束) 関数列 $\{f_n\}$ が関数 f に区間 $[a,b]$ で一様収束 (uniform convergence) するとは、$^\forall\varepsilon > 0$ に対し、どんな $x \in [a,b]$ についてもある整数 $N = N(\varepsilon)$

が存在して、全ての $n \geqq N$ について

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

が成立するときである。N は ε だけに依存して決まることに注意。十分大きな $n \geqq N$ について区間 $[a, b]$ のどこでも $f_n(x)$ は $f(x)$ に近くなるのである。

定義 1.64 (L^2 収束) 関数列 $\{f_n\}$ が関数 f に $L^2[a, b]$ 収束するとは、$^\forall\varepsilon > 0$ に対して、ある整数 $N = N(\varepsilon)$ が存在して、全ての $n \geqq N$ について

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{L^2} < \varepsilon$$

が成立するときである。十分大きな $n \geqq N$ について、区間 $[a, b]$ 内の幾つかの t について $f_n(x)$ と $f(x)$ が遠く離れていてもよいことに注意する。L^2 収束を平均収束 (convergence in mean) ということがある。

注意 1.65 定義から明らかなことであるが

$$\text{一様収束} \quad \underset{\text{ダメ}}{\overset{\text{OK}}{\rightleftarrows}} \quad \text{各点収束}$$

に注意する。

また、各点収束は必ずしも L^2 収束をもたらさない。関数列が、L^2 のある関数で一様に押さえられる（つまり有界な）ときには各点収束は L^2 収束する。

例 1.66 関数列 $\{f_n(x) = x^n\}_{n=1,2,\ldots}$ は $f(x) = 0$ に区間 $[0, 1)$ で各点収束する：

$$0 \leqq {}^\forall x < 1 \text{ について} \quad x^n \longrightarrow 0, \quad (n \to \infty).$$

しかし、$\{x^n\}$ は区間 $[0, 1)$ では一様収束しない。実際、x が 1 に近いと x^n の減少の仕方は遅くなり、たとえば $\varepsilon = 0.001$ としたときに $|x^n| < \varepsilon$ となるには、$x = 0.5$ では $n \geqq 10$、$x = 0.9$ では $n \geqq 66$ であり、ε と x に依存して $N(\varepsilon, x)$ が定まるからである。ただし、ある $r < 1$ を取って区間 $[0, r]$ とすると、$\{x^n\}$ は区間 $[0, r]$ で 0 に一様収束する。実際、$r^N > \varepsilon > 0$ として ε を選んでおけば、$n \geqq N$ について $[0, r]$ 上の全ての点で $|f_n(x)| < \varepsilon$ であるからだ。

一方、$\{x^n\}$ は区間 $[0, 1]$ で L^2 収束する。実際、

$$||f_n||_{L^2}^2 = \int_0^1 (x^n)^2\, dx = \frac{1}{2n+1} \longrightarrow 0, \quad \grave{} \ (n \to \infty).$$

定理 1.67 関数列 $\{f_n\}$ が区間 $[a,b]$ で関数 f に一様収束すれば、$\{f_n\}$ は関数 f に $L^2[a,b]$ 収束する。しかし逆は成立せず、$\{f_n\}$ が関数 f に $L^2[a,b]$ 収束しても一様収束するとは限らない。

証明　一様収束性から、どんな $x \in [a,b]$ についても、$^\forall\varepsilon > 0$ に対して、ある整数 $N = N(\varepsilon)$ が存在して、すべての $n \geqq N$ について $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成立する。

$$||f_n - f||_{L^2}^2 = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\,dx \leqq \int_a^b \varepsilon^2\,dx = \varepsilon^2(b-a)$$

より、$\{f_n\}$ は関数 f に $L^2[a,b]$ 収束することが示せた。

逆が成立しない例として、$[0,1]$ 上の関数列 $\{f_n\}$ を次にように定める。

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leqq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$\{f_n\}$ は $[0,1]$ 上の関数 $f(x) = 0$ に L^2 収束する。実際、

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} dx = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 (n \to \infty).$$

しかし、どんな $x \in [a,b]$ についても、$1 > {}^\forall\varepsilon > 0$ に対しても、すべての $n \geqq N$ について

$$|f_n(x) - 0| < \varepsilon$$

であるように、整数 N をみつけることはできない（すべての n で $|f_n(x) - 0| = 1$ であるため）一様収束しない。 ■

任意の有限区間 $[a,b]$ で定義された関数 $f(x)$ は、変数変換 $\big((x-a)(1-\delta) + (b-x)\delta\big)/(b-a) \to x$ によって $[\delta, 1-\delta] \subset [0,1], \delta < \frac{1}{2}$ 上の関数とできることに注意する。区間 $[0,\delta)$, $(1-\delta,1]$ 上は関数の性質に合わせて任意に調整することによって、f を $[0,1]$ 上の関数とできる。

定理 1.68 [Weierstrass の近似多項式定理]

閉区間 $[0,1]$ 上の有界な連続関数 f は多項式で一様にいくらでも良く近似できる。正確には、次数 $2n, n = 1,2,\ldots$ の多項式

$$p_n(x) = \frac{1}{2I_n}\int_0^1 f(t)\big(1-(t-x)^2\big)^n\,dt, \qquad I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt$$

を定義する。任意の $\varepsilon > 0$ に対し、整数 $n = n(\varepsilon)$ が存在して

$$|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon, \qquad x \in [0,1]$$

となる。

1.6　作用素と随伴作用素

1.6.1　線形作用素

定義 1.69 ベクトル空間 V と W の間の作用素 $T : V \to W$ が**線形** (linear) とは次を満たすときである：

$$T(c_1 \,|v\rangle + c_2 \,|w\rangle) = c_1 T \,|v\rangle + c_2 T \,|w\rangle\,, \qquad |v_i\rangle \in V, \text{および } c_i \in \mathbb{C}.$$

注意 1.70 内積空間 V の部分空間 V_0 でを正規直交基底 $\{e_k\}$ を持つとき、定理 1.42 の直行射影 $P : V \to V_0$ は線形作用素で、$v_1, v_2 \in V$ について $P(a\,v_1 + b\,v_2) = aP(v_1) + bP(v_2)$ である。

定理 1.71 (線形演算子の行列表示) 基底 $\{|v_1\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ を持つ空間 V から基底 $\{|w_1\rangle, \ldots, |w_m\rangle\}$ を持つ空間 W への線形作用素 $T : V \to W$ を考える。$|v\rangle \in V$ の表現 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ および $|w\rangle \in W$ の表現 $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)^t$ に対して、T の作用は、行列 A_T の要素

$$a_{ij} = \langle w_i | T | v_j \rangle$$

を使うと $\boldsymbol{y} = A_T \boldsymbol{x}$ が成立する：

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \ldots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

すなわち、線形作用素 T は

$$T = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \,|w_i\rangle \langle v_j| \tag{1.35}$$

のように表すことができる。行列 $A_T = (a_{ij})$ を基底 $\{|v_j\rangle\}$ および $\{|w_i\rangle\}$ に関する線形作用素 T の**行列表示**という。

証明

$|v\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j\ |v_k\rangle \in V$ に対して T の作用が $|w\rangle = \sum_{k=1}^{m} y_k\ |w_k\rangle \in W$ をもたらすので、

$$\begin{aligned}|w\rangle = \sum_{k=1}^{n} y_k\ |w_k\rangle &= T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\ |v_j\rangle\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j\, T\,|v_j\rangle\,.\end{aligned}$$

両辺をブラ $\langle w_i|$ とでの内積を取ると、$\langle w_i\,|\,w\rangle = y_i$ に注意して

$$\begin{aligned}y_i &= \left\langle w_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} x_j\, T v_j \right\rangle\\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j\end{aligned}$$

を得る。

T の表式は、定理 1.42 から、空間 V 上の恒等作用素 I_W および空間 W 上の恒等作用素 I_W の射影演算子分解を使う。

$$\begin{aligned}T = I_W T I_v &= \sum_{i=1}^{m} |w_i\rangle\,\langle w_i|\, T \sum_{j=1}^{n} |v_j\rangle\,\langle v_j|\\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |w_i\rangle\,\langle w_i|T|v_j\rangle\,\langle v_j|\end{aligned}$$

■

定義 1.72 線形作用素 $T : V \to W$ のノルム $\|T\|$ を

$$\|T\| = \left\{\, \max \|Tv\| \ \middle|\ |v\rangle \in V \text{ かつ、} \|v\| = 1 \,\right\}$$

で定義する。T のノルムが有限のとき、**有界作用素** (bounded operator) という。

注意 1.73 有限次元内積空間におかる全ての線形作用素は有界である。また、任意の内積空間からその部分空間への直交射影も有界線形作用素である。

1.6.2　随伴作用素

定義 1.74 内積空間 V と W 間の有界線形作用素 $T : V \to W$ の**随伴** (adjoint) または**共役**とは

$$\langle w \,|\, Tv \rangle_W = \langle T^\dagger w \,|\, v \rangle_V$$

で定まる線形作用素 $T^\dagger : W \to V$ である。

ブラケット表記はここでも強力なツールで、定義 1.74 で間接的に定義される線形作用素の随伴を直接的に書き出すことができる。

例 1.75 定理 1.71 の後半部の線形作用素の分解で登場していることだが、$|v\rangle \in V$ と $|w\rangle \in W$ から得られる演算子 $|w\rangle\langle u|$ は V から W への線形演算子 $|w\rangle\langle u| : V \to W$ である。この随伴は $(|w\rangle\langle u|)^\dagger = |u\rangle\langle w|$ で、$|u\rangle\langle w| : W \to V$ である。

演習 1.76 $|w\rangle\langle u| : V \to W$ とその随伴 $|u\rangle\langle w| : W \to V$ が線形作用素であることを確かめなさい。

例 1.77 例 1.75 を踏まえると、定理 1.71 の (1.35) から直ちに

$$\begin{aligned} T^\dagger &= \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |w_i\rangle \langle w_i|T|v_j\rangle \langle v_j| \right)^\dagger \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |v_i\rangle \langle w_j|T|v_i\rangle^* \langle w_j| \end{aligned}$$

を得る。この表式は随伴作用素 $T^\dagger$ を行列表示 $A_{T^\dagger}$ を使って直接与えている。この様子を詳しく追いかけてみよう。V および W のそれぞれの基底 $\{|v_i\rangle\}$ および $\{|w_j\rangle\}$ による T の行列表示 $A_T = (a_{ij}) = (\langle w_i|T|v_j\rangle)$ および $|v\rangle \in V$ と $|w\rangle \in W$ の表現 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を使うと

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{y} \,|\, A_T \boldsymbol{x} \rangle_W &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i^* \, a_{ij} x_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^* y_i \right)^* x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ji}^\dagger y_i \right)^* x_j \\ &= \langle A_T^\dagger \boldsymbol{y} \,|\, \boldsymbol{x} \rangle_V \end{aligned}$$

と書き換えることができる。ただし、$a_{ij}^{\dagger} = a_{ji}^{*}$（転置共役）である。したがって、$T$ の随伴 $T^{\dagger}$ に対応する行列表示 $A_{T^{\dagger}}$ は T に対応した行列表示 A_T の転置共役 $A_T^{\dagger}$ であることがわかった。

例 1.78 g を区間 $[a,b]$ 上の有界関数としたとき、線形作用素 $T_g : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ を次のように定義する：

$$T_g\, f(x) = g(x)f(x).$$

このとき、T_g の随伴は

$$T_g^{\dagger}\, h(x) = g(x)^* h(x)$$

で与えられる。このことは、次からわかる：

$$\langle h \,|\, T_g f\rangle_{[a,b]} = \int_a^b h(x)^*\, g(x) f(x)\, dx = \int_a^b (g(x)^* h(x))^*\, f(x)\, dx = \langle g^* h \,|\, f\rangle_{[a,b]} = \langle T_g^{\dagger} h \,|\, f\rangle_{[a,b]}$$

定理 1.79 (合成作用素の随伴) $T_1 : V \to W$ および $T_2 : W \to U$ を内積空間の間の 2 つの有界線形作用素とする。このとき

$$(T_2 \circ T_1)^{\dagger} = T_1^{\dagger} \circ T_2^{\dagger}$$

証明　$v \in V$ と $u \in U$ に対して

$$\langle u \,|\, T_2 \circ T_1 v\rangle_U = \langle T_2^{\dagger} u \,|\, T_1 v\rangle_W = \langle T_1^{\dagger} \circ T_2^{\dagger} u \,|\, v\rangle_V$$

一方、随伴作用素の定義から

$$\langle u \,|\, T_2 \circ T_1 v\rangle_U = \langle (T_2 \circ T_1)^{\dagger} u \,|\, v\rangle_V\,.$$

■

定理 1.80 (直行射影の自己随伴性) 内積空間 V からその部分空間 V_0 への直行射影作用素 P について、

$$P_0^{\dagger} = P_0$$

である。

証明　V_0 の直交基底ケット $\{|e_j^0\rangle\}_{j=1}^N$ を使った (1.29) の直交射影演算子の表現

$$P_0 = \sum_{k=1}^{N} |e_k^0\rangle \langle e_k^0|$$

から、演算子 $|\xi\rangle\langle\eta|$ の随伴性 $(|\xi\rangle\langle\eta|)^* = |\eta\rangle\langle\xi|$ を使えば、$P_0^\dagger = P_0$ は明らかである。[別証明] 多少長くなるが直交射影の性質それ自身から証明することもできる。定理 1.52 より、$v, u \in V$ は $v_0, u_0 \in V_0$ とそれに直交する $v_1, u_1 \in V_0^\perp$ との和 $v = v_0 + v_1$ および $u - u_0 + u_1$ のように直和分解することができる。このとき、$P_0 v = v_0, P_0 u = u_0$ とすると、直交性を使って

$$\langle v \,|\, P_0 u\rangle = \langle v_0 + v_1 \,|\, u_0\rangle = \langle v_0 \,|\, u_0\rangle .$$

一方、

$$\langle P_0 v \,|\, u\rangle = \langle u_0 \,|\, u_0 + u_1\rangle = \langle v_0 \,|\, u_0\rangle .$$

これより、$\langle P_0 v, u\rangle = \langle v, P_0 u\rangle$ となり、$P_0^\dagger = P_0$ を得る。

■

定義 1.81 (Hermite 性) 直交演算子のように、ある線形作用素 H の随伴 $H^\dagger$ が自身に等しいとき $H^\dagger = H$ であるような性質を**自己随伴性** (self-adjoint) または Hermite 的 (hermitian) であるという。

演習 1.82 Hermite 性をもつ線形作用素の固有値は実数であることを示しなさい。

第 2 章

Fourier 級数

2.1　さまざまな用語

三角関数は取り扱いもやさしい初等関数であり、振動現象の記述には欠くことができない。Fourier 解析や信号処理などで使われる用語の多くが力学に由来している。以下、そうした用語をまとめておこう。

直線上に質量 m の質点がバネ定数 k の調和バネにつながれた往復運動を考える (図 2.1)。バネの自然長を原点とする平衡点からの変位を x としたとき、変位に比例した復元力 $F = -kx$ が働き、その運動方程式は次のようになる。

$$m\frac{d^2x}{dx^2} = -kx$$

わかり易さのために、$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ とおいて

$$\frac{d^2x}{dx^2} = -\omega^2 x$$

この方程式にしたがう運動を**調和振動子** (harmonic ocillator) という。

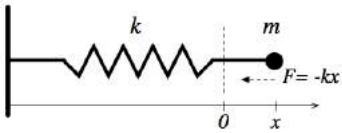


図 2.1　ばね定数 k の調和振動子。質点に平衡点からの変位 x に比例した復元力 $F = -kx$ が働く。

この一般解は

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta) \quad \text{または} \quad x(t) = a\cos(\omega t + \gamma)$$

であることは直ちに確かめられる。A を**振幅** (amplitude)、δ, γ を時刻 $t = 0$ における**位相** (phase) という。1 振動に要する時間 T（単位 [sec]）を**周期** (period) といい、$x(t) = x(t + T)$ を満たす。今の場合、

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

である。単位時間に往復する回数 $\nu = 1/T$（単位 [Hz]）が振動数で、これを**周波数** (frequency) ともいう。基本関係式の中に π が表れてしまうのを防ぐために、角振動数または**角周波数** (angular frequency)

$$\omega = 2\pi\nu$$

を使う場合も多い（単位 [rad/sec]）。

ばね定数 k を持つ位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）$U(x)$ は

$$U(x) = \frac{k}{2}x^2 = \frac{m\omega^2}{2}x^2 = \frac{m}{2}\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta).$$

また、運動エネルギー K は

$$K = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \delta).$$

したがって、力学的全エネルギー E は

$$E = K + U = \frac{m\omega^2}{2}A^2$$

となり、調和振動子の全エネルギー E は時間によらずに一定で、振幅の 2 乗に比例している。後述する関数 $f(t)$ の Fourier 変換 $\hat{f}(\lambda)$ を角周波数 λ を持つ $f(t)$ 成分とみなして、$|\hat{f}(\lambda)|^2$ を**パワースペクトル** (power spectrum、または強度スペクトル) という。振幅の 2 乗をエネルギーとみなすため、こうした用語を使う。。

電磁場や音波などの振動しながら伝搬する波を**進行波** (traveling wave) という。このとき、1 周期に進む距離 λ（単位 [m]）を**波長**（wavelength)、単位時間あたりの伝搬距離を速度 v（単位 [m/sec]）といい

$$v = \lambda \cdot \nu$$

の関係にある。

2.1.1　具体例

図 2.2 のように、両端点を固定した弦の振動を考えよう。単位長さの振動の様子を $\sin \omega t$ で表し、これをハ長調 C 音（ドの音）とする（通常のピアノでは周波数 261.62Hz に調律される）。$\frac{2}{3}$ 単位長の弦の振動数は波長に反比例するので $\frac{3}{2}$ 倍となり、振動の様子は $\sin \frac{3}{2}\omega t$ で表される。これがハ長調音 E（ミの音）である。$\frac{1}{3}$ 単位長の弦の振動数は元の 3 倍となり、振動の様子は $\sin 3\omega t$ で表される。これがハ長調音 G（ソの音）である。したがって、CEG（ドミソ）の音の振動数比は $1 : \frac{3}{2} : 3$ であり、人には心地よく聞こえる**協和音** (consonance) となっている。

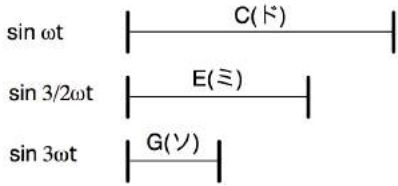


図 2.2　3 つの弦の振動。弦の長さの比は $1 : \frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ となっている。その結果、弦の振動数比は $1 : \frac{3}{2} : 3$ になる。これらの弦を同時に鳴らした音はドミソ協和音となって聞こえる。

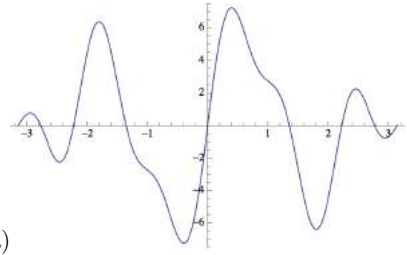
ここで 3 つの正弦関数の和である次の関数 $f_0(t) \in L^2([-\pi, \pi])$ を考えよう。

$$f_0(t) = 3\sin 2t + 4\sin 3t + 2\sin 6t$$

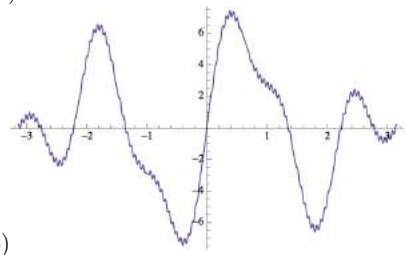
振幅はそれぞれ 3, 4, 2 であるために強度（振幅の 2 乗）は異なるが、振動数比は CEG 協和音と同じ 2 : 3 : 6 となっている。区間 $[-\pi, \pi]$ での f_0 のグラフが図 2.3(a) である。次に関数 f_1 として f_0 に振幅 0.2 の角周波数 100 の余弦波を加えたものを考えよう。図 2.3(b) が f_1 のグラフである。

$$f_1(t) = \sin 2t + 4\sin 3t + 2\sin 6t + 0.2\cos 100t$$

2 つの関数 f_0 と f_1 は有限和の Fourier 級数の形になっている（実際、f_0 と f_1 の Fourie 級数を計算してみよ）。



(a)



(b)

図 2.3　(a) $f_0(t) = 3\sin 2t + 4\sin 3t + 2\sin 6t$ と (b) $f_1(t) = f_0(t) + 0.2\cos 100t$ のグラフ。f_1 は $0.2\cos 100t$ が混入した結果、f_0 を小さい振幅で高周波数で揺らしたものになっていることがわかる。

f_1 から高周波が乗った小さい Fourier 係数 0.1 の項を落とした関数が f_0 であるともいえる。一般に**雑音** (noise) は高い周波数成分をもっている。信号処理の基本は、信号を基本波に分解して不要な成分（不要な基本波の係数）を落とした関数を得ることによって、雑音を除去したり（不可逆）データ圧縮することである。今の場合、f_1 から f_0 を得る過程を、高い周波数を濾し取って低い周波数成分を通過させることに相当して**ローパスフィルタ** (low pass filter) と呼ぶ。

関数 f_1 と f_0 とはどの程度の違いがあるだろうか。次のように、L^2 ノルムで測って相対誤差を具体的に計算することができる。

$$\text{相対誤差} = \frac{\|f_0\|_{L^2}}{\|f_1\|_{L^2}} = 0.999311$$

L^2 ノルムで測ると、ローパスフィルタによって f_1 から Fourier 成分 $0.2\cos 100t$ を取り除いた関数 f_0 は f_1 とほとんど変わらないことがわかる。

演習 2.1 Mathematica を使って、関数 f_0 および f_1 のグラフを描きなさい。また、L^2 ノルムでその相対誤差が上記のようであることを確かめなさい。

（ヒント）たとえば、関数 f_1 のノルムを次のように計算する。

```
nf1=Sqrt[Integrate[(f0[t] + 0.2 Cos[100 t])^2, {t, -Pi, Pi}]]
```

明らかなことだが、周期 T が短くなるほど振動数 v や角振動数 ω は大きくなり、一方で波長は短くなる。ヒトの可聴域は（個人差もあるが）周波数 20Hz から 15KHz 程度（高々 20KHz）とされている。男性よりも女性の方が高音に敏感な傾向があり、加齢により高音から聴きづらくなる。公衆電話回線では 300Hz から 3.4KHz の範囲の音声を伝えることができる（電話の音が聴きづらくなったときは要注意だ）。

人による聴覚実験結果と記録に要するデータ量とを勘案して、CD では理論的には 22,050Hz までの音声が再現可能なように記録されている。音声は聴覚だけでなく肌や骨に対する振動として体感される。聴こえないとされている超高音も音質に影響するとして、通常の CD 以上の高音域までも再生可能な記録方式を利用するハイエンド・オーディオが注目を浴びている。

時間的に連続な信号（アナログ信号という）を時間的に離散なデータとして記録（サンプリングという）する場合、第 3.5 節で紹介する再生される周波数の上限は**標本化定理**によって定まる。実際にはデータのデジタル化には時間サンプリング化ともう一段階、測定値の値に関するデータ量子化の過程が必要である。

2.2 Fourier 級数の基本

2.2.1 Fourier 級数の定義

定義 2.2 (Fourier 係数と Fourier 級数) 区間 $[-\pi, \pi)$ 上の関数 $f(x)$ に対して

$$a_n = a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \tag{2.1}$$

$$b_n = b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \tag{2.2}$$

を第 n 次 Fourier 係数といい（$n \geqq 0$）、形式的級数

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{2.3}$$

を f の Fourier 級数と定義する。明らかに Fourier 級数は周期 2π の周期関数である。

任意の有限区間 $[-a, a)$ 上の関数についても後ほど同様な定義を与える。

Fourier 級数論とは関数 f を三角関数を使った無限級数で近似しようとする試みである。問題となるのは、Fourier 係数の積分の意味や、どのようなときに $S[f]$ が収束して元の関数 $f(t)$ に一致するのかなどである。

Fourier 級数の概念をさらに一般化して考えるのが関数の Fourier 変換で、Fourier 解析の理論の基礎となっている。ここで考える f は Lebesgue 可積分関数を考えるのが本来なのであるが、簡単のために、定義区間 $[a,b]$ 上で高々有限個の不連続点 $a \leqq x_1 < x_2 < \cdots < x_N \leqq b$ を持ち極限

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{x_1-\epsilon}\int_{x_1+\epsilon}^{x_2-\epsilon}\int_{x_2+\epsilon}^{x_3-\epsilon}\cdots\int_{x_N+\epsilon}^{b}|f(x)|dx < +\infty$$

が存在する絶対 Riemann 可積分な関数 f を考察の対象としよう（絶対 Riemann 可積分な関数について成立するようなことは Lebesgue 可積分関数についても成立する）。

実関数であっても、次のように複素形式で Fourier 級数を考える場合が多い。

定義 2.3 (複素形式の Fourier 級数) 区間 $[-\pi,\pi)$ 上の実関数 $f(x)$ に対して, 関数 $f(x)$ の複素形 Fourier 級数を

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \mathrm{e}^{inx}, \tag{2.4}$$

その複素形 Fourier 係数を

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-inx}\,dx \tag{2.5}$$

と定義する。

注意 2.4

$$f_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

とすると、

$$f_{-n}\mathrm{e}^{-inx} + f_n\mathrm{e}^{inx} = a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

であることに注意する。f が実関数のとき a_n, b_n も実であるので、(2.4) は (2.3) に一致する。また、$a_{-n} = a_n, b_{-n} = b_n$ であることから

$$f_n^* = f_{-n} \tag{2.6}$$

の関係にある。

演習 2.5 (2.6) を複素 Fourier 係数の定義から直接示しなさい。

定理 2.6 (Fourier 基底の直交性) 既に演習 1.36 および演習 1.35 で示したことを定理として再掲しよう。

(1) 実 Fourier 基底 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^2([-\pi,\pi])$ の正規直交系である：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\cos mx\,dx = \begin{cases}1 & n=m\neq 0\\ 2 & n=m=0\\ 0 & m\neq n\end{cases},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\sin mx\,dx = \begin{cases}0 & m\neq n\\ 1 & n=m\neq 0\end{cases},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\sin mx\,dx = 0.$$

(2) 複素 Fourier 基底 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2([-\pi,\pi])$ の正規直交系である：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{inx}\mathrm{e}^{-imx} = \delta_{nm}.$$

演習 2.7 この定理 2.6 を証明しなさい。これらの正規直交系は完全である。

一様収束する次の関数

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos nx + \beta_n\sin nx \tag{2.7}$$

を考えてみよう。$f(x)$ と $\cos mx$ との内積をとると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx\\ &= \frac{\alpha_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\cos mx\,dx + \frac{\beta_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\cos mx\,dx\right)\\ &= \alpha_m\end{aligned}$$

同様にして

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\,dx = \beta_m$$

が得られる。したがって、(2.7) の級数は Fourier 級数 (2.3) に一致することがわかる。複素形式の一様収束級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\gamma_n \mathrm{e}^{inx}$ についても同様である。たたし、ここでは、一様収束する級数では積分と総和の順序が入れ替え可能であることを使った。一般の場合について、こうして定義される級数の収束性およびそれが f に一致するかどうかは Fourier 級数論の中心課題である。

注意 2.8 定理 1.41 や定理 1.61 の言葉をつかえば、関数 f の Fourier 係数は f の Fouerie 基底への直交射影（Fouerie 基底との L^2 内積）として求められるということである。

2.3　Dirac 記法再訪

節 1.1.1 で導入した Dirac のブラケット記法を採用する意義を確認しておこう．正規直交基底の選出（節 1.3.4）でみたように、ベクトル空間 V の正規直交基底の選び方にはいくらでも異なるものがとれるが、基底の「総数」はベクトル空間の次元に等しくなっていることに注意しておく。

ある基底の組が選ばれているとすれば、基底を区別する添字（有限次元空間の場合は $1, 2, \ldots, n$）だけで基底は区別できる。このとき、基底の組 $\{|j\rangle\}_{j=1,\ldots,n}$ が正規直交

$$\langle k|j\rangle = \delta_{k,j}$$

し、これらの基底がベクトル空間 V を張っている。このときと定理 1.61 が成り立ち、式 (1.34) は今の場合は V 上の恒等演算子 $\hat{I}_V$ として

$$\hat{I}_V = \sum_{j=1}^{n} |j\rangle\langle j| \tag{2.8}$$

のように書けるのだった。

形式的に V 内の任意の $|f\rangle$ に I_V を左から作用させてみる。すると

$$|f\rangle = \hat{I}_V |f\rangle = \sum_{j=1}^{n} |j\rangle\langle j|f\rangle \tag{2.9}$$

が得られる。V 内の全ての $|f\rangle$ は n 個の正規直交基底 $|f\rangle$ で展開され、その展開係数 $\langle j|f\rangle$ は $|f\rangle$ と基底 $|j\rangle$ との内積で与えられることを表している。

2.3.1 可算個の基底 $|n\rangle$ による恒等演算子

定理 1.61 は、このストーリーが関数空間のような完備な無限次元空間についても成立していることを言っている。区間 $[-\pi\,\pi]$ 上の関数空間の基底関数として、演習 1.35（定理 2.6）で示した Fourier 基底 $\dfrac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ を使うことにする。このとき、直ちに内積の直交性

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\mathrm{e}^{imx}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{*}\frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{2\pi}}dx=\delta_{m,n}$$

が確認できる。

これを Dirac 記法として次のように書くことを認めてみよう（この形式的説明では**要請**と考えてもよい)。

$$\text{ケット } |n\rangle \text{ の位置表示} \qquad \langle x|n\rangle=\frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \tag{2.10}$$

位置ケット $|x\rangle$ とは、位置演算子 $\hat{x}$ に対して連続固有値 x をとる $\hat{x}\,|x\rangle=x\,|x\rangle$ の関係をみたすケットである。内積共役性の式 (1.3) より、

$$\langle m|x\rangle=\langle x|m\rangle^{*} \tag{2.11}$$

であることに注意すると

$$\int_{-\pi}^{\pi}\langle m|x\rangle\,\langle x|n\rangle\;dx=\delta_{m,n}=\langle m|n\rangle \tag{2.12}$$

となる。

Fourier 基底を使って式 (2.8) と同様にして、可算個のケット $|n\rangle$ を使って区間 $[-\pi,\pi]$ 上の**完備な無限次元関数空間上の恒等演算子** $\hat{I}$ は次のように書ける。

$$\hat{I}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n\rangle\,\langle n| \tag{2.8$'$}$$

したがって、式 (2.9) に対応して

$$|f\rangle=\hat{I}\,|f\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|j\rangle\,\langle j|f\rangle \tag{2.9$'$}$$

と書くことができ、さらに式 (2.10) の書き方に注意すると、次の式が得られる。

$$\langle x|f\rangle = \langle x|\hat{I}|f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle x|n\rangle \langle n|f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \langle n|f\rangle \tag{2.13}$$

これは、式 (2.4) からわかるように、$\langle n|f\rangle = f_n$ とした Fourier 級数になっている。Fourier 係数 $f_n = \langle n|f\rangle$ は Dirac 記法の内積として次の関係として書けていることに注意しよう。

$$f_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} \langle x|f\rangle\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \langle n|x\rangle \langle x|f\rangle\ dx = \langle n|f\rangle \tag{2.14}$$

2.3.2　連続濃度の位置ケット基底 $|x\rangle$ による恒等演算子

係数 $\langle n|f\rangle$ の式 (2.14) および $\langle m|n\rangle$ の式 (2.12) には重大な意味を見いだすことができる。区間 $[-\pi, \pi]$ 上の任意のケット $|f\rangle$ に対する恒等演算子 $\hat{I}$ が、連続濃度の固有値を持つ位置ケット $|x\rangle$ を使って

$$\hat{I} = \int_{-\pi}^{\pi} |x\rangle \langle x|\ dx \tag{2.15}$$

と書けるとしてみよう。式 (2.8′) とは異なり、‘総和’ は離散和 $\sum$ ではなく連続的積分になっているとしても、形式的にはケット $|x\rangle$ を基底として扱われることにも注意して欲しい。$|x\rangle$ を基底とするとき、その正規直交性 $\langle x'|x\rangle$ とその役割が何かについては後で議論しよう。

このとき、式 (2.14) の係数 $\langle n|f\rangle$ は次のようにして自然に計算できることになる。

$$\langle n|f\rangle = \langle n|\hat{I}|f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \langle n|x\rangle \langle x|f\rangle\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} \langle x|f\rangle\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} f(x)\, dx \tag{2.16}$$

さて、任意のケット $|y\rangle$ について式 (2.15) の恒等演算子を使った等式 $|y\rangle = \hat{I}\,|y\rangle$ は次のようになる。

$$|y\rangle = \hat{I}\,|y\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} |x\rangle \langle x|y\rangle\ dx \tag{2.17}$$

この式に現れる $\langle y|x\rangle$ はどんな役割があるのだろう。これを検討するには、ケット $|f\rangle$ の y 表示、つまり $\langle y|f\rangle$ を式 (2.15) の恒等演算子を使って計算してみるとよい。

$$|y|f\rangle = \langle y|\,\hat{I}\,|f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \langle y|x\rangle\,\langle x|y\rangle\;dx = \int_{-\pi}^{\pi} \langle y|x\rangle\,f(x)\,dx \tag{2.18}$$

式 (2.17) の $\langle x|y\rangle$ や (2.18) の $\langle y|x\rangle$ は、式 (2.15) の後に注意した基底 $|x\rangle$ の正規直交性にかかわるもので、これを Dirac に倣って $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle \equiv \delta(x-y)$ と書こう。$\delta(x)$ は節**??**で取り上げる **Dirac のデルタ関数**である。式 (2.18) を Dirac のデルタ関数を使ってもう一度書いておこう。積分範囲は区間 $(-\infty,\infty)$ で

$$f(y) = \int \delta(x-y)f(x)\,dx \tag{2.18$'$}$$

Dirac のデルタ関数は関数空間から数（実数または複素数）を与える連続な線形写像、つまり**汎関数**（functional）である。$\delta(x-y)$ は関数 $f(x)$ を値 $f(y)$ に積分を通じて対応させている点を確認しておこう。

Dirac は量子力学の定式化において、連続濃度の固有値を取る位置ケット $|x\rangle$ の正規直交性の問題、つまり位置演算子 $\hat{x}$ の固有値が連続値 x となるような固有ケット $|x\rangle$ が $\hat{x}\,|x\rangle\,x\,|x\rangle$）の正規直交性の問題に直面した。位置演算子について、異なる固有値 $y, x(x \neq y)$ を持つ固有ケット $|y\rangle$ と $|x\rangle$ は直交 $\langle y|x\rangle = 0$ し、しかもノルム $\|x\| = 1$ となるように規格化する必要があった。そこで次の性質を持つ ‘関数’$\delta(x-y) = \langle y|x\rangle = \langle x|y\rangle$ を導入すればよいことに気づいたのである [11]。

$$\delta(x-y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \neq y \\ \infty & \text{if } x = y \end{cases}, \qquad \int \delta(x-y)\,dx = 1$$

ひとたび、$\langle x|y\rangle = \delta(x-y)$ と考えることにすれば、ケット $|f\rangle$ の位置表示 $\langle x|f\rangle$ は式 (2.15) を使って

$$\langle x|f\rangle = \langle x|\hat{I}|f\rangle = \int \langle x|x'\rangle\,\langle x'|f\rangle\;dx = \int \delta(x-x')f(x')\,dx = f(x)$$

となることが確認できる。つまり、関数 $f(x)$ とはケット $|f\rangle$ の位置表示 $\langle x|f\rangle$ であること、もっと正確にいうと、固有値 x を持つ固有ケット $|x\rangle$ によるケット $|f\rangle$ の位置 x での値 $f(x)$ であることがわかる。この意味でケット $|f\rangle$ と関数 $f(x)$ とを混用して使っても構わないということである。以下では、誤解のない限りこれらを適宜混用する。

2.3.3　Dirac の櫛

複素形式の関数 $f(x)$ の Fourier 級数の定義 2.3 は、区間 $[-\pi,\pi]$ 上の完備正規直交関数系 $\{\langle x|n\rangle\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を使って、自然に定義されることが分かった。

関数 $f(x)$ が Fourier 級数で表されるということは次のように導かれる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle x|f\rangle = \langle x|\hat{I}|f\rangle \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle x|n\rangle \langle n|f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \langle n|f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \langle n|\hat{I}|f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \langle n|y\rangle \langle y|f\rangle \; dynonumber \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{2\pi}} f(y) \frac{\mathrm{e}^{-iny}}{\sqrt{2\pi}} \, dy \tag{2.20}$$

ここで総和と積分の順序を交換できる関数であれば、

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{in(x-y)}}{\sqrt{2\pi}} \right) f(y) \, dy \tag{2.21}$$

式 (2.20) は周期 2π を持つ周期関数として、区間 $[-\pi,\pi]$ から全区間に拡大できる。したがって、次が成立している。

$$f(x+2\pi i) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{in(x-y)}}{\sqrt{2\pi}} \right) f(y) \, dy \tag{2.22}$$

この等式は関数 $f(y)$ の $f(x+2\pi i)$ の値を与えていると見なしてデルタ関数に関連付けることができ、次式が成立している。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{in(x-y)}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-y-2\pi k) \tag{2.23}$$

すなわち、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-2\pi k) \tag{2.24}$$

この関係式を **Dirac の櫛**（Dira comb）という。全区間にわたり $2\pi k$ でだけ無限大値をとるようにデルタ関数が並んでいるとみなしている。

2.3.4 区間の拡張

$f(x)$ を周期 $2a$ の関数 $f(x) = f(x+2a)$ とすると、$f(at/\pi) = f(at/\pi + 2a) = f(a(t+2\pi)/\pi)$ に注意すれば、$g(t) = f(at/\pi)$ は t について区間 $[-\pi, \pi)$ 上の周期 2π の関数となる。$g(t)$ の Fourier 級数を

$$S[g] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

とする。ここで $t = \pi x/a$ とおいて、次の定義が得られる。

定義 2.9 (区間 $[-a, a)$ 上の Fourier 級数) $f(x)$ を区間 $[-a, a)$ 上の関数とする。f の Fourier 級数を

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k}{a} x + b_k \sin \frac{\pi k}{a} x, \tag{2.25}$$

その Fourier 係数を

$$a_k = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} f(x) \cos \frac{\pi k}{a} x \, dx, \quad k \geqq 0 \tag{2.26}$$

$$b_k = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} f(x) \sin \frac{\pi k}{a} x \, dx \tag{2.27}$$

で定義する。この Fourier 級数は周期 $2a$ の周期関数である。

(2.25) の複素形を

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{\mathrm{e}^{i\pi n x/a}}{\sqrt{2a}}, \tag{2.28}$$

その複素係数は

$$f_n = \int_{-a}^{a} f(x) \frac{\mathrm{e}^{-i\pi n x/a}}{\sqrt{2a}} \, dx \tag{2.29}$$

で定義する。

次に区間 $[0,a]$ 上で定義されている関数 $f(x)$ を区間 $[-a,a)$ の関数に拡張することを考えてみよう。これには偶拡張 (even extension)f_{ev} と奇拡張 (odd extension)f_{od} の 2 つの方法がある（図 2.4 参照)。

偶拡張　区間 $[0,a]$ 上の関数 $f(x)$ を区間 $[-a,a)$ 上の偶関数 $f_{ev}(x)$ に次のようにして拡張する：

$$f_{ev}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leqq x < a \\ f(-x) & -a \leqq x < 0 \end{cases}$$

奇拡張　区間 $[0,a]$ 上の関数 $f(x)$ を区間 $[-a,a)$ 上の奇関数 $f_{od}(x)$ に次のようにして拡張する：

$$f_{od}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leqq x < a \\ -f(-x) & -a \leqq x < 0 \end{cases}$$

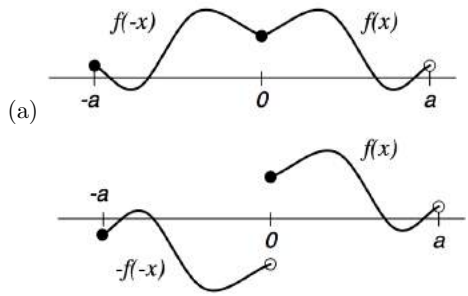


図 2.4　区間 $[0,a)$ 上の関数 $f(x)$ の偶関数拡張 (a) および奇関数拡張 (b)

定理 2.10 区間 $[0,a)$ 上で定義された関数 $f(x)$ が与えられている。

(1) 区間 $[-a,a)$ へ偶拡張した関数 $f_{ev}(x)$ の区間 $[-a,a)$ における Fourier 級数は、次のように定数と余弦関数だけからなる：

$$S[f_{ev}] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{a},$$
$$a_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx, \quad k \geqq 0.$$

(2) 区間 $[-a,a)$ へ奇拡張した関数 $f_{od}(x)$ の区間 $[-a,a)$ における Fourier 級数は、次のように正弦関数だけからなる：

$$S[f_{od}] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{a},$$
$$b_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx$$

演習 2.11 定理 2.10 を示しなさい。

区間 $[a,b)$ で定義された関数はいつでも、$f(b)=f(a)$ であるように $\mathbb{R}$ 上の周期 $b-a$ の周期関数に拡張することができる（図 2.5）。これを関数の**周期拡張** (periodic extension) という。ただし、周期 $b-a$ は周期拡張した関数の最小周期であるとは限らない。

図 2.5 区間 $[a,b)$ 上の関数 $f(x)$ の周期拡張

節 2.6.1 で見るようにように、区間 $[0,a]$ で定義された関数を $[-a,a)$ 上の偶関数拡張または奇関数拡張し、区間 $[-a,a)$ をさらに周期拡張することはいつでも可能だ。

したがって、区間 $[-a,a)$ で定義された任意の関数は、自然に周期 $2a$ を持つ $\mathbb{R}$ 上の周期関数 $f(x)=f(x+2a)$ と見なすことができる。その場合、(2.26) や (2.27) の Fourier 係数をさだめる積分計算においては、つぎの補題のように幅 $2a$ の任意の積分区間で計算できる。

補題 2.12 $F(x)$ が周期 $2a$ をもつ可積な周期関数とする。c を任意の実数について

$$\int_{-a}^{a} F(x)\,dx = \int_{-a+c}^{a+c} F(x)\,dx$$

証明　F が周期 $2a$ であることと変数 x を $x'-2a$ に取り替えると、

$$\int_{-a}^{-a+c} F(x)\,dx = \int_{a}^{a+c} F(x')\,dx'$$

に注意する。

$$\int_{-a+c}^{a+c} F(x)\,dx = \int_{-a}^{a+c} - \int_{-a}^{-a+c} F(x)\,dx = \int_{-a}^{a+c} + \int_{a+c}^{a} F(x)\,dx$$
$$= \int_{-a}^{a} F(x)\,dx$$

■

2.3.5　Fourier 係数の性質

簡単のために関数 f と g は周期 $2a$ の周期関数とする。$f(x)$ や $g(x)$ の Fourier 係数は複素表示で、(2.28) および (2.29) より

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{\mathrm{e}^{i\pi nx/a}}{\sqrt{2a}}, \quad f_n = \int_{-a}^{a} f(x) \frac{\mathrm{e}^{-i\pi nx/a}}{\sqrt{2a}}\,dx$$

などと表される。

定義 2.13 (たたみこみ) 周期 $2a$ の周期関数 f と g の**たたみ込み** (convolution) $f*g$ を

$$(f*g)(x) = \int_{-a}^{a} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{-a}^{a} f(y)g(x-y)\,dy \tag{2.30}$$

で定義する。(因子 $\frac{1}{2a}$ を掛けてたたみ込みとする定義もある。ここでは $\mathbb{R}$ 上の一般の関数に対するたたみ込みに倣って、上の式を採用した。)

定理 2.14 (Fourier 係数の性質) f と g を周期 $2a$ の可積分関数、$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ とするとき、

(i) $(\alpha f + \beta g)_n = \alpha f_n + \beta g_n$,
(ii) $(f*g)_n = 2a f_n \cdot g_n$,
(iii) $|f_n| \le \|f\|_1$,
　　ただし、$\|f\|_1 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} |f(x)|dx$.

証明　(i) は Fourier 係数の定義からあきらか。(ii) を示す。

$$
\begin{aligned}
(f*g)_n &= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}(f*g)(x)\mathrm{e}^{-i\pi nx/a}\,dx \\
&= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\left(\int_{-a}^{a}f(x-y)\mathrm{e}^{-i\pi n(x-y)/a}g(y)\mathrm{e}^{-i\pi ny/a}\,dy\right)dx \\
&= 2a\cdot\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}g(y)\mathrm{e}^{-i\pi ny/a}\,dy\cdot\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(x-y)\mathrm{e}^{-i\pi n(x-y)/a}\,dx = 2ag_n\cdot f_n.
\end{aligned}
$$

(iii) は次から明らか。

$$
|f_n| \leqq \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}|f(x)\mathrm{e}^{-i\pi nx/a}|\,dx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}|f(x)|\,dx.
$$

■

2.4 Dirichlet 核

Fourier 級数の収束性の議論などでしばしば重要な役割を果たす表式 **Dirichlet 核** (Dirichlet kernel) を導入しておこう。

定義 2.15 (Dirichlet 核) 周期 T の Dirichlet 核を

$$
D_N(x,T) = \frac{\sin\left(2N+1)\dfrac{\pi}{T}x\right)}{T\sin\dfrac{\pi}{T}x} \tag{2.31}
$$

で定義し、特に $T=2\pi$ の場合（図 2.6）は

$$
D_N(x) = \frac{\sin\left(N+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\pi\sin\dfrac{x}{2}} \tag{2.32}
$$

と書くことにする。

命題 2.16 (Dirichlet 核の級数表示)

$$
D_N(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos nx\right) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\mathrm{e}^{inx}. \tag{2.33}
$$

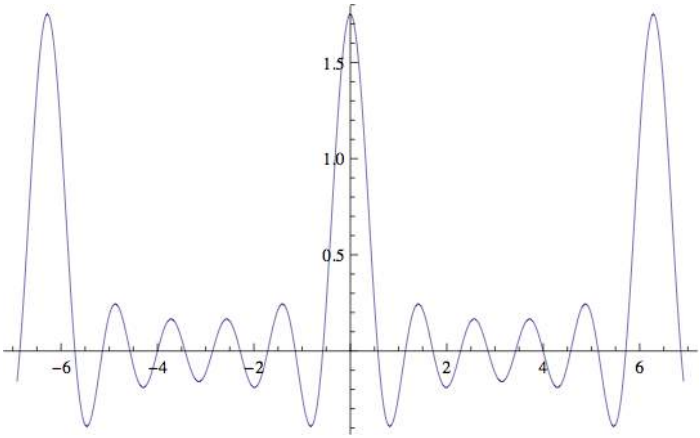


図 2.6　周期 $T = 2\pi$, $N = 5$ の Dirichlet 核 $D_N(x)$ のグラフ

証明　Euler の関係式 $\mathrm{e}^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$ より、右側の等式は次から明らかである。

$$\sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{inx} = 1 + \sum_{n=1}^{N} (\mathrm{e}^{inx} + \mathrm{e}^{-inx}) = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \cos nx$$

さて、$\forall z \in \mathbb{C}$ について

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$$

であることを思いおこそう。これから

$$1 + 2\sum_{n=1}^{N} z^n = \frac{1 + z - 2z^{N+1}}{1 - z}$$

と書ける。$z = \mathrm{e}^{ix}$ とおいて、右辺の分母分子に $\mathrm{e}^{-ix/2}$ をかけると

$$1 + 2\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{inx} = \frac{\cos\frac{x}{2} - \left[\cos\left(N + \frac{1}{2}\right)x + i \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right]}{-i \sin\frac{x}{2}}.$$

両辺の実部をとって結果を得る。 ■

注意 2.17 上の最終式で、両辺の虚部を共役 Dirichlet 核 $\tilde{D}_N(x)$ といい

$$\tilde{D}_N(x) = \frac{\cos\frac{2}{x} - \cos\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} = 2\sum_{n=1}^{N}\sin nx = \sum_{n=-N}^{N} -i\,\mathrm{sign}(n)\mathrm{e}^{inx}$$

である。ここで、$sign(\cdot)$ は $x \in \mathbb{C}$ について

$$\mathrm{sign}(z) = \begin{cases} z/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}.$$

演習 2.18

$$D_N(x,T) = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi n}{T}x} = \frac{1}{T}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{N}\cos\frac{2\pi n}{T}x\right)$$

を示しなさい。

演習 2.19

$$\int_{-T/2}^{T/2} D_N(x,T)\,dx = 1 \tag{2.34}$$

を示しなさい。

2.5　積分正弦関数

Fourier 級数論で Dirichlet 核 $D_N(x)$ と共に基本的役割を果たす関数に、**積分正弦関数** (sine integral) $\mathrm{Si}(x)$ がある。

$$\begin{aligned}\mathrm{Si}(x) &= \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt, \quad 0 \leqq x < \infty \\ &= x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} - \frac{x^7}{35280} + \frac{x^9}{3265920} + \cdots\end{aligned}$$

$\mathrm{Si}(x)$ は、不連続分岐を持たない整関数である（図 2.7）。

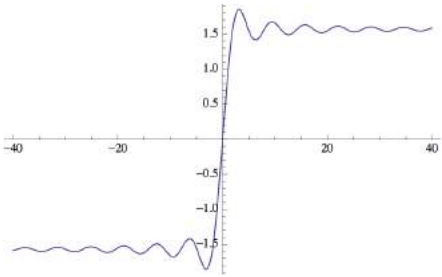


図 2.7　積分正弦関数 $\mathrm{Si}(x)$ のグラフ

演習 2.20 上で与えた $\mathrm{Si}(x)$ のベキ級数展開を $\frac{\sin t}{t}$ の展開を使って自ら計算しなさい。

演習 2.21 Mathematica の組み込み関数 `SinIntegral[ ]` を使って、積分正弦関数のグラフを描きなさい。また、関数 `Series[f[x], {x, a, n}]` は関数 $f(x$ の $x=a$ に関する $(x-a)^n$ 次までのベキ級数を作成する。これを使って積分正弦関数の級数展開をいくつか求めて、先の演習結果と比べてみなさい。

定理 2.22 (積分正弦関数の性質)

(i) $\mathrm{Si}(x)$ は $\pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ で局所極大値、$2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ で局所極小値をとる。
(ii) $\mathrm{Si}(0)=0$.
(iii) 広義積分 $\lim_{x\to\infty}\mathrm{Si}(x)$ を持ち、$\mathrm{Si}(\infty)=\frac{\pi}{2}=1.5708$.
(iv) $0 \leqq x$ について、$\mathrm{Si}(x) \leqq \mathrm{Si}(\pi)=1.85194$

証明　(i) $d\,\mathrm{Si}(x)/dx=\sin x/x=0$ を満たす x を求めることによって明らか。
(ii) 定義から明らか。
(iii) 実際、$0<a<b<+\infty$ に対して

$$\left|\int_a^b \frac{\sin t}{t}\,dt\right| = \left|\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_a^b - \int_a^b \frac{\cos t}{t^2}\right| \leqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\int_a^b \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{2}{a}$$

この不等式の右辺は $a\to\infty$ で 0 となるため、広義積分 $\mathrm{Si}(\infty)$ は Cauchy の収束条件を満たして収束する。ただし、絶対収束はしない。実際、

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t+n\pi}\,dt > \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^\pi \sin t\,dt = \frac{2}{(n+1)\pi} > \frac{2}{\pi}\int_{n+1}^{n+2}\frac{dt}{t}$$

に注意すると、

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt > \frac{2}{\pi}\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \frac{2}{\pi}\log(n+1) \to +\infty, \quad n \to \infty$$

であるので発散し、絶対収束しないことがわかる。

後出の補題 2.28 では漸近評価によって同じ結果を示すことになるが、$d(x) = \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} - \dfrac{2}{x}$（$x = 0$ で $d(0) = 0$ と定義しておく）は区間 $[0, \pi]$ で連続であるので Riemann-Lebesgue の補題 2.32 から

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{2}{t}\right)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt = 0.$$

したがって、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Si}(\infty) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\,dt \\
&\qquad \text{上の Riemann-Lebesgue の補題の結果より} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} D_n(t)\,dt = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

によって目的の結果を得る。$D_n(x)$ は Dirichlet 核で、積分式 (2.34) の結果を使った。

[Si(∞) の値を求める別法] 上記の計算は直感的でなく、面倒に思われるかもしれない。Fourier 変換の理論を使うと「楽に」計算することができる（演習 3.4)。

区間 $[-1, 1]$ 上で 1、それ以外では 0 の関数 $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

で定義する。$f(x)$ は偶関数であることに注意して、f の Fourier 変換 $\widehat{f}(\lambda)$ を計算する。

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\lambda t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\lambda}{\lambda}
\end{aligned}$$

Fourier 逆変換の公式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) \mathrm{e}^{i\lambda x}\, d\lambda$$

を使うと

$$f(0) = 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\lambda}{\lambda}\, d\lambda,$$

すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\lambda}{\lambda}\, d\lambda = 2 \cdot \mathrm{Si}(\infty) = \pi.$$

(iv) $0 \leqq 2k\pi < t < (2k+1)\pi$ に対して $\sin t/t > 0$ および $0 < (2k+1)\pi < t < (2k+2)\pi$ に対して $\sin t/t < 0$ に注意すると、

$$\mathrm{Si}\left((n+1)\pi\right) - \mathrm{Si}(n\pi) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt, \quad n \geq 0$$

は n ごとに符号を変え、$n \to \infty$ でその差は小さくなる（図 2.7)。したがって、性質 (i) とを併せると $0 \leqq x$ について、$\mathrm{Si}(x) \leqq \mathrm{Si}(\pi)$ である。$\mathrm{Si}(\pi)$ の値はベキ級数から計算できる。 ■

2.6　Fourier 級数の計算

Fourier 級数が収束したり元の関数 f に一致するかは主な関心の一つとなるのであるが、ともあれ形式的にせよ Fourier 級数を計算することは重要である。

2.6.1　連続三角波

区間 $[0, \pi)$ 上の三角波関数を次で定義する：

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leqq x < \pi/2 \\ \pi - x & \pi/2 \leqq x < \pi \end{cases} \tag{2.35}$$

この関数を区間 $[-\pi, \pi)$ に偶関数拡張および奇関数拡張して連続関数（ただし、C^1 級ではない）を得る。これを連続三角波とし、その Fourier 級数を求めてみよう。

偶関数拡張 区間 $[-\pi,\pi)$ へ

$$f_{ev}(x)=\begin{cases} f(x) & 0\leqq x<\pi \\ f(-x) & -\pi\leqq x<0 \end{cases}$$

と偶関数拡張する（図 2.8）。

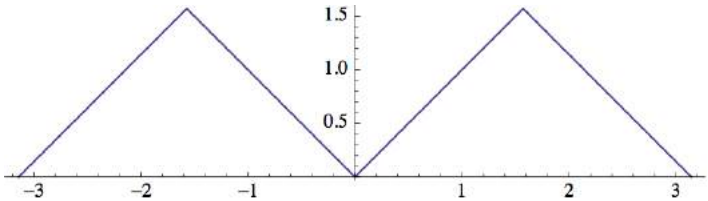


図 2.8 区間 $[0,\pi)$ 上の三角波の $[-\pi,\pi)$ への偶関数拡張

定理 2.10 より、f_{ev} の区間 $[-\pi,\pi)$ における Fourier 級数は余弦関数だけを含み、その Fourier 係数は $f(x)$ を使って次のように計算できる。

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2} \\ a_j &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos jx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos jx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\cos jx\,dx \\ &= \frac{4\cos j\pi/2 - 2\cos j\pi - 2}{\pi j^2}, \qquad j\geqq 1 \end{aligned}$$

この結果から、a_0 以外の Fourier 余弦係数は a_{4k+2} だけが非零となることがわかり

$$a_{4k+2} = -\frac{2}{\pi(2k+1)^2}, \quad k\geqq 0,$$

と表される。したがって、偶関数拡張された連続三角関数の Fourier 級数は次のように表される：

$$S[f_{ev}] = \frac{a_0}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(4k+2)x.$$

偶関数拡張 f_{ev} としたとき、その最初の N 次近似 $S_N(x)$ は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
S_2(x) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2\cos 2x}{\pi} \\
S_6(x) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2\cos 2x}{\pi} - \frac{2\cos 6x}{9\pi} \\
S_{10}(x) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2\cos 2x}{\pi} - \frac{2\cos 6x}{9\pi} - \frac{2\cos 10x}{25\pi} \\
S_{14}(x) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2\cos 2x}{\pi} - \frac{2\cos 6x}{9\pi} - \frac{2\cos 10x}{25\pi} - \frac{2\cos 14x}{49\pi}
\end{aligned}
$$

これらの関数のグラフを区間 $[-\pi, \pi)$ で表示したのが図 2.9 である。

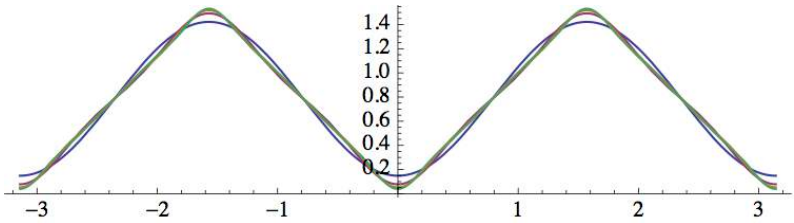


図 2.9　区間 $[0, \pi)$ 上の三角波 $f(x)$ を $[-\pi, \pi]$ 上の偶関数 f_{ev} に拡張し、その第 2,6,10,14 次（$k = 0, 1, 2, 3$）の Fourier 余弦級数 $S_N(x)$ で近似した様子。f_{ev} は区間 $[-\pi, \pi)$ の両側に偶関数として周期 2π で広がっていることに注意。

奇関数拡張　区間 $[-\pi, \pi)$ へ

$$
f_{od}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leqq x < \pi \\ -f(-x) & -\pi \leqq x < 0 \end{cases}
$$

と奇関数拡張する（図 2.10）。

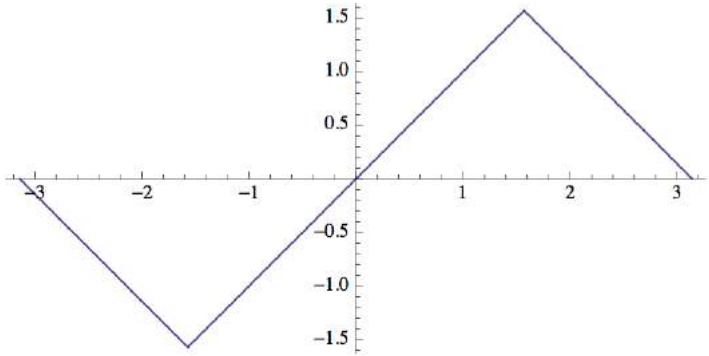


図 2.10　区間 $[0,\pi)$ 上の三角波の $[-\pi,\pi)$ への奇関数拡張

定理 2.10 より、f_{od} の区間 $[-\pi,\pi)$ における Fourier 級数は正弦関数だけを含み、その Fourier 正弦係数は $f(x)$ を使って次のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
b_j &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin j\pi = \frac{4\sin j\pi/2}{\pi j^2} \\
&= \begin{cases} 0 & j = 2m, \\ \dfrac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)^2} & j = 2m+1, \quad m = 0,1,2,\ldots \end{cases}.
\end{aligned}
$$

と表される。したがって、奇関数拡張された連続三角関数の Fourier 級数は次のように表される：

$$
S[f_{od}] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)^2}\sin(2m+1)x.
$$

奇関数拡張 f_{od} としたとき、最初の N 次近似 $S_N(x)$ は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
S_1(x) &= \frac{4\sin x}{\pi}, \\
S_3(x) &= \frac{4\sin x}{\pi} - \frac{4\sin 3x}{9\pi}, \\
S_5(x) &= \frac{4\sin x}{\pi} - \frac{4\sin 3x}{9\pi} + \frac{4\sin 5x}{25\pi}, \\
S_7(x) &= \frac{4\sin x}{\pi} - \frac{4\sin 3x}{9\pi} + \frac{4\sin 5x}{25\pi} - \frac{4\sin 7x}{49\pi}.
\end{aligned}
$$

これらの関数のグラフを区間 $[-\pi,\pi)$ で表示したのが図 2.11 である。

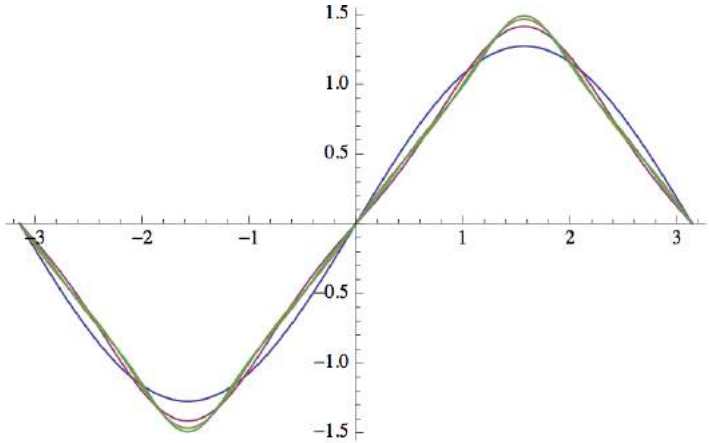


図 2.11　区間 $[0,\pi)$ 上の三角波 $f(x)$ を $[-\pi,\pi]$ 上の奇関数 f_{od} に拡張し、その第 1,3,5,7 次の Fourier 正弦級数 $S_N(x)$ で近似した様子。f_{od} は区間 $[-\pi,\pi)$ の両側に奇関数として周期 2π で広がっていることに注意。

演習 2.23 上記の連続三角波の偶および奇関数拡張の Fourier 級数展開を実際に計算してみなさい。さらに、Mathematica などを使って Fourier 有限和の関数のグラフを描いてみなさい。

（ヒント）区間 $[0,\pi)$ 上の上の連続三角波を

```
f[x_] := Piecewise[{{x, 0 <= x && x <= Pi/2}, {Pi - x, Pi/2 < x <= Pi}}]
```

で表すと、偶関数および奇関数拡張は次のようになる：

```
fe[x_] := Piecewise[{{x+Pi, -Pi <= x && x < -Pi/2},
    {-x, -Pi/2 < x && x < 0}, {x, 0 <= x && x <= Pi/2},
          {Pi-x, Pi/2 < x <= Pi}}]
fo[x_] := Piecewise[{{-x-Pi, -Pi < +x && x < -Pi/2},
    {x, -Pi/2 <= x && x <= Pi/2}, {Pi-x, Pi/2 < x <= Pi}}]
```

n 次 Fourier 余弦級数および n 次 Fourier 正弦級数を与える関数を次のように定義する：

```
fc[x_, n_] := FourierCosSeries[f[x], x, n]
fs[x_, n_] := FourierSinSeries[f[x], x, n]
```

図 2.9 の第 2,6,10,14 次（$k = 0, 1, 2, 3$）の Fourier 余弦級数の区間 $[-\pi, \pi]$ でのグラフはそれぞれの次数の関数を求めてから、まとめて次のように表示した。

```
Plot[{fc2[x], fc6[x], fc10[x], fc14[x]}, {x, -Pi, Pi}]
```

2.7　不連続関数の Fourier 級数

不連続点をもつような関数の Fourier 級数を考えてみよう。

2.7.1　Haar Scaling 関数もどきの Fourier 級数

例 1.48 の Haar scaling 関数は実数上で定義された関数であるが、区間 $[-2, 2)$ 上で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x < 1 \\ 0 & -2 \leqq x < 0, 1 \leqq x < 2 \end{cases}$$

を考えよう。この関数は偶関数でも奇関数でもなく、$x = 1$ で不連続性を持つ。

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} 1\,dt = \frac{1}{2}, \\ a_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(t)\cos\frac{n\pi t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \cos\frac{n\pi t}{2}\,dt = \frac{\sin n\pi/2}{n\pi} \\ &= \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}, \qquad (n = 2k+1). \end{aligned}$$

同様にして、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(t)\sin\frac{n\pi t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \sin\frac{n\pi t}{2}\,dt = \frac{1-\cos n\pi/2}{n\pi} \\ &= \begin{cases} 0 & n = 4k, \\ \frac{1}{(4k+1)\pi} & n = 4k+1, \\ \frac{1}{(2k+1)\pi} & n = 4k+2, \\ \frac{1}{(4k+3)\pi} & n = 4k+3. \end{cases} \end{aligned}$$

したがって、これらの係数を使って

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0} a_n \cos\frac{n\pi x}{2} + b_n \sin\frac{n\pi x}{2}.$$

演習 2.24 上記の Haar scaling 関数もどききを修正して、区間 $[-1,1)$ の関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqq x<1\\ 0 & -1\leqq x<0\end{cases}$$

とした場合、この Fourier 級数を計算しなさい。

2.7.2　矩形波

区間 $[-\pi,\pi)$ で定義される奇関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqq x<\pi\\ -1 & -\pi\leqq x<0\end{cases} \tag{2.36}$$

を周期 2π で周期拡張して**矩形波** (square wave) または方形波という。

奇関数であるので、定理 2.10 より Fourier 正弦級数を持つ。

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt=\frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi}\right)\sin nt\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nt\,dt=\frac{2}{\pi}\frac{1-\cos\pi n}{n}\\&=\begin{cases}0 & n=2k\\ \dfrac{4}{(2k+1)\pi} & n=2k+1\end{cases}.\end{aligned}$$

したがって、

$$S[f]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)x \tag{2.37}$$

となる。11 次の項までの有限和は次のようである。

$$S_{N=11}[f]=\frac{4\sin x}{\pi}+\frac{4\sin 3x}{3\pi}+\frac{4\sin 5x}{5\pi}+\frac{4\sin 7x}{7\pi}+\frac{4\sin 9x}{9\pi}+\frac{4\sin 11x}{11\pi}$$

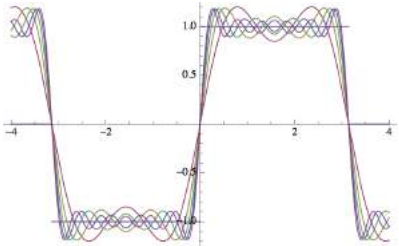
周期拡張した場合、方形波の不連続点 $\ldots,\pi,0,\pi,\ldots$ での Fourier 級数値は明らかに厳密に 0 となるが、この値 0 は

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\left(f(0-\epsilon)+f(0+\epsilon)\right)=\frac{1}{2}\left(f(0+)+f(0-)\right)$$

であることに注意しよう。この事実は、不連続点を持つ関数の各点収束についての示唆を与えている。

さらに、図 2.12(a) は、Fourier 級数の N 次有限和 $S_N(x)$ を $N = 3, 5, 7, 9, 11$ とした関数を重ねたグラフで、N を大きくすると連続区間では部分級数が一様収束しているように観察できる。しかしながら、不連続点近傍では収束は一様でなく、しかも近似次数 N をいくら大きくしても有限和である限り、有意な誤差を生ずる範囲の広がり（ギャップ幅）は狭くなっていくものの、元の関数値 $f(x)$ からの誤差（overshoot という）の大きさは一定値以下にはならないことが観察できる（図 2.12(b) 参照）。この現象を **Gibbs 現象** (Gibbs phenomena) という。

(a)



(b)

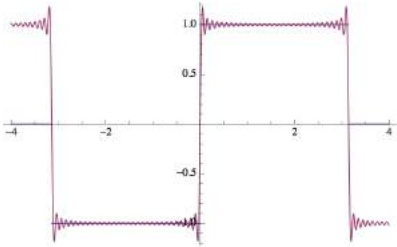


図 2.12　(a) 区間 $[-\pi, \pi)$ で定義された方形波の Fourier 級数の $N = 3, 5, 7, 9, 11$ 次まで有限和関数 $S_N(x)$ の区間 $[-4, 4]$ でのグラフ。 (b) 有限和関数 $S_{61}(x)$ のグラフ。$-\pi$, 0, π での不連続点以外の連続な定数区間は次数 N を大きくすると誤差の広がりは減少して定数 -1 および 1 に収束していくことが期待できる。しかしながら、不連続点の近傍では近似次数 N を上げたとしても有限和である限り、overshoot の大きさは小さくならず、Gibbs 現象が観察される。

演習 2.25 Mathematica をつかって、周期区間 $[-\pi, \pi)$ の矩形波の Fourier 級数の有限和 $S_N(x)$ のグラフを描いてみなさい。また、N を大きくしても overshot がなくならないことを観察してみなさい。

（ヒント）

```
f[x_] := Piecewise[{{-1, -Pi <= x && x < 0}, {1, 0 <= x && x < Pi}}](* 矩
```

```
形波の定義 *)
fs[x_, n_] := FourierSinSeries[f[x], x, n] (* n 次 Fourier Sine
級数を返す関数 *)
f3[x_] = fs[x, 3];
f5[x_] = fs[x, 5];
f7[x_] = fs[x, 7];
f9[x_] = fs[x, 9];
f11[x_] = fs[x, 11];
Plot[{f[x], f3[x], f5[x], f7[x], f9[x], f11[x]}, {x, -4, 4}] (* 近
似部分級数を重ねてプロット *)
```

一般に矩形波を周期区間 $[0, T)$ で

$$f_T(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x < T/2 \\ 0 & T/2 \leqq x < T \end{cases}$$

と定義した場合、その Fourir 係数は次のようになる。

$$\begin{aligned} &a_0 = 1, \\ &a_n = 0, \quad (n \neq 0), \\ &b_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{2}{\pi n}, & n = 2k+1 \end{cases}. \end{aligned}$$

これより、Fourier 級数は

$$S[f_T] = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{2\pi(2k+1)}{T} x$$

となる。

演習 2.26 $f_T(x)$ の Fourier 級数を実際に計算してみなさい。

（ヒント）補題 2.12 に注意して、周期 $2a$ を持つ関数の Fourier 係数の (2.26) と (2.27) を使う（$a = T/2$）。

2.7.3　のこぎり波

区間 $[-\pi, \pi)$ 上の関数

$$f(x) = x, \quad -\pi \leqq x < \pi \tag{2.38}$$

を周期拡張して、$\{\pm(2k+1)\pi\}_{k=0,1,\ldots}$ に不連続点をもつ周期関数を**のこぎり波** (sawtooth wave) といおう。のこぎり波は奇関数であるので Fourier 正弦級数を持つ。

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nt\,dt = \frac{2\cos n\pi}{n} \\
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

これより、Fourier 級数として次を得る（図 2.13)。

$$
S[f] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx
$$

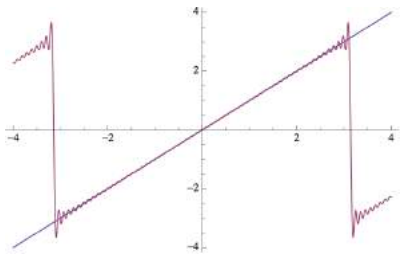


図 2.13　区間 $[-\pi,\pi)$ で定義されたのこぎり波の Fourier 級数の 60 次有限和 $S_{N=60}[f]$ で近似した関数の区間 $[-4,4]$ でのグラフ。図 2.12 と同様に、不連続点 $-\pi,\pi$ の近傍では近似次数に関わらず有限和の範囲では誤差の大きさは小さくならず overshoot を持つ Gibbs 現象が観察される。

演習 2.27 Mathematica をつかって、周期区間 $[-\pi,\pi)$ ののこぎり波の Fourier 級数の有限和 $S_{N=60}[f]$ のグラフ図 2.13 を描いてみなさい。

2.8　Gibbs 現象の解析

次の周期 2π の奇関数に周期拡張できる $[-\pi,\pi)$ 上の原点で不連続な逆のこぎり関数[*1]

$$f(x)=\begin{cases}\pi-x & 0\leqq x<\pi\\ -\pi-x & \pi\leqq x<0\end{cases} \tag{2.40}$$

を考え（図 2.14)、Gibbs 現象を具体的にを評価してみよう。節 2.4 の Dirichlet 核の漸近評価や節 2.5 の積分正弦関数を使う例になっている。

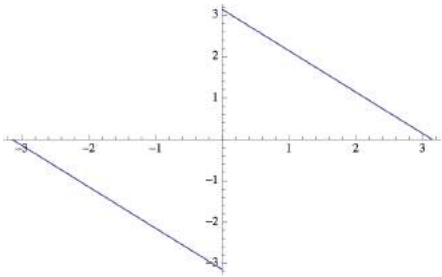


図 2.14　区間 $[-\pi,\pi)$ 上の $x=0$ で不連続点を持つ逆のこぎり関数。奇関数で、$\{2\pi n\}_{n=0,\pm1,\pm2,\dots}$ に不連続点を持つ周期 2π の周期関数逆のこぎり波に拡張できる。

f は奇関数であることから、Fourier 係数は正弦係数 b_k だけを持ち

$$\begin{aligned}b_k&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin kx,\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin kx\,dx\\&=\frac{2}{k}\end{aligned}$$

となる。したがって、f の Fourier 級数はつぎのようになる：

$$S[f]=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$$

[*1] 逆のこぎり波というのは、のこぎり波と原点を通過する傾きが逆であるからという理由に過ぎない。

Dirichlet 核の (2.33) から、N 項までの Fourier 級数の部分和 $S_N(x)$ の微分は

$$S_N'(x) = 2\pi D_N(x) - 1$$

となることに注意すると

$$S_N(x) = \int_0^x (2\pi D_N(t) - 1)\,dt = \int_0^x \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dt - x$$

と表される。

さて、区間 $[0,\pi)$ 上で部分和 $S_N(x)$ と $f(x)$ との差を $g_N(x)$ とすると

$$g_N(x) = S_N(x) - (\pi - x) = 2\pi\int_0^x D_N(t)\,dt - \pi$$

である。$g_N'(x) = 2\pi D_N(x)$ に注意すると、$g_N(x)$ の極値集合 $\{\,\mu_N \mid g_N'(\mu_N) = 0\,\}$ において $x = 0$ の右側にある最初の極値は

$$\mu_N^1 = \frac{\pi}{N+\frac{1}{2}}$$

である。$\lim_{N\to\infty} N\cdot\mu_N^1 = \pi$ であることに注意しておく。

以下では、十分大きな N における $f(x)$ からの overshoot $g_N(x)$ で、特に $x \to 0+$ に向かうときの値、たとえば $g_N(\mu_N^1)$ を求めることを目的としよう。

補題 2.28

$$\int_0^x \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dt = 2\int_0^x \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad N\to\infty.$$

証明　既に、この関係は積分正弦関数の性質を述べた定理 2.22 の証明の中で、Riemann-Lebesgue の補題を使って証明している。$d(x) = \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} - \dfrac{2}{x}$ とおいて ($d(0) = 0$ と定める)、区間 $[0,\pi)$ で $d(x)$ は C^1 級の関数であることから、部分積分を使って、

$$\int_0^x d(x)\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t\,dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad N\to\infty$$

を得る。心配なら、$|x| < \pi$ に対する Bernoulli 数 B_n [*2] を使ったベキ級数展開

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{2n}-2)B_n x^{2n}}{(2n)!},$$

から、形式的に次の級数が得られる：

$$d(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{2n}-2)B_n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}}{(2n)!} = \frac{1}{6}\cdot\frac{x}{2} + \frac{7}{360}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{31}{15120}\left(\frac{x}{2}\right)^5 + \dots$$

これから $d(0) = 0$ であることが確かめられ、部分積分を具体的に実行できる。 ■

したがって、部分和の漸近形は

$$S_N(x) = 2\int_0^x \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt - x + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \to \infty.$$

と書くことができて、次の補題を得る。

補題 2.29 $N \to \infty$ で $S_N(x)$ は区間 $(0, \pi)$ で $f(x)$ に収束する：

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(x), \quad 0 < x < \pi.$$

証明

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} S_N(x) &= \lim_{N\to\infty} 2\int_0^x \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt - x = \lim_{N\to\infty} \frac{N+\frac{1}{2}}{N}\int_0^{(N+\frac{1}{2})x} \frac{\sin t}{t}\,dt - x \\ &= 2\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt - x = 2\cdot \mathrm{Si}(\infty) - x\end{aligned}$$

$\mathrm{Si}(x)$ は節 2.5（55 ページ）で取り上げた積分正弦関数で、$\mathrm{Si}(\infty) = \frac{\pi}{2}$ を使って結果を得る。 ■

[*2] Bernoulli 数 B_n は

$$B_n = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^{2n}} = \frac{(2n)!}{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r^{2n}} = \frac{2(2n)!}{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)^{2n}}$$

で定義される．B_n はすべて正の有理数で、分母は $p-1$ が $2n$ の約数となるような素数 p の積である。$B_1 = 1/6$, $B_2 = 1/30$, $B_3 = 1/42$, $B_4 = 1/30$, $B_5 = 5/66$, $B_6 = 691/2730$, $B_7 = 7/6$, $B_8 = 3617/510$, $B_9 = 43867/798$ などである。

さて、問題としている $x \to 0+$ での $g_N(x)$ の挙動を調べて、overshoot $g_N(x_N)$ の値を求めてみよう。$g_N(x)$ の漸近形

$$g_N(x) = S_N(x) - (\pi - x) = 2\int_0^x \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt - \pi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \to \infty.$$

において、補題 2.28 の議論から次のことが明らかになった：

$$\sup_{0 \leqq x < \pi} g_N(x) = 2 \sup_{0 \leqq t < \infty} \mathrm{Si}(t) - \pi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \to \infty.$$

これより、定理 2.22 の積分正弦関数の性質 (iv) を使って

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0 \leqq x < \pi} g_N(x) = 2 \cdot \mathrm{Si}(\pi) - \pi = 0.562281$$

がわかった。このことは、以下のようにしてさらに精密化できる。

$N \to \infty$ を $N \cdot x_N = \pi$ であるように極限を取ると、次のようにして $x_N \to 0+$ での overshoot $g_N(x_N)$ を求めることができる（図 2.15）。

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\cdot x_N = \pi}} g_N(x) &= 2\int_0^x \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt - \pi \\ &= 2\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt - \pi \\ &= 2 \cdot \mathrm{Si}(\pi) - \pi = 0.562281\end{aligned}$$

したがって、この結果は先に注意したように $x = 0$ の右側にある $g_N(x)$ の最初の極値 μ_N^1（$\lim_{N\to\infty} N \cdot \mu_N^1 = \pi$ を満たしている）における $f(x)$ からの overshoot が最大であることを示している。

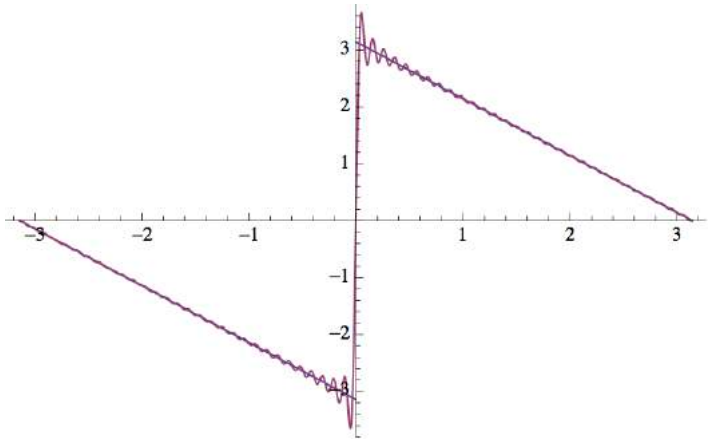


図 2.15　逆のこぎり波の Fourier 級数の有限和 $S_{N=60}[f]$ のグラフ。N をいくら大きくしても有限和 S_N であるかぎり、$x=0$ の近傍で Gibbs 現象が生じている。元の関数値からの揺らぎは $x=0$ の右側（左側）にある最初の局所極大値（極小値）が最大の overshoot であることがわかる。

以上の議論をまとめると次の定理を得る。

定理 2.30 (逆のこぎり波の Gibbs 現象) (2.40) で定義される区間 $[-\pi,\pi)$ 上の逆のこぎり波 f の Fourier 級数の N 次有限和 $S_N(x)$ を考え、元の関数値 $f(x)$ からの overshoot 関数を $g_N(x)=S_N(x)-f(x)$ と定義する。このとき次がなりたつ。

(i) 区間 $(0,\pi)$ で $\lim_{N\to\infty} S_N(x)=f(x)$.

(ii) 有限和 S_N である限り、どんな大きな N であっても overshoot は残る。ただし、overshoot 幅は N が大きくなるほど狭くなる。

(iii) $\overline{\lim}_{N\to\infty} g_N(x)=2\cdot\mathrm{Si}(\pi)-\pi,\quad 0\leqq x<\pi.$

(iv) 不連続点に向かう $x\to 0+$ において overshoot は $\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\cdot x_N=\pi}} g_N(x_N)=2\cdot\mathrm{Si}(\pi)-\pi=0.562281$

演習 2.31 Mathematica で、図 2.15 の Gibbs 現象を呈するグラフを描きなさい。

2.9 Fourier 級数の収束性

2.9.1 Fourier 級数の L^2 収束性

節 2.8 の Gibbs 現象の解析でもみたように、与えられた関数の Fourier 級数の収束については明らかなことではない。しかしながら、次の Riemann–Lebesgue の補題から、区分的に連続な関数 f についてその高次の Fourier 係数は小さくなり、その絶対値において任意の正数より大きい Fourier 係数は有限個だけであることがわかる。

定理 2.32 (Riemann–Lebesgue の補題) 有界区間 $I = [a, b]$ で可積分であるような関数 f について

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x) \cos kx \, dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x) \sin kx \, dx = 0. \tag{2.41}$$

証明　区間 I の任意の細分区間 I_k について $m_k = \inf_{x\in I_k} f(x)$, $M_k = \sup_{x\in I_k} f(x)$ として、区間 I の分割 $\varDelta$ の不足和 $s_\varDelta$ および過剰和 $S_\varDelta$ を次で定義する。

$$s_\varDelta = \sum_{i=1}^m m_i |I_k|, \quad S_\varDelta = \sum_{i=1}^m M_i |I_i|.$$

f が可積分であるので、有界 $|f(x)| \leqq M (x \in I)$. また、任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して、$\varDelta| < \delta$ であるような分割 $\varDelta$ について

$$0 \leqq S_\varDelta - s_\varDelta < \frac{\epsilon}{2}$$

が成立している。このような分割 $\varDelta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ を 1 つ定めて、右辺第 1 式を次のように評価しよう（第 2 式についても全く同様に評価できる）。

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x) \cos kx \, dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_i) \cos kx \, dx \right| + \left| \sum_{i=1}^m f(x_k) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos kx \, dx \right| \\
&\leqq \sum_{i=1}^m (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + M \sum_{i=1}^m \frac{1}{k} |\sin kx_i - \sin kx_{i-1}| \\
&\leqq (S_\varDelta - s_\varDelta) + \frac{2mM}{k} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{2mM}{k}
\end{aligned}$$

が成立。$\varDelta$ を 1 つ定めているので、m は一定。したがって、$k_0 = \lceil \frac{4mM}{\epsilon} \rceil$ とおくと、$k \geqq k_0$ に対して

$$\left| \int_a^b f(x) \cos kx \, dx \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

となり、結果を得る。

直感的な証明として次のようにも考えられる。k が大きくなると $\cos / \sin kx$ は関数 f よりも激しく振動することになり、その隣接周期にわたる積分は x 軸の上下で打ち消し合って小さくなる。微分可能な区分的区間の和として積分を考え、区間 I での f の有界性を考慮すると、$k \to \infty$ で

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \cos kx \, dx &= \left[\frac{\sin kx}{k} f(x) \right]_a^b - \int_a^b \frac{\sin kx}{k} f'(x) \, dx \\ &= \frac{1}{k} \left((f(b) \sin kb - f(a) \sin ka) - \int_a^b f'(x) \sin kx \, dx \right) \to 0. \end{aligned}$$

■

2.9.2　関数の連続点における Fourier 級数の収束性

周期 2π を持つ関数 f の Fourier 級数の部分和 $S_N(x)$

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

を考える。ここで、Fouerier 係数は (2.1) および (2.2) のように、次で定義されている。

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k \geqq 0, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx. \end{aligned}$$

定理 2.33 (連続点における Fourier 級数の収束) 周期 2π を持つ連続関数 f について、導関数が定義される各点 x でその Fourier 級数は $f(x)$ に収束する。

$$f(x) = \frac{a_2}{2} + \lim_{k \to \infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

証明　定理の前提のもとで、$N \to \infty$ としたときの部分和 $S_N(x) \to f(x)$ を示す。Foueir 係数の定義を代入して、次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
S_N(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\cdot\cos kx + \int_{-\pi}^{\pi}\sin kt\,dt\cdot\sin kx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\cos k(t-x)\,dt\right)\\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(t-x)\,dt
\end{aligned}$$

ここで、$D_N(x)$ は (2.32) の Dirichlet 核

$$D_N(x) = \frac{\sin\left(N+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\pi\sin\dfrac{x}{2}}$$

である。結局、変数を取り替えて $u = t - x$ とすれば、部分和 $S_N(x)$ は次のように与えられる。

$$S_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)D_N(t)\,dt. \tag{2.42}$$

さて、(2.34)、つまり

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,dt = 1$$

を使って

$$\begin{aligned}
S_N(x) - f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+t)-f(x)\right)D_N(t)\,dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x)}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t\,dt
\end{aligned}$$

を評価しよう。関数

$$g(t) = \frac{f(x+t)-f(x)}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{f(x+t)-f(x)}{\frac{t}{2}}\,\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

は区間 $[-\pi,\pi]$ で不連続点の候補は $t=0$ だけであり、$t=0$ で連続、$g(0)=2f'(x)$ である（$\lim_{t\to 0} t/\sin t = 1$ を使う）。したがって、Riemann–Lebesgue の補題 2.32 が適用でき、

$$S_N(x)-f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)-f(x))\,D_N(t)\,dt\to 0,\quad N\to\infty.$$

■

2.9.3　関数の不連続点における Fourier 級数の収束性

いままでも記法として使ってきたが、関数の右（左）極限値および右（左）微分を定義しておこう。

定義 2.34 点 x での関数 f の右極限値 $f(x+0)$ および左極限値 $f(x-0)$ を次のように定義する。

$$f(x+0)=\lim_{\substack{h>0\\h\to 0}} f(x+h)$$
$$f(x-0)=\lim_{\substack{h>0\\h\to 0}} f(x-h)$$

さらに、次の右辺の極限値が存在するとき、f が x で右微分可能および左微分可能といい、それを左辺のように表す。

$$f'_+(x)=\lim_{\substack{h>0\\h\to 0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$f'_-(x)=\lim_{\substack{h<0\\h\to 0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

x で微分可能とは $f(x+0)=f(x-)$ のときである。

例 2.35 節 2.7.3 で取り上げたのこぎり波、区間 $[-\pi,\pi)$ で定義された関数 x を周期拡張した $f(x)$ の不連続点 $x=,\dots,\pm\pi,\pm 2\pi,\dots$ において、$f(\pi-0)=\pi, f'_-(\pi)=1$ および $f(\pi+0)=-\pi, f'_+(\pi)=1$. また、節 2.6.1 の区間 $[0,\pi)$ 上の三角波は $x=\frac{\pi}{2}$ で連続であるが微分不可能で、$f'_-(\frac{\pi}{2})=1$ および $f'_+(\frac{\pi}{2})=-1$.

定理 2.36 (不連続点における Fourier 級数の収束) 周期 2π を持つ区分的に連続な関数で、点 x で右および左微分可能であるとき、f の x での Fourier 級数は値 $F(x)$

$$F(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

に収束する。点 x で連続のときには定理 2.33 に一致する。

証明　定理 2.33 の証明と同様に進めるのだが、Dirichlet 核 $D_N(x)$ の積分について

$$\int_0^{\pi} D_N(u)\,du = \int_{-\pi}^{0} D_N(u)\,du = \frac{1}{2}$$

に注意する。

部分和 $S_n(x)$ は (2.42) と表されるのだが、$N \to \infty$ において、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)D_N(t)\,dt \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \quad N \to \infty \tag{2.43}$$

を示そう。(2.43) を示すために、次の 2 式を示せばよい。

$$\int_0^{\pi} f(t+x)D_N(t)\,dt \to \frac{f(x+0)}{2},$$
$$\int_{-\pi}^{0} f(t+x)D_N(t)\,dt \to \frac{f(x-0)}{2}.$$

このことは、定理 2.33 の証明と同じようにして、$N \to \infty$ の極限で

$$\int_0^{\pi} (f(t+x)-f(x+0))D_N(t)\,dt \to 0, \tag{2.44}$$

$$\int_{-\pi}^{0} (f(t+x)-f(x-0))D_N(t)\,dt \to 0 \tag{2.45}$$

を示すことに帰着される。(2.44) は、Dirichlet 核の定義にもどって

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{f(x+u)-f(x+0)}{\sin\frac{u}{2}}\right) \sin\left(N+\frac{1}{2}\right) u\,du \to 0$$

である。この極限は Riemann–Lebesgue の補題 2.32 の適用の妥当性によって示される。積分の括弧内の u は正値であるので、括弧の表式が右連続（$u \to 0+$ で右極限を持つ）であることがわかればよい。仮定から f は右微分可能であることから、先の定理における極限の議論と同じことを繰り替えることができ、0 に収束することが示される。(2.45) についても同様である。したがって、定理が証明された。 ■

例 2.37 節 2.7.3 で取り上げた区間 $[-\pi,\pi)$ 上の関数 $f(x)=x$ を周期拡張して得られる不連続関数（ノコギリ波）f を考える。$f(\pi+0)=-\pi, f(\pi-0)=\pi$ であるので、$S_{N\to\infty}(\pm\pi)=0$ である。

2.9.4　Fourier 級数の一様収束性

Fourier 級数の一様収束性を議論するために、関数の一様収束の定義 1.63 を再度述べておこう。関数列 $\{F_n\}$ が関数 F に区間 $[a,b]$ で一様収束 (uniform convergence) するとは、$^\forall\varepsilon > 0$ に対して、どんな $x \in [a,b]$ についても、ある整数 $N = N(\varepsilon)$ が存在して、全ての $n \geqq N$ について $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ が成立することである。N は ε だけに依存し、x には依存しない。同様にして、$f(x)$ の Fourier 級数が $f(x)$ に一様収束するとは

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

が $N \to \infty$ で $f(x)$ に一様収束することである。

節 2.6.1 でとりあげた連続三角波は一様収束するように観察された。一方、節 2.7.3 のノコギリ波は一様収束しない。不連続点に近づくにつれて、もとの関数値にくなるためには十分大きな部分和を取らねばならなかった（しかも Gibbs 現象を呈した)。

定義 2.38 (区分的に滑らかな関数) 関数が**区分的に滑らか**（piecewise smooth）とは、区分的に連続でその導関数が連続であるときである

注意 2.39 任意の閉有限区間では、区分的に滑らかな関数は有限個の不連続点な角を持つことができ、そこでは左右導関数が存在しても等しい必要はない。そうした点を除けば関数は連続微分可能である。周期 2π を持つノコギリ波はその導関数とも $\pm n\pi, n \in \mathbb{Z}$ で不連続であるが、それ以外での点では連続微分可能であるため、次の定理 2.40 は適用できない。一方、連続三角波は連続かつ区分的に滑らかな関数で、$\pm n\pi/2, n \in \mathbb{Z}$ で角がありそこでの導関数は不連続となる。定理 2.40 が適用される。

定理 2.40 区間 $[-a,a]$ 上の周期 $2a$ を持つ連続で区分的に滑らかな関数 $f(x)$ の Fourier 級数は $f(x)$ に一様収束する。

証明　仮定を単純化して f がどこでも 2 回微分可能として定理を証明する。また、区間 $[-\pi,\pi]$ としても一般性を失わない。

f と f'' の Fourier 級数が

$$f(x) = \sum_n a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$
$$f''(x) = \sum_n a''_n \cos nx + b''_n \sin nx$$

のとき、その Fourier 係数は

$$a_n = -\frac{a''_n}{n^2}, \tag{2.46}$$
$$b_n = -\frac{b''_n}{n^2} \tag{2.47}$$

の関係にあることに注意する。実際、たとえば

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ &= f(x)\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin nx}{n}\,dx \\ &= -\frac{b'_n}{n} \quad (b'_n \text{ は } f' \text{ の Fourier 正弦係数}) \\ &= f'(x)\frac{\cos nx}{n^2\pi}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx\,dx \\ &= -\frac{a''_n}{n^2} \end{aligned}$$

である。f'' が連続であれば、Riemann-Lebesgue の補題 2.32 より、a''_n, b''_n は $n \to \infty$ で 0 に収束する。つまり、$|a''_n|, |b''_n|$ はある M によって上から押さえられている。したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a''_n| + |b''_n|}{n^2} \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M+M}{n^2} = 2M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$$

である（$\int_1^\infty dx/x^2$ が有限であることから $\sum_{n=1}^\infty 1/n^2$ も有界）。しがって、次の補題から、証明を終える。 ■

補題 2.41 関数 $f(x)$ の Fourier 級数

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

において、

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| < +\infty$$

ならば、Fourier 級数は $f(x)$ に一様かつ絶対収束する。

証明

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leqq |a_k| + |b_k|$$

に注意する。よって、f の Fourier 級数の x での収束性は $\sum_k |a_k| + |b_k|$ の収束性によって支配される。$F(x)$ と部分和

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

との差

$$F(x) - S_N(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

はすべての x について

$$|F(x) - S_N(x)| \leqq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| + |b_k|$$

であり、補題の仮定より N を十分に大きく取れば右辺はいくらでも小さくできる。つまり、任意の $\varepsilon > 0$ について、N_0 が存在して、$N > N_0$ について

$$|F(x) - S_N(x)| < \varepsilon, \qquad N > N_0.$$

ここで、N_0 は x によらずに $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ の収束性だけに依存する。したがって、$S_N(x)$ の収束は一様である。これで、定理 2.40 の証明も終わった。 ■

2.9.5 Fourier 級数の L^2 収束性（平均収束性）

f が連続でないときは Fourier 級数が各点収束せず、不連続点では左右の極限値の平均に収束する。Fourier 級数が一様収束しないときでも、L^2 などの弱い意味での収束はあり得る。

補題 2.42 f が $L^2([-\pi,\pi])$ の要素とし、

$$V_N = \mathrm{span}\{1, \cos kx, \sin kx\}_{1 \leqq k \leqq N}$$

とする。f の Fourier 係数 a_k, b_k を使って

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

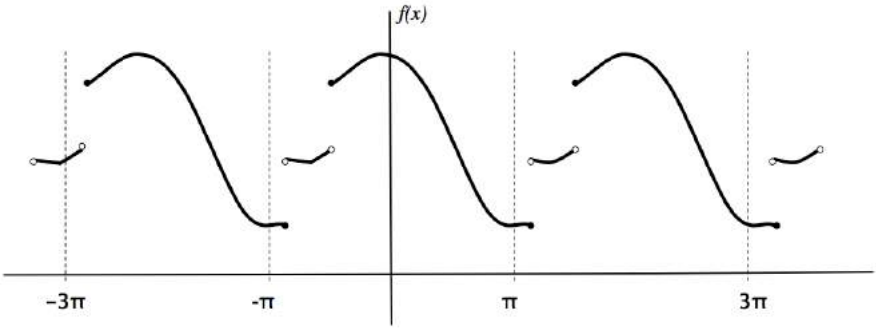
としたとき、f_N は V_N の要素であって、L^2 ノルムの意味で f を最良近似する。つまり

$$\|f - f_N\|_{L^2} = \min_{g \in V_N} \|f - g\|.$$

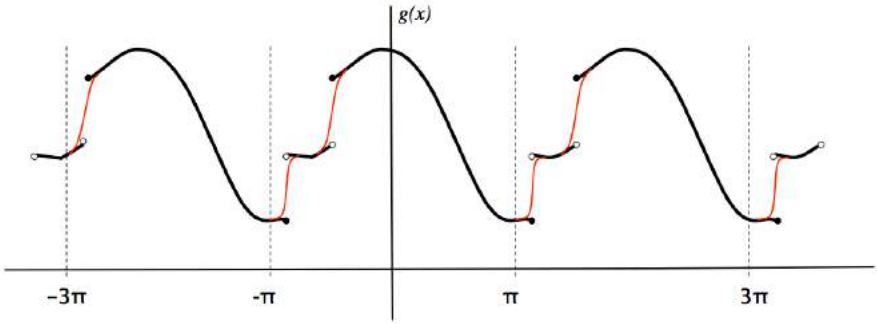
証明　f_N は空間 V_N への直交射影であることに注意すると、射影定理 1.42 の証明から f_N は f の最良近似であることがわかる。 ■

補題 2.43 $L^2([-\pi,\pi])$ の関数は滑らかな周期 2π 持つ周期関数によっていくらでも良く近似できる。

証明　$L^2([-\pi,\pi])$ の関数 f は一般に不連続関数で、周期拡張しても図 2.16(a) のように不連続関数である。f の連続成分を不連続点 $x = c$ を内部に含む微少区間 $(c-\epsilon, c+\epsilon)$ でうまくつないた滑らかな関数 $g(x)$ で、図 2.16(b) のように、f と g とは区間 $(c-\epsilon, c+\epsilon)$ を除いて一致するようにできる。接続区間 $(c-\epsilon, c+\epsilon)$ を狭くすることによって、滑らかな連続関数 g は $L^2([-\pi,\pi])$ の意味で f にいくらでも近くすることができる。 ■



(a)



(b)

図 2.16　(a) $[-\pi,\pi)$ 上で不連続点を持つ関数 $f(x)$ を周期拡張する (b) 不連続点を含む微少区間で滑らかなにつないで $g(x)$ として全区間で滑らかな連続関数とできる。したがって、接続区間を狭くすることによって、f を滑らかな関数 g によって近似できる。

定理 2.44 f を $L^2([-\pi,\pi])$ の要素とする。f の Fourier 係数 a_k, b_k を使って

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

としたとき、または、複素形式の Fourier 係数を

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}dt, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

を使って

$$f_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k \mathrm{e}^{ikx}$$

としたとき、f_N は $L^2([-\pi,\pi])$ の意味で f に収束する。つまり

$$\|f - f_N\|_{L^2} \to 0, \qquad N \to \infty.$$

証明　$f \in L^2([-\pi,\pi])$ と仮定する。このとき、補題 2.43 より、任意の $\epsilon > 0$ に対して、滑らかな周期関数 g をとって

$$\|f - g\|_{L^2} < \epsilon \tag{2.48}$$

とできる。

g の Fourier 係数 c_k, d_k を使って V_n 内の関数を

$$g_N(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} c_k \cos kx + d_k \sin kx$$

とする。定理 2.40 より、十分大きな N_0 を選んで、$\forall x \in [-\pi,\pi]$ と $N > N_0$ に対して $|g(x) - g_N(x)| < \epsilon$ とできる。

$$\begin{aligned}\|g - g_N\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - g_N(x)|^2\, dx \\ &\leqq \int_{-\pi}^{\pi} \epsilon^2\, dx = 2\pi\epsilon, \quad N > N_0,\end{aligned}$$

および、(2.48) から

$$\begin{aligned}\|f - g_N\| &\leq \|f - g\| + \|g - g_N\| \quad \text{三角不等式} \\ &< \epsilon + \sqrt{2\pi}\epsilon, \qquad N > N_0.\end{aligned}$$

一方、補題 2.42 の f_N は f の V_N での最良近似であることから

$$\begin{aligned}\|f - f_N\| &\leq \|f - g_N\| \\ &\leqq (1 + \sqrt{2\pi})\epsilon, \quad N > N_0.\end{aligned}$$

■

次の Parseval の等式は Fourier 基底の完全性（全体性）に関係して定理 1.60 で登場している。

定理 2.45 (Parseval の等式) 区間 $[-\pi,\pi]$ 上の関数 f の Fourier 級数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx+b_k\sin kx$$

が $L^2([-\pi,\pi])$ であるとき、

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=|a_0|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2+|b_k|^2. \tag{2.49}$$

複素形式では、区間 $[-\pi,\pi]$ 上の関数 f の Fourier 級数

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k\mathrm{e}^{ikx}$$

が $L^2([-\pi,\pi])$ であるとき、

$$\frac{1}{2\pi}\|f(x)\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\alpha_k|^2. \tag{2.50}$$

または、$f,g\in L^2([-\pi,\pi])$ のとき

$$\frac{1}{2\pi}\langle f\mid g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^*(x)g(x)\,dx=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k^*\beta_k. \tag{2.51}$$

証明　(2.51) を示せば十分である。f, g の Fourier 部分和を

$$f_N(x)=\sum_{k=-N}^{N}\alpha_k\mathrm{e}^{ikx},\quad g_N(x)=\sum_{k=-N}^{N}\beta_k\mathrm{e}^{ikx}$$

とする。定理 2.44 より、$N\to\infty$ のとき $L^2([-\pi,\pi])$ の意味で $f_N\to f$, $g_N\to g$ である。

$$\begin{aligned}\langle f_N\mid g_N\rangle&=\left\langle\sum_{k=-N}^{N}\alpha_k\mathrm{e}^{ikx}\,\middle|\,\sum_{k=-N}^{N}\beta_k\mathrm{e}^{ikx}\right\rangle=\sum_{k=-N}^{N}\sum_{\ell=-N}^{N}\alpha_k^*\beta_\ell\left\langle\mathrm{e}^{ikx}\,\middle|\,\mathrm{e}^{i\ell x}\right\rangle\\&=2\pi\sum_{k=-N}^{N}a_k^*\beta_k\end{aligned}$$

より、(2.51) を示すには

$$\langle f_N \mid g_N \rangle \to \langle f \mid g \rangle, \qquad N \to \infty$$

を示せばよい。

$$\begin{aligned} |\langle f \mid g \rangle - \langle f_N \mid g_N \rangle| &= |(\langle f \mid g \rangle - \langle f \mid g_N \rangle) + (\langle f \mid g_N \rangle - \langle f_N \mid g_N \rangle)| \\ &\leqq |\langle f \mid g - g_n \rangle| + |\langle f - f_N \mid g_N \rangle| \\ &\leqq \|f\| \cdot \|g - g_N\| + \|f - f_N\| \cdot \|g_N\| \quad \text{Schwartz の不等式より} \end{aligned}$$

であることに注意し、$L^2([-\pi, \pi])$ の意味で $\|f_N - f\| \to 0$, $\|g - g_N\| \to 0$ から、右辺は $N \to \infty$ で 0 となる。 ■

注意 2.46 直交基底 $\{|e_n\rangle\}_{n=1,\ldots,N}$ を持つ有限時限部分空間 V_N への直交射影で定まる f の展開係数 $\{\langle e_n \mid f \rangle\}$ について成立する Bessel の不等式 (1.33) は、(2.50) の部分和を取れば明らかに成立する：

$$\sum_{k=-N}^{N} |\alpha_k|^2 \leqq \|f\|^2.$$

例 2.47 節 2.7.3 の区間 $[-\pi, \pi)$ 上の関数 $f(x) = x$ を周期拡張したノコギリ波は Fourier 余弦係数のみ (2.39) を持つ：

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

また

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$

および

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

である。したがって (2.49) を使うと、Riemann の zeta 関数 $\zeta(s)$ の特殊値 $s = 2$ に対する Euler の Basel 等式（1735 年）

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

が得られる。

第 3 章

Fourier 変換

3.1 Fourier 変換と反転公式

定義 3.1 実数 $\mathbb{R}$ 上の関数が L^1、または**絶対可積分**（絶対 Lebesgure 可測）であるとは

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < +\infty \tag{3.1}$$

であるときである。

定義 3.2 (Fourier 変換) $\mathbb{R}$ 上で定義された区分的に連続、かつ絶対可積分な（複素）関数 $f(x)$ の Fourier 変換（Fourier transformation）を

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-i\lambda x} dx \tag{3.2}$$

で定義する。

注意 3.3 $|f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x}| = |f(x)|$ であるので (3.2) は絶対収束する。したがって、$\widehat{f}(\lambda)$ は任意の $-\infty < \lambda < \infty$ に対して定義され、かつ

$$|\widehat{f}(\lambda)| \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$$

である。

例 3.4 関数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ の Fourier 変換を計算する。この関数は、積分

正弦関数 $\mathrm{Si}(x)$ の性質 2.22 で関数値 $\mathrm{Si}(\infty) = \frac{\pi}{2} = 1.5708$ を求めるための別法として登場している。

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx \\ &= \frac{1}{-i\lambda\sqrt{2\pi}}\left[\mathrm{e}^{-i\lambda x}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{-i\lambda\sqrt{2\pi}}(\mathrm{e}^{-i\lambda} - \mathrm{e}^{i\lambda}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\lambda}{\lambda}.\end{aligned}$$

例 3.5 関数 $f(x) = \begin{cases}\mathrm{e}^{-kx}, & x \geqq 0 \\ 0, & x < 0\end{cases}$ の Fourier 変換を計算する。

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(k+i\lambda)x}dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}(k+i\lambda)}\left[\mathrm{e}^{-(k+i\lambda)x}\right]_{0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(k+i\lambda)}.\end{aligned}$$

定理 3.6 区分的に連続で、絶対可積分な関数 $f(x)$ の Fourier 変換 $\widehat{f}(\lambda)$ は有界な連続関数である。

証明　$f(x)$ は絶対可積分であることから、先の注意のように、$\widehat{f}(\lambda)$ の有界性は明らか。

$\widehat{f}(\lambda)$ の連続性を示そう。$\widehat{f}(\lambda)$ の有界性から、十分大きな ℓ を取ると、任意の λ に対して

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|\geqq\ell} f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\ell} f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\ell}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx\right| < \epsilon$$

であるので、

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\lambda+\Delta\lambda) - \widehat{f}(\lambda)| &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i(\lambda+\Delta\lambda)x}dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx\right| \\ &< 2\epsilon + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\left[\mathrm{e}^{-i(\lambda+\Delta\lambda)x} - \mathrm{e}^{-i\lambda x}\right]dx\right|.\end{aligned}$$

平均値の定理から

$$\mathrm{e}^{-i(\lambda+\Delta\lambda)x} - \mathrm{e}^{-i\lambda x} = -ix\Delta\lambda \mathrm{e}^{-i(\lambda+\theta\delta\lambda)x}, \quad 0 < \theta < 1$$

これより

$$|\widehat{f}(\lambda+\Delta\lambda) - \widehat{f}(\lambda)| < 2\epsilon + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|\Delta\lambda|\ell\int_{-\ell}^{\ell}|f(x)|dx$$

ここで、

$$|\Delta\lambda| < \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ell\int_{-\ell}^{\ell}|f(x)|dx\right)^{-1}\epsilon$$

ととると

$$|\widehat{f}(\lambda+\Delta\lambda) - \widehat{f}(\lambda)| < 3\epsilon$$

が示せた。したがって、$\widehat{f}(\lambda)$ は連続。しかも、証明の仕方から明らかなように、一様連続である。 ■

3.1.1 Fourier 変換と Fourier 級数との関係

Fourier 変換の意味を考えてみよう。区間 $[-\ell,\ell]$ 上の関数 f の Fourier 級数を考え、$\ell\to\infty$ としてみる。節 2.9 で議論したように、Fourier 級数の収束性は問題となるのであるが、$f(x)$ が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n \mathrm{e}^{in\pi x/\ell} \tag{3.3}$$

となるとき、その係数は

$$\alpha_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\mathrm{e}^{-n\pi x/\ell}$$

で与えられたのであった。いま、f が全区間で定義されているとき、$\ell\to\infty$ として、上の表式がどのようになるかをみてみよう。Fourier 係数を与える式を代入して、

$\lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}$ および $\delta\lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{\ell}$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\ell\to\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\mathrm{e}^{-in\pi t/\ell}dt\right)\mathrm{e}^{in\pi x/\ell}\right] \\ &= \lim_{\ell\to\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\mathrm{e}^{in\pi(x-t)/\ell}dt\right] \\ &= \lim_{\ell\to\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\mathrm{e}^{i\lambda_n(x-t)}dt\right]\delta\lambda \end{aligned} \tag{3.4}$$

を得る。そこで

$$F_\ell(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\mathrm{e}^{i\lambda_n(x-t)}dt$$

とおくと、(3.4) の括弧 [...] 内は

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_\ell(\lambda_n)\delta\lambda$$

と書ける。積分 $\int_{-\infty}^{\infty} F_\ell(\lambda)d\lambda$ を Riemann 和の極限とみなすと、(3.4) は

$$f(x) = \lim_{\ell\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_\ell(\lambda)d\lambda$$

であるが、$F_\ell(\lambda)$ は $\ell\to\infty$ で $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{i\lambda(x-t)}dt$ に近づくことから

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{i\lambda(x-t)}dtd\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\lambda t}dt\right)\mathrm{e}^{i\lambda x}d\lambda \end{aligned} \tag{3.5}$$

を得る（積分の順序を交換していることに注意。いつでもこんなことができるわけではない)。このとき、この積分のカッコ内

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\lambda t}dt$$

が f の Fourier 変換となっている。式 (3.5) は定理として成立する。

定理 3.7 (Fourier の積分公式) 関数 $f(x)$ が区間 $(-\infty,\infty)$ で何回でも微分可能（f の $n4$ 階導関数 $f^{(n)}(x)$ が存在）で、急減少関数であるとき、つまり

$$\lim_{x\to\pm\infty}|x^m||f^{(n)}(x)|=0 \qquad (m,n=0,1,2,\dots)$$

を満足すれば（十分条件)、次の公式が成立する。

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\,\mathrm{e}^{i\lambda a}\left(\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\mathrm{e}^{-i\lambda x}f(x)\right) \tag{3.5$'$}$$

この十分条件をさらに弱めても定理は成立する。

3.1.2 Fourier の反転公式

定理 3.7 の Fourier 積分公式 (3.5)$'$ は Fourier 変換の式 3.2 を使って

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda x}d\lambda$$

と書ける。実際、厳密な議論によって次の定理が成立する。

定理 3.8 $f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で定義された区分的に滑らかで、かつ絶対可積分な関数とする。$f(x)$ の Fourier 変換を $\widehat{f}(\lambda)$ とするとき

$$\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\ell}^{\ell}\widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda x}\lambda=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \tag{3.6}$$

となる。特に、$f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で連続微分可能であれば、(3.6) の左辺は任意の有限区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)$ に一様収束して、**Fourier 反転公式**

$$\widehat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx \quad \text{に対して} \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda x}d\lambda \tag{3.7}$$

が成立する。反転公式は一方の関数から他方が逆変換で得られることを表している。この意味で $f(x)$ と $\widehat{f}\lambda)$ は互いに等価である。

注意 3.9 この定理 3.8 は関数 $f(x)$ の Fourier 級数 (3.3) の収束性に関する定理 2.36 および定理 2.33 に対応している。つまり、$f(x)$ が区分的に滑らかな関数であれば、その不連続点におけるその Fourier 級数について

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\alpha_n\mathrm{e}^{in\pi x/\ell}=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

が成立するのであるが、Fourier 変換についてこれに対応するのが定理 3.8 である。

注意 3.10 関数 $f(x)$ とその Fourier 変換 $\widehat{f}(\lambda)$ との間の対称性のある反転公式 (3.7) は便宜上の都合である。例えば、反転公式として次のように表しても一向に構わない。

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mp i\lambda x}dx \quad \text{に対して} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{\pm i\lambda x}d\lambda \tag{3.7$'$}$$

同様に、反転公式をしばしば次のように表すことがある。

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}dx \quad \text{に対して} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi\xi x}d\xi \tag{3.7$''$}$$

反転公式によって関数 f と $\widehat{f}$ は同等だと見なせるわけだが、今後、$f(x)$ を**物理空間表示**、$\widehat{f}(\xi)$（や $\widehat{f}(\lambda)$）を**スペクトル空間表示**ということにする。

関数 $f(x)$ が与えられたとき、その Fourier 変換 $\widehat{f}(\lambda)$ がどのようなスペクトル成分を持つか（スペクトル空間における $\widehat{f}$ の広がり）に注目してみよう。

例 3.11 関数 $f(x) = \chi_{[-\pi,\pi]}(x)\cos 3x = \begin{cases} \cos 3x, & |x| \leqq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$ の Fourier 変換を計算しよう（χ_I は区間 I の特性関数）。f が偶関数であるため、

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 3x\cos\lambda x\,dx \\ &= \frac{\sqrt{2}\lambda\sin\lambda\pi}{\sqrt{\pi}(9-\lambda^2)} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (\lambda\to\infty).\end{aligned}$$

また、$\widehat{f}(\lambda)$ のピークが $\lambda = \pm 3$ にあることに注意する（図 3.1(a)）。この事実は、関数 f が角振動数 3 で振動していることの結果である。

演習 3.12 関数 $f(x) = \chi_{[-\pi,\pi]}(x)\sin 3x = \begin{cases} \sin 3x, & |x| \leqq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$ の Fourier 変換 $\widehat{f}(\lambda)$ を計算をし、そのグラフ（虚数成分）を描いてその様子を説明しなさい（図 3.1(b)）。f は $\mathbb{R}$ 上の連続関数であり、$\widehat{f}(\lambda) \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), (\lambda\to\infty)$ を示しなさい。

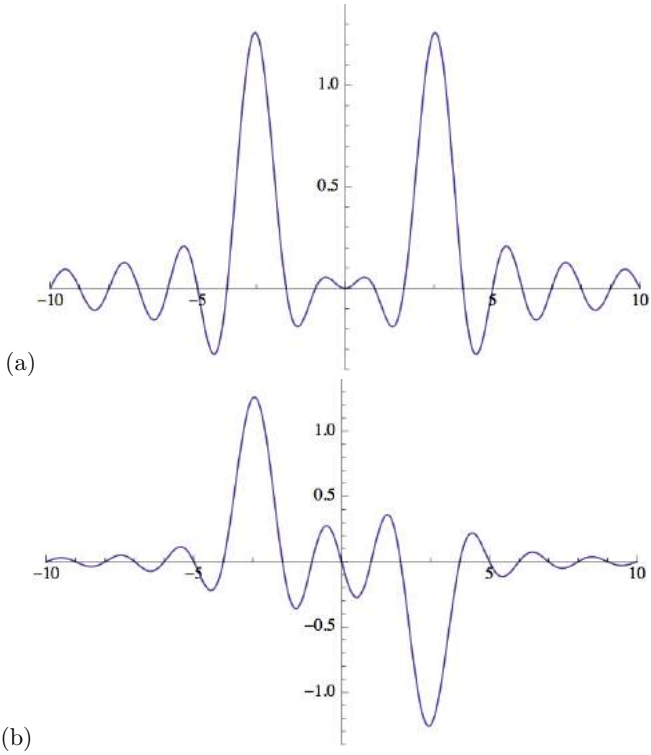
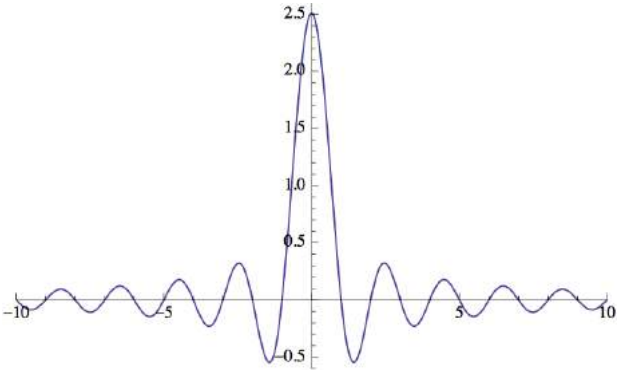


図 3.1 (a) 関数 $f(x) = \chi_{[-\pi,\pi]}(x)\cos 3x$（$\chi_I$ は区間 I の特性関数）の Fourier 変換 $\widehat{f}(\lambda)$ のグラフ。この関数は $x = \pm\pi$ に不連続点を持つ $\mathbb{R}$ 上の不連続関数である。$\widehat{f}(\lambda)$ は $\lambda = \pm 3$ で極大値を取るが、これは元の関数の角周波数が 3 であることの結果である。$\widehat{f}(\lambda) \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right), (\lambda \to \infty)$ である。(b) $f(x) = \chi_{[-\pi,\pi]}(x)\sin 3x$ の Fourier 変換 $\widehat{f}(\lambda)$ のグラフ。$\widehat{f}(\lambda) \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), (\lambda \to \infty)$ である。



例 3.13 箱関数 $f(x) = \chi_{[-\pi,\pi]}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$ の Fourier 変換 $\widehat{f}(\lambda)$ を計算しよう。この関数は $x = \pm\pi$ に不連続点を持つ $\mathbb{R}$ 上の不連続関数である。f が偶関数であることに注意して

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda) &= \frac{1}{1\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{1\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \lambda x \, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (\lambda \to \infty).\end{aligned}$$

定数関数は周波数 0 で振動しているとみなすと、図 3.2 からわかるように、$\widehat{f}(\lambda)$ の最大値は λ の 0 近傍（角周波数が 0 の近傍）であることが確認できる。

演習 3.14 箱関数 $f(x) = \chi_{[-\pi,\pi]}(x)$ の Fourier 変換において、

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\sin \lambda\pi}{\sqrt{\pi}\lambda} \mathrm{e}^{i\lambda x} d\lambda = \begin{cases} 1, & |x| < \pi, \\ \frac{1}{2}, & x = \pm\pi, \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$

を計算で示し、不連続点 $x = \pm\pi$ における定理 3.8 の Fourier 反転公式を確認しなさい。この広義積分は絶対収束しないことに注意しよう（$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sqrt{2}\sin \lambda x}{\sqrt{\pi}\lambda} \right| d\lambda = +\infty$）。

例 3.15 テント関数 $f(x) = (1 - |x|)\chi_{[-\pi,\pi]}(x) = \begin{cases} x + \pi, & |x| \leqq \pi, \\ \pi - x, & 0 < x \leqq \pi, \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$ の Fourier 変換 $\widehat{f}(\lambda)$ を求めよう（図 3.3）。f は偶関数であることに注意して

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\pi} (\pi - x) \cos \lambda x \, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos \lambda\pi}{\lambda^2} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad (\lambda \to \infty).\end{aligned}$$

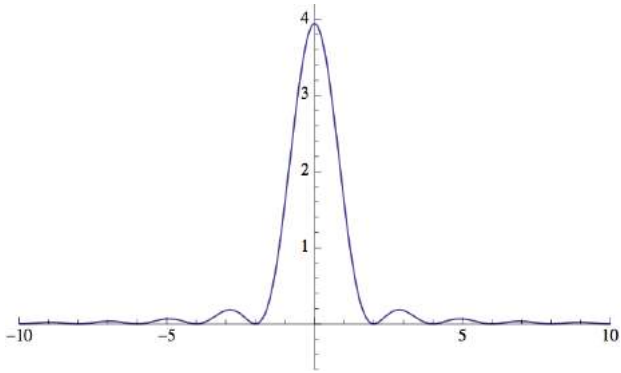


図 3.3　テント関数 $f(x) = (1-|x|)\chi_{[-1,1]}(x)$ の Fourier 変換 $\widehat{f}(\lambda)$ のグラフ。$\widehat{f}(\lambda) \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), (\lambda \to \infty)$ である。

注意 3.16 ここで取り上げた関数の連続性に注意しよう。$f(x) = \chi_{[-\pi,\pi]} \sin 3x(x)$, $f(x) = (1-|x|)\chi_{[-\pi,\pi]}(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で連続で、その $\widehat{f}(\lambda)$ は $\lambda \to \infty$ で $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ である。一方、$f(x) = \chi_{[-\pi,\pi]}(x)\cos 3x$, $f(x) = \chi[-\pi,\pi](x)$ は $x = \pm\pi$ で不連続で、その Fourier 変換 $\widehat{f}(\lambda)$ は $\lambda \to \infty$ で $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ である。

これらの事実は、節 2.6.1 の連続三角波の Fourier 係数 a_n, b_n が $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ で減衰することや、節 2.7 の不連続関数の Fourier 係数 a_n, b_n が $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ で減衰することに対応している。

演習 3.17 関数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \mathrm{e}^{-ax}, & x \geqq 0 \end{cases}, \quad Re(a) > 0$$

の Fourier 変換が

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i\lambda}$$

であることを示しなさい。

3.2　Fourier 変換の性質

関数 $f(x)$ の Fourier 変換 $\widehat{f}(\lambda)$ を f に対する演算 $\mathcal{F}$ をと見なして

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x}\,dx \\ &= \mathcal{F}[f](\lambda)\end{aligned} \tag{3.2$'$}$$

と表す。また、Fourier 逆変換を演算的に捉えて、記号 $\mathcal{F}^{-1}$ を使って

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda x}\,d\lambda \tag{3.8}$$

と表す。このとき、定理 3.8 の Fourier 反転公式は $\mathcal{F}^{-1}$ が確かに $\mathcal{F}$ の逆演算

$$\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[f]\big] = f \tag{3.7$'$}$$

であることは次のようにしてわかる。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[f]\big] &= \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}](x) \qquad \mathcal{F}\text{ の定義から} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda x}\,d\lambda \qquad \mathcal{F}^{-1}\text{ の定義から} \\ &= f(x) \qquad \text{定理 3.8 の Fourier 反転公式から.}\end{aligned}$$

次の定理は Fourier 変換に関係した計算を実行する上でしばしば有用である。

定理 3.18 [Fourier 変換の基本的性質]
f および g が $\mathbb{R}$ デ定義された微分可能関数で、大きな $|x|$ で $f(x) = 0$ であるとする。このとき、次の性質が成立する。

(1) Fourier 変換および Fourier 逆変換は線形演算子である。定数 c に対して、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f+g] &= \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g], \qquad \text{および} \quad \mathcal{F}[cf] = c\mathcal{F}[f] \\ \mathcal{F}^{-1}[f+g] &= \mathcal{F}^{-1}[f] + \mathcal{F}^{-1}[g], \qquad \text{および} \quad \mathcal{F}^{-1}[cf] = c\mathcal{F}^{-1}[f].\end{aligned}$$

(2) f と x^n の積の Fourier 変換は次で与えられる。

$$\mathcal{F}[x^n f(x)](\lambda) = i^n \frac{d^n}{d\lambda^n}\mathcal{F}[f](\lambda) \tag{3.9}$$

(3) f と λ^n の積の Fourier 逆変換は次で与えられる。

$$\mathcal{F}^{-1}[\lambda^n f(\lambda)](x) = (-i)^n \frac{d^n}{dx^n}\mathcal{F}^{-1}[f](x) \tag{3.10}$$

(4) f の n 階導関数の Fourier 変換は次で与えられる。

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](\lambda) = (i\lambda)^n \mathcal{F}[f](\lambda). \tag{3.11}$$

(5) f の n 階導関数の Fourier 逆変換は次で与えられる。

$$\mathcal{F}^{-1}[f^{(n)}(\lambda)](x) = (-i\lambda)^n \mathcal{F}^{-1}[f](x). \tag{3.12}$$

(6) 関数 f の平行移動 $x-a$ の Fourier 変換は次で与えられる。

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\lambda) = \mathrm{e}^{-i\lambda a}\mathcal{F}[f](\lambda). \tag{3.13}$$

(7) 関数 f のスケール変換 bx の Fourier 変換は次で与えられる。

$$\mathcal{F}[f(bx)](\lambda) = \frac{1}{b}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\lambda}{b}\right) \tag{3.14}$$

(8) $x<0$ について $f(x)=0$ ならば

$$\mathcal{F}[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{L}[f](i\lambda), \tag{3.15}$$

ここで、$\mathcal{L}[f]$ は f の Laplace 変換

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-xs}\,dx$$

である。

証明

1. Fourier 変換の線形性は直ちに次の積分の線形性から示すことができる。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f+g](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)+g(x)]\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx \\ &= \mathcal{F}[f](\lambda)+\mathcal{F}[g](\lambda)\end{aligned}$$

$\mathcal{F}[cf]c\mathcal{F}[f]$ や Fourier 逆変換についても同様。
2. と 3. f と x^n の積の Fourier 変換

$$\mathcal{F}[x^n f(x)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) \mathrm{e}^{-i\lambda x} dx$$

において、

$$x^n f(x) \mathrm{e}^{-i\lambda x} = (i)^n \frac{d^n}{d\lambda^n} f(x) \mathrm{e}^{-i\lambda x}$$

を使って

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x^n f(x)](\lambda) &= (i)^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-i\lambda x} dx \right\} \\ &= (i)^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \mathcal{F}[f](\lambda).\end{aligned}$$

Fourier 逆変換についても同様。
4. と 5. f の n 階導関数の Fourier 変換

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) \mathrm{e}^{-i\lambda x} dx$$

で、部分積分を実行し、さらに f が無限遠で零になることを使うと境界項が落ちて

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) \mathrm{e}^{-i\lambda x} dx &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n-1)}(x) \frac{d}{dx} \mathrm{e}^{-i\lambda x} dx \\ &= (i\lambda) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n-1)}(x) \mathrm{e}^{-i\lambda x} dx\end{aligned}$$

を得る。このプロセスをさらに $n-1$ 回繰り返して

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) \mathrm{e}^{-i\lambda x} dx &= (i\lambda)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-i\lambda x} dx \\ &= (i\lambda)^n \mathcal{F}[f](\lambda).\end{aligned}$$

6. と 7. 平行移動とスケーリングを組み合わせて、次を示そう。

$$\mathcal{F}[f(bx-a)](\lambda) = \frac{1}{b} \mathrm{e}^{-i\lambda a/b} \mathcal{F}[f](\lambda/b). \tag{3.16}$$

Fourier 変換の定義と変数変換 $s = bx - a$ および $dx = ds/b$ を使って

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(bx-a)](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(bx-a)\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\mathrm{e}^{-i\lambda\left(\frac{s+a}{b}\right)}fracdsb.\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(bx-a)](\lambda) &= \mathrm{e}^{\frac{-i\lambda a}{b}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\mathrm{e}^{\frac{-i\lambda}{b}s}\frac{ds}{b} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{-i\lambda a}{b}}\frac{1}{b}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\lambda}{b}\right)\end{aligned}$$

8.Laplace 変換の定義から直ちに得られる。 ■

例 3.19 関数 $f(x) = \chi_{[-\pi,\pi]}(x)\sin 3x$ の Fourier 変換は、演習 3.12 で計算したように

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{-3\sqrt{2}i\sin\lambda\pi}{\sqrt{\pi}(9-\lambda^2)}$$

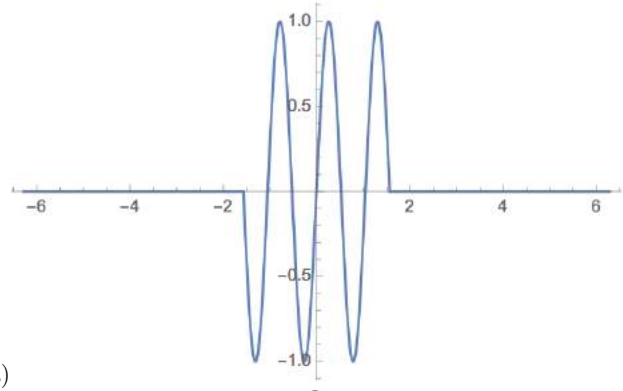
である。区間 $[-\pi,\pi]$ 上での $f' = 3\cos 3x$ は、例 3.11 で取り上げた関数の 3 倍に等しい。上の定理 3.18(1) から、例 3.11 の Fourier 変換の結果より

$$\widehat{f'}(\lambda) = \frac{3\lambda\sqrt{2}i\sin\lambda\pi}{\sqrt{\pi}(9-\lambda^2)} \tag{3.17}$$

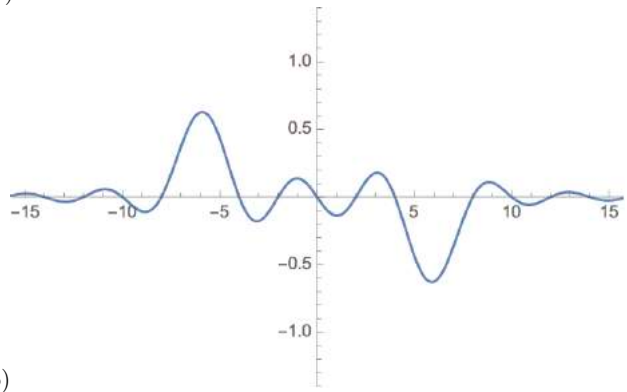
である。しかしながら、$\widehat{f'}(\lambda)$ は 、定理 3.18(4) を使って$\widehat{f}(\lambda)$ から直接得られ

$$\widehat{f'}(\lambda) = i\lambda\widehat{f}(\lambda) = -i\lambda\frac{3\sqrt{2}i\sin\lambda\pi}{\sqrt{\pi}(9-\lambda^2)}$$

である。これは式 (3.17) に等しい。



(a)



(b)

図 3.4　(a) $f_2(x) = \chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(x)\sin 6x$ のグラフ。$f(x) = \chi_{[-\pi,\pi]}(x)\sin 3x$（演習 3.12）としたとき $f_2(x) = f(2x)$ である。図 3.1(a) と比べると、x 軸に 1/2 圧縮した形になっている。(b) Fourier 変換 $\mathcal{F}[f_2(x)](\lambda) = \mathcal{F}[f(2x)](\lambda)$ のグラフ。図 3.1(b) と比べると、$|\lambda| = 3$ 付近で見られた $\widehat{f}(\lambda)$ のピークは $|\lambda| = 6$ 付近にあり、高さも 1/2 である。$\mathcal{F}[f(2x)](\lambda)$ は $\widehat{f}(\lambda)$ を λ 軸に 2 倍引き延ばし値を 1/2 倍にした関数 $(1/2)\widehat{f}(\lambda/2)$ に等しい。

例 3.20 Fourier 変換のスケーリング公式

$$\mathcal{F}[f(bx)](\lambda) = \frac{1}{b}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\lambda}{b}\right) \tag{3.14$'$}$$

の意味を考えてみよう。この表式は、f の周波数が大きくなるとその Fourier 変換が引き延ばされることを示していることが次のようにしてわかる。

$b > 1$ のとき、$f(bx)$ の関数のグラフは $f(x)$ のグラフを x 軸方向に $1/b$ に圧縮したものである。演習 3.12 で取り上げた関数 $f(x) = \chi_{[-\pi,\pi]}(x)\sin 3x$ の場合、$f(2x) = \chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(x)\sin 6x$ で、確かに x 軸に 1/2 圧縮した関数になっている（図 3.4(a)）。興味深いのは、この関数の Fourier 変換 $\mathcal{F}[f(2x)](\lambda)$ である。図 3.4(b) に示したように、$\widehat{F}(\lambda)$ の $|\lambda| = 3$ 付近にあるピークは $|\lambda| = 6$ 付近となり、しかもその値は半分になっている：$\mathcal{F}[f(2x)](\lambda) = 1/2\widehat{f}(\lambda/2)$ である。つまり、f のグラフを x 軸に沿って圧縮して周波数を増加させると、その Fourier 変換は引き延ばされる。逆に、x 軸に沿って f を拡大して周波数を減少させると、その Fourier 変換は圧縮される。

節 1.6.2 で定義 1.74 した内積空間 V から W への有界線形作用素 $T : V \to W$ の随伴または共役演算子 $T^\dagger : W \to V$ は

$$\langle T^\dagger w \,|\, v\rangle_V = \langle w \,|\, Tv\rangle_W$$

で定まる線形作用素である。Fourier 変換の性質に関する定理 3.18 から明らかなように、Fourier 変換作用素 $\mathcal{F}$ も線形演算子であり、その随伴性を考えることができる。次の定理は、Fourier 変換 $\mathcal{F}$ の随伴は Fourier 逆変換 Fourier 変換 $\mathcal{F}^{-1}$ であることを教えている。

定理 3.21 (Fourier 変換の随伴) 関数 f および g が L^2、つまり 2 乗可積分とする。このとき

$$\langle \mathcal{F}[f] \,|\, g\rangle_{L^2} = \langle f \,|\, \mathcal{F}^{-1}[g]\rangle_{L^2}\,. \tag{3.18}$$

証明

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}[f] \,|\, g\rangle_{L^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}^*(\lambda) g(\lambda)\, d\lambda \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) \mathrm{e}^{i\lambda t}\, dt\, g(\lambda)\, d\lambda \quad \widehat{f} \text{ の定義から} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) \mathrm{e}^{i\lambda t}\, d\lambda \right) dt \quad \text{積分順序を交換} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) \mathcal{F}^{-1}[g](t)\, dt \quad \mathcal{F}^{-1} \text{ の定義} \\
&= \langle f \,|\, \mathcal{F}^{-1}[g]\rangle_{L^2}\,.
\end{aligned}$$

■

次の Plancherel の公式は Fourier 変換および逆変換は L^2 内積を保存することを示している。

定理 3.22 (Plancherel の定理) 関数 f および g が L^2 とする。このとき、

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[f] \,|\, \mathcal{F}[g] \rangle_{L^2} &= \langle f \,|\, g \rangle_{L^2} \\ \langle \mathcal{F}^{-1}[f] \,|\, \mathcal{F}^{-1}[g] \rangle_{L^2} &= \langle f \,|\, g \rangle_{L^2}\end{aligned}$$

特に

$$\|\mathcal{F}[f]\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

証明

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[f] \,|\, \mathcal{F}[g] \rangle_{L^2} &= \langle f \,|\, \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[g] \rangle_{L^2} \quad \text{定理 3.21} \\ &= \langle f \,|\, g \rangle_{L^2} \quad \text{定理 3.8 の反転公式}\end{aligned}$$

これらの等式は、区間 $[-\pi, \pi]$ 上の関数の Fourier 級数における Parseval の等式（定理 2.45）

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = |a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2 \tag{2.49$'$}$$

$$\frac{1}{2\pi}\|f(x)\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 \tag{2.50$'$}$$

に似ているために、これらも **Parseval の等式**ということがある。 ■

3.3 畳み込み

定義 3.23 (関数 f と g との畳み込み) 与えられた関数 $f(x)$ と $g(x)$ との畳み込み（convolution）を $f * g(x)$ と書いて

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt \tag{3.19}$$

で定義する。

$g(x)$ として $(1/a)\chi_{[-a/2,a/2]}(x)$（$a > 0$）をとって考えてみよう。このとき値 $f * g(x_0)$ は x_0 を中心とする区間 a 上の $f(x)$ の平均値でとなる。$f(x)$ が連続なら、この平均値は $f(x)$ の実際の値に対するよい近似になる。次に、g の形がテント型 $g(x) = (1/a)(1 - |x|/a)\chi_{-a,a]}(x)$ のときには、$f * g(x_0)$ は x_0 の周りの $f(x)$ の重み付き平均と考えることができ、x_0 に近い点では x_0 から遠い点よりもより重みが大きくなる。つまり、畳み込み $f * g(x)$ は、重み関数 g で決定された $f(x)$ の "動く重み付き平均" であると見なすことができる。

注意 3.24 定義 (3.19) は、変数変換 $y = x - t$ によって

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt$$

と書くことができるため、畳み込みは可換で $f * g(x) = g * f(x)$ である。したがって、$f * g(x)$ は重み関数 $f(x)$ で決定された $g(x)$ の動く重み付き平均であると見なすこともできる。

定理 3.25 (畳み込み定理) f と g が可積分（L^1 関数）であるとき、畳み込みと Fourier 変換とには次の関係がある。

$$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi}\widehat{f} \cdot \widehat{g}, \tag{3.20}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f} \cdot \widehat{g}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g. \tag{3.21}$$

証明　前半) Fourier 変換の定義から

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt\,\mathrm{e}^{-i\lambda x} dx.\end{aligned}$$

$\mathrm{e}^{-i\lambda x} = \mathrm{e}^{-i\lambda(x-t)}\mathrm{e}^{-i\lambda t}$ を使って積分の順序を変えて

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\mathrm{e}^{-i\lambda(x-t)} g(t)\,dt\,\mathrm{e}^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\mathrm{e}^{-i\lambda s} g(t)\,ds\,\mathrm{e}^{-i\lambda t} dt \\ &= \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\mathrm{e}^{-i\lambda s}\,ds\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{e}^{-i\lambda t}\,dt\right) \\ &= \sqrt{2\pi}\widehat{f} \cdot \widehat{g}\end{aligned}$$

後半) 前半と定理 3.8 の反転公式を使って

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}\cdot\widehat{g}] &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(f*g)]\\ &= f*g\end{aligned}$$

■

例 3.26 Mathematica では、関数 $f(x)$ と $g(x)$ の畳み込み $f*g(x)$ を関数 `Convolve` を使って次のように計算することができる。

```
Convolve[f[y], g[y], y, x]
```

`y` は積分変数で、結果は `x` の関数として返る。

例 1.29 で取り上げた Haar のスケーリング関数 $\phi(x)$ と Gauss 関数 e^{-x^2} とのたたみ込みの計算は次のようになる。

```
haar[x_] := If[0 <= x <= 1, 1, 0]
conv[x_] = Convolve[haar[y], Exp[-y^2], y, x]
    1/2 Sqrt[\[Pi]] (Erf[1 - y] + Erf[y])
```

出力において、erf[y] は誤差関数 $\mathrm{erf}(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^y \mathrm{e}^{-t^2}dt$ である。

3.4　フィルター

フィルターとは、入力信号をその目的に応じて処理し、それを出力信号として返すブラックボックス[*1] である。フィルターをどのように実現するかにおいて Fourier 変換が中心的役割をする。

信号（signal）とは区分的に連続な関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ で、**フィルタ**（filter）とは、信号 f を信号 $\tilde{f}$ に写す変換である。フィルタ L が であるとは、信号 f,g とある定数 a,b について

$$L[af+bg] = a\,L[f] + b\,L[g]$$

となることである。関数 f をある数だけ平行移動したものを f_a、つまり $f_a(x) =$

[*1] ブラックボックスとは、その利用において “何が行われているか” の詳細を知る必要がない装置である。

$f(x-a)$ と表そう。以下で、関数 f の変数 x を時刻 t として、$f(x)$ の代わりに $f(t)$ と記すことあるが、$x \in \mathbb{R}$ である限り混乱は起こらないはずだ。

定義 3.27 フィルタ（信号を別の信号に写す変換）が**平行移動不変**（shift-invariant）であるとは、定義域 R 上の信号 f およびある実数 a について、

$$L[f_a] = (Lf)_a, \qquad \text{つまり、}^{\forall}x \text{ について} \quad L[f_a](x) = (Lf)(x-a)$$

となることである。

代表的なフィルターに雑音除去があるが、これが実用的であるためにはフィルタが平行移動不変であることが望ましい。ある音源 f を雑音除去しておいて a 日後に聞く場合と、音源 f を a 日後に再生しながら雑音除去して行く場合とは、同じ音質であることが期待されるからである。

例 3.28 コンパクトサポートである関数 $\ell(x)$（有限サポート外の x については $\ell(x)=0$）を使って、信号 f のフィルタを

$$(Lf)(x) = (\ell * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x-y) f(y)\, dy$$

で定義する。L の線形性は明かである。

$$\begin{aligned}
(Lf)(x-a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x-a-y) f(y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x-y') f(y'-a)\, dy' \qquad \text{たたみ込みの性質：} y' = y+a \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x-y') f_a(y')\, dy' \\
&= L[f_a](x)
\end{aligned}$$

これより、コンパクトサポートな関数とのたたみ込みで定義したフィルタ L は平行移動不変であることがわかる。

注意 3.29 たたみ込みによって構成した線形フィルタは必ずしも平行移動不変ではない。たとえば、コンパクトサポートではない関数 $\tilde{\ell}(x)$

$$\tilde{\ell}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

とでたたみ込んで構成したフィルタ $\tilde{L}$ は次のようになる。

$$(\tilde{L}f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\ell}(x-y)f(y)\,dy = \int_0^x f(y)\,dy.$$

このとき、

$$\begin{aligned}\tilde{L}[f_a](x) &= \int_0^x f(y-a)\,dy \\ &= \int_{-a}^{x-a} f(y')dy' \qquad y' = y-a.\end{aligned}$$

一方、

$$(\tilde{L}f)(x-a) = \int_0^{x-a} f(y)\,dy$$

とり、$\tilde{L}[f_a](x) \neq (\tilde{L}f)x-a)$ である。

次は、周波数 λ の三角関数 $\mathrm{e}^{\lambda x}$ を入力すると、その線形平行移動不変なフィルタ出力はまた同じ周波数をもつ三角関数であることを示している。

補題 3.30 L を線形な平行移動不変なフィルタ、λ をある数とする。このとき、ある関数 h が存在して、これから定まる $\widehat{h}$ によって、次が成立する。

$$L(\mathrm{e}^{i\lambda x}) = \sqrt{2\pi}\,\widehat{h}(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda x}.$$

$h(x)$ を**システム関数** (system function) または**伝達関数** (transfer function) という。

証明　$h^\lambda(x) = L(\mathrm{e}^{i\lambda x})$ とおく。L が平行移動不変であることから、任意の a に対して

$$L[\mathrm{e}^{i\lambda(x-a)}] = h^\lambda(x-a).$$

L の線形性から

$$\begin{aligned}L[\mathrm{e}^{i\lambda(x-a)}] &= h^\lambda(x-a) \\ &= L[\mathrm{e}^{-i\lambda a}\mathrm{e}^{i\lambda x}] \\ &= \mathrm{e}^{-i\lambda a}L[\mathrm{e}^{i\lambda x}] \\ &= \mathrm{e}^{-i\lambda a}h^\lambda(x).\end{aligned}$$

これより

$$h^\lambda(x-a) = \mathrm{e}^{-i\lambda a} h^\lambda(x) \tag{3.22}$$

を得るが、$a = x$ のとき $h^\lambda(0) = \mathrm{e}^{-i\lambda x} h^\lambda(x)$ になって、$h^\lambda(x) = h^\lambda(0)\mathrm{e}^{i\lambda x}$ がわかる。

よって、形式的に $\widehat{h}(\lambda) = h^\lambda(0)/\sqrt{2\pi}$ と置いて、証明が終わる。 ■

ここで、式 (3.22) に注意しよう。Fourier 変換の性質（定理 3.18）の (6) 平行移動

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\lambda) = \mathrm{e}^{-i\lambda a}\mathcal{F}[f](\lambda) \tag{3.13$'$}$$

を思い起こそう。これより、λ の関数として式 (3.22) の $h^\lambda(x)$ は、関数 $h(x)$ の Fourier 変換 $\mathcal{F}[f](\lambda) = \widehat{h}(\lambda)$ であると見ることができる。

実際、次の定理が成立する。

定理 3.31 L を、区分的に連続な関数に作用する線形な平行移動不変なフィルタとする。このとき、

$$L(f) = f * h$$

となるシステム関数 h が存在する。

証明　信号 f は、Fourier 反転公式（定理 3.8）を適用すると次のように書ける。

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda x}\,d\lambda.$$

これにフィルタ L を適用すると

$$(Lf)(x) = L\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda x}\,d\lambda\right)$$

であるが、L を積分記号内に取り入れることができれば（Riemann 和の極限で積分を定義するなら OK である）

$$\begin{aligned}
(Lf)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) L[\mathrm{e}^{i\lambda x}](x)\,d\lambda \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda)\left(\sqrt{2\pi}\,\widehat{h}(\lambda)\right)\mathrm{e}^{i\lambda x}\,d\lambda \qquad \text{補題 3.30} \\
&= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{f}(\lambda)\widehat{h}(\lambda)\right](x) \qquad \text{定理 3.8 の反転公式} \\
&= (f*h)(x) \qquad \text{たたみ込み定理 3.25}
\end{aligned}$$

■

例 3.32 入力信号 f としてインパルス（デルタ関数 $\delta(x)$）としてみる。このときのフィルタ L の出力は

$$\begin{aligned}(Lf)(x) &= \delta * h(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)h(y)\,dy \\ &= h(x)\end{aligned}$$

となる。つまり、$h(x)$ はインパルス信号に対するフィルタ L の出力に等しいことがわかる。このとき、$h(x)$ を**インパルス応答**（inpulse response function）という。式 (3.22) でみたように、周波数 λ を持つ純振動 $\mathrm{e}^{i\lambda x}$ に対するフィルタ L の出力は $L[\mathrm{e}^{i\lambda x}] = \sqrt{2\pi}\widehat{h}(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda x}$ である。

定理 3.31 およびたたみ込み定理 3.25 から、$Lf = f * h$ は

$$\widehat{L[f]}(\lambda) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}\,\widehat{h}(\lambda) \tag{3.23}$$

と表される。このことがら、入力信号 f からある周波数 λ_c 以内の周波数成分を取り除く、つまりフィルタ出力の周波数成分が区間 $|\lambda| > \lambda_c$ で零となるようなシステム関数 $h_{\lambda_c}(x)$ として、その Fourier 変換が

$$\widehat{h_{\lambda_c}}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} & |\lambda| \leqq \lambda_c, \\ 0 & |\lambda| > \lambda_c \end{cases} \tag{3.24}$$

であるようなものとして選びたくなるが、これは適切ではない。

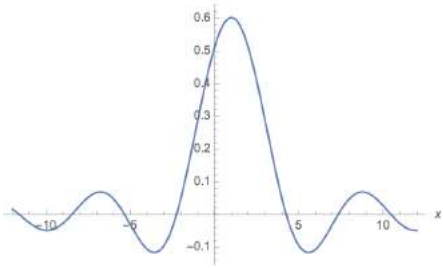


図 3.5　システム関数の Fourier 変換が帯域制限的 $\widehat{h_{\lambda_c}}(\lambda)$（式 (3.24)）としたとき、$x \geqq 0$ で値を持つような入力信号 $f_{x_c}(x) = \chi_{[0,x_c]}(x)$ のフィルタ出力信号 $(Lf_{x_c})(x)$ のグラフ。$x < 0$ においてもフィルタ出力として値をもつことは、入力信号が $0 \leqq x$ で値を持つという因果律に反している。

実際、$\widehat{h_{\lambda_c}}(\lambda)$ の Fourier 逆変換を行ってみると

$$
\begin{aligned}
h_{\lambda_c}(\lambda) &= \mathcal{F}^{-1}[\widehat{h_{\lambda_c}}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h_{\lambda_c}}(\lambda) \mathrm{e}^{i\lambda x\, d\lambda} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda_c}^{\lambda_c} \mathrm{e}^{i\lambda x}\, d\lambda \\
&= \frac{\mathrm{e}^{i\lambda_c x} - \mathrm{e}^{-i\lambda_c x}}{2i\pi x} \\
&= \frac{\sin \lambda_c x}{\pi x}
\end{aligned}
$$

を得る。いま、入力信号として f_{x_c}

$$
f_{x_c}(x) = \chi_{[0,x_c]}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x \leqq x_c, \\ 0 & x < 0 \text{ または } x > x_c \end{cases}
$$

とする。このときフィルタ L の出力 Lf_{x_c} は、定理 3.31 から次のようになる。

$$\begin{aligned}(Lf_{x_c}(x) &= (f_{x_c} * h_c)(x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_c}(y)h_c(x-y)\,dy\\ &= \int_0^{x_c} \frac{\sin\lambda_c(x-y)}{\pi(x-y)}\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\lambda_c(x-x_c)}^{\lambda_c x} \frac{\sin w}{w}\,dw\\ &= \frac{1}{\pi}\big(\mathrm{Si}(\lambda_c x) - \mathrm{Si}(\lambda_c(x-x_c))\big).\end{aligned}$$

ここで、$\mathrm{si}(x)$ は節 2.5 の積分正弦関数である。図 3.5 に示すように、$0 \leqq x$ で値を持つ入力信号 f_{x_c} であるにもかかわらず、フィルタ出力が $x < 0$ においても値をもつ。x を時間的変数とみた場合、この出力結果は因果律に反していると見なすことができる。

定義 3.33 フィルタが**因果的**（causal）であるとは、$x < 0$ について入力が $f(x) = 0$ であるフィルタ出力 Lf が、$x < 0$ で $(Lf)(x) = 0$ であることである。

定理 3.34 L を応答関数 h を持つ平行移動不変なフィルタ $Lf = f * h$ であるとする。L が因果的であるのは、すべての $x < 0$ に対して $h(x) = 0$ であるときに限る。より正確には、L に関するこの因果的応答関数 $h(x)$ の Fourier 変換 $\widehat{h}(\lambda)$ は

$$\widehat{h}(\lambda) = \frac{\mathcal{L}[h](i\lambda)}{\sqrt{2\pi}}$$

と表される。ここで、$\mathcal{L}[g](s)$ が g の Laplace 変換

$$\mathcal{L}[g](s) = \int_0^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{-xs}\,dx$$

である。

証明　まず、すべての $x < 0$ に対して $h(x) = 0$ であれば、そのフィルタが因果的であることを示す。$x < 0$ に対して入力が $f(x) = 0$ であるとき、$x < 0$ に対して $(Lf)(x) = 0$ であることを確認しよう。入力特性から

$$(Lf)(x) = (f * h)(x) = \int_0^{\infty} f(y)h(x-y)\,dy$$

であるが、$x<0$ および $y \geqq 0$ のときには、仮定より $h(x-y)=0$ である。よって、$x<0$ について $(Lf)(x)=0$ がわかった。

$h(x)$ の Fourier 変換

$$\widehat{h}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x}\,dx$$

を考えると、h が因果的であることから $x<0$ に対して $h(x)=0$ であることより

$$\begin{aligned}\widehat{h}(\lambda)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} h(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x}\,dx\\&=\mathcal{L}[h(x)/\sqrt{2\pi}](i\lambda)\end{aligned}$$

と表される。 ■

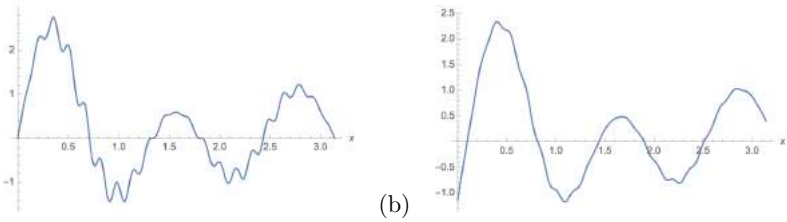


図 3.6　(a) 信号 $f(x)=\mathrm{e}^{-x/3}\big(\sin 3x+2\sin 5x+0.4\sin 2x\sin 40x\big)$ の $[0,\pi]$ でのグラフ。(b) フィルタを通った $f*h(x)$ の $[0,\pi]$ グラフ。図 (a) の低い周波数での挙動は保存されているが、高い周波数の挙動は除去されている（ローパス）。

例 3.35 (Butterworth フィルタ) [22, 6 章 2 節 F 項] で紹介されている S.Butterworth が提案（1930 年）したローパス（low pass）フィルタは雑音（一般に高い周波数を含む）の除去に利用されている。数 a,b を正のパラメータとして、システム関数 h を

$$h(x)=\begin{cases}a\,\mathrm{e}^{-bx} & x\geqq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

とする。定理 3.34 より、このフィルタは因果的で

$$\widehat{h}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathcal{L}h)(i\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{a}{b+i\lambda}$$

であることは容易に確かめられる。式 (3.23) $\widehat{L[f]}(\lambda) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}\widehat{h}(\lambda)$ からわかるように、この場合に $\widehat{h}(\lambda)$ は $\lambda \to \infty$ で零に減衰するため、フィルタ出力における高周波数も減少していくことになる（この効果が hight cut であり、low pass である）。実際、ローパスフィルタの効果は λ について

$$\left|\frac{\widehat{h}(\lambda)}{\widehat{h}(0)}\right| = \frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda^2}}$$

の程度になる。

試しに、入力信号 f として次を考えてみよう（図 3.6(a)）。

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x/3}\big(\sin 3x + 2\sin 5x + 0.4\sin 2x \sin 40x\big) \tag{3.25}$$

上のシステム関数において、$a = b = 10$ と選んだときのフィルタ出力は次のようにたたみこみ $f * h$ で与えられる（図 3.6(b)）。

$$\begin{aligned} f * h(x) = -0.292842\mathrm{e}^{-x/3}\big(&\cos 3x + 2.88305\cos 5x - 0.0429412\cos 38x \\ &+ 0.0355433\cos 42x - 3.22222\sin 3x - 5.5739\sin 5x \\ &- 0.168803\sin 38x + 0.15443\sin 42x\big) \end{aligned}$$

図 3.6(b) で示されているように、フィルタ出力は入力信号の低い周波数成分は保存され、高い成分が除去されており、確かにローパスになっている。

演習 3.36 図 3.6(a) および (b) を Mathematica で描きなさい。

3.5 標本化定理

定義 3.37 (帯域制限関数) $f(x) \in L^2[\mathbb{R}]$ が**帯域制限**（band limitted）関数であるとは、ある定数 $\Omega > 0$ が存在して Fourier 変換 $\widehat{f}$ のサポートが $[-\Omega, \Omega]$、つまり

$$|\lambda| > \Omega \text{ について} \qquad \widehat{f}(\lambda) = 0$$

であることである。2Ω をバンド幅という。$\Omega > 0$ が帯域制限関数の最小値のとき、振動数 $\mu = \frac{\Omega}{2\pi}$ を **Nyquist 振動数**（Nyquist frequency）、$2\mu = \Omega/\pi$ を Nyquist 率という。

定理 3.38 (Shannon-Whittaker の標本化定理) 関数 f は、$\widehat{f}(\lambda)$ が区分的に滑らかで連続、バンド幅 2Ω を持つ帯域制限関数で $|\lambda| > \Omega$ に対して $\widehat{f}(\lambda) = 0$ とする。

このとき、$f = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}]$ は標本間隔 π/Ω の点列 $x_k = \pi k/\Omega, k = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots$ の値 $\{f(x_k)\}$ だけで完全に定まり、一様収束する級数

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega x - k\pi)}{\Omega x - k\pi} \tag{3.26}$$

で与えられる。

証明　Fourier 基底の直交性に関する定理 2.6 および定義 2.9 の Fourier 区間の一般化（$a = \Omega, x = \lambda$）より、$\widehat{f}(\lambda)$ を帯域が制限された区間 $[-\Omega, \Omega]$ 上の Fourier 級数に展開する。

$$\widehat{f}(\lambda) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell \mathrm{e}^{i\pi\ell\lambda/\Omega}, \quad c_\ell = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \widehat{f}(\lambda) \mathrm{e}^{-i\pi\ell\lambda/\Omega}\, d\lambda$$

$|\lambda| \geqq \Omega$ について $\widehat{f}(\lambda) = 0$ であるため、展開係数 c_ℓ の計算式においては積分区間をもちろん $(-\infty, \infty)$ に拡大することができて、

$$c_\ell = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) \mathrm{e}^{-i\pi\ell\lambda/\Omega}\, d\lambda.$$

定理 3.8 の Fourier 反転公式を使うと、この c_ℓ は次のように表されることに注意する。

$$c_\ell = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} f\big(-\ell\pi/\Omega\big)$$

この形の c_k を Fopurier 級数の式に代入し、和の添字 ℓ を $k = -\ell$ に置き換えると

$$\widehat{f}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} f\big(k\pi/\Omega\big) \mathrm{e}^{-i\pi k\lambda/\Omega} \tag{3.27}$$

を得る。$\widehat{f}$ は仮定より連続な区分的に滑らかな関数であることから、定理 2.40 によって、展開式 (3.27) は一様収束する。したがって、定理 3.8 の Fourier 反転公式から、次がわかる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) \mathrm{e}^{i\lambda x}\, d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} \widehat{f}(\lambda) \mathrm{e}^{i\lambda x}\, d\lambda \quad \widehat{f}(\lambda) \text{ の帯域制限性から} \end{aligned}$$

ここで式 (3.27) を使って、$\widehat{f}$ と積分と総和の順序を交換すると

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} f\big(k\pi/\Omega\big) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} \mathrm{e}^{-i\frac{\pi k\lambda}{\Omega}+i\lambda x}\, d\lambda \tag{3.28}$$

である。最後に、式 (3.28) の積分は次のようになる

$$\int_{-\Omega}^{\Omega} \mathrm{e}^{-i\frac{\pi k\lambda}{\Omega}+i\lambda x}\, d\lambda = 2\Omega \frac{\sin(\Omega x - k\pi)}{\Omega x - k\pi}$$

ことを使うと、証明すべき目的の式 (3.26) を得る。 ■

注意 3.39 式 (3.26) の収束性は、各項の絶対値が $\mathcal{O}\big(j^{-1}\big)$ 程度で減衰することから、遅いことがわかる。実用上は、**オーバーサンプリング**（over sampling）することによって、$\mathcal{O}\big(j^{-2}\big)$ に減衰させて収束性を改良することができる。

一方、Nyquist 率より悪い標本化（それよりも少ない振動数での標本化）を行って、f を式 (3.26) で再現しようとした場合には、含まれるべき高い周波数成分が失われてしまうばかりか、もともと含まれていなかったような低い周波数成分を含むようになる。この現象が**エイリアシング**（aliasing）である。

3.5.1　標本化定理の応用例

原点近傍に波束がある関数 $f(x)$ として、図 3.7(a) のような関数

$$f(x) = \mathrm{e}^{-0.2t^2} \cos 3t$$

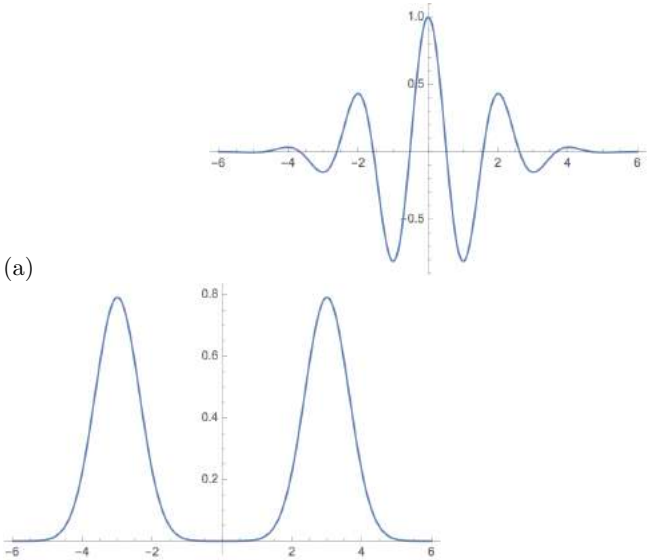
を考えてみる。$f(x)$ の Fourier 変換 $\widehat{f}(\lambda)$ を計算することが可能であるが、次のようにして Mathematica で実行することができる。

```
packet[t_] := Exp[-0.2 t^2] Cos[3 t]
ftpacket[lambda_] = FourierTransform[packet[x], x, lambda]
```

すると次の結果を得る。

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x}\, d\lambda \\ &= 0.790569\left(\cosh 1.25(\lambda-3)^2 - \sinh 1.25(\lambda-3)^2\right) \\ &\qquad + 0.790569\left(\cosh 1.25(\lambda+3)^2 - \sinh 1.25(\lambda+3)^2\right)\end{aligned}$$

$\widehat{f}(\lambda)$ のグラフは図 3.7(b) のようになり、$|\lambda| > 6$ の範囲では事実上 $\widehat{f}(\lambda) \approx 0$ であるが数学的な意味で $\widehat{f}(\lambda) = 0$ となる λ は $\pm\infty$ であって、この関数は厳密には帯域制限関数とはいえない。



(a)　(b)

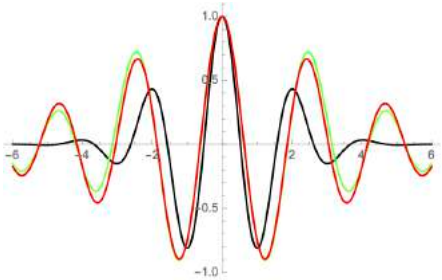
図 3.7　(a) $f(x) = \mathrm{e}^{-0.2t^2}\cos 3t$ のグラフ。波束は原点近傍に集中している。(b) $f(x)$ の Fourier 変換 $\widehat{f}(\lambda)$ のグラフ。$|\lambda| > 6$ の範囲では $\widehat{f}(\lambda) \approx 0$ であるようにみえるが、$\lambda = \pm\infty$ でのみ $\widehat{f}(\lambda) = 0$ となり、この関数は厳密には帯域制限関数とはいえない。

そこで、$|\lambda| \geqq \Omega_c$ に対して $\widehat{f}(\lambda) = 0$ と見なして、$\widehat{f}(\lambda)$ がサポート $[-\Omega_c, \Omega_c]$ を持つとしてみよう。設定した帯域区間 $[-\Omega_c, \Omega_c]$ に属さない成分をカットしてしまうのである。このとき、標本化定理 3.38 において正しい帯域幅 Ω に基づいた適切な標本値から関数を再現する級数式 (3.26) は、設定した帯域幅 Ω_c を使って標本間隔 π/Ω_c で $2n+1$ 個を標本した有限和

$$f_{\Omega_c}^{(n)}(x) = \sum_{k=-n}^{n} f\left(\frac{k\pi}{\Omega_c}\right) \frac{\sin \Omega_c x - k\pi}{\Omega_c x - k\pi} \tag{3.29}$$

が、元の関数 $f(x)$ をどのように近似するかが問題となる。

図 3.7(b) の $\widehat{f}(\lambda)$ のグラフを眺めて、帯域幅を $\Omega_c = 3$ および $\Omega_c = 4$ と設定し、式 (3.29) を使って関数回復を試みた結果が図 3.8 である。



(a)　　(b)

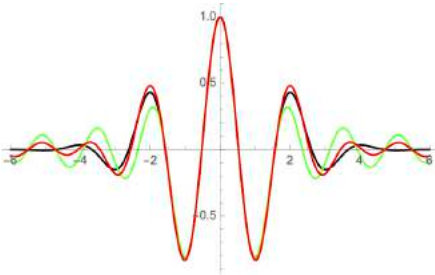


図 3.8　(a) 帯域幅 $\Omega_c = 3$ に設定し、式 3.29 を使って、$n = 2$（緑）、$n = 5$（赤）して近似した関数と関数 $f(x)$（黒）とを重ねて描いた。(b) 帯域幅 $\Omega_c = 4$ に設定し、式 3.29 を使って、$n = 2$（緑）、$n = 5$（赤）して近似した関数と関数 $f(x)$（黒）とを重ねて描いた。有限和で表される近似関数 $f_{\Omega_c}^{(n)}(x)$ において、適切な帯域幅を設定しておかない限り（(a) の場合は (b) に比べてカットしてしまう成分が多すぎる）次数 n を増やしても元の関数 $f(x)$ の回復には至らない。

図 3.8(a) は、帯域幅を $\Omega_c = 3$ に設定し、式 3.29 で定義される近似関数 $f_{\Omega_c}^{(n)}(x)$ を、$n = 2$（緑）、$n = 5$（赤）の倍について計算した関数を関数 $f(x)$（黒）とを対比して示したものである。次数 n を増やしていったとしても、カットされた周波数成分が多いために、元の $f(x)$ をよい精度で近似すると期待できない。

図 3.8(b) は、帯域幅を $\Omega_c = 4$ に設定し、式 3.29 で定義される近似関数 $f_{\Omega_c}^{(n)}(x)$ を、$n = 2$（緑）、$n = 5$（赤）の倍について計算した関数を関数 $f(x)$（黒）とを対比して示したものである。図 3.7(b) から分かるように帯域幅 $\Omega_c = 4$ の設定は、$\Omega_c = 3$ とするよりもカットされる周波数成分が格段にすくないために、少ない次数 $n = 2$ でも、図 3.8(a) に比べて十分うまく元の関数 $f(x)$ を近似している。

このように、カットされる周波数成分のエネルギー

$$\left(\int_{-\infty}^{-\Omega_c} + \int_{\Omega_c}^{\infty}\right) \left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2 d\lambda$$

を小さくするような帯域幅 Ω_c の設定が、標本値からの再構成には本質的であることがわかる。

第 4 章

超関数

4.1 一般化関数

通常の関数である ‘超関数もどき’ の極限によって超関数を導入する M.J. Lighthill の一般化関数の方法によって超関数を定義する [18] [*1]。これに対して、節 4.3.4 でみる Schwartz の理論では、無限回微分可能で、ある有界領域が存在してその外側で関数 ψ が恒等的に零である（コンパクトな台 suppψ を持つ）ような関数空間 $\mathscr{D}$ を考え、ベクトル空間 $\mathscr{D}$ 上の連続な線形汎関数によって超関数 χ を定義する [7]。$\mathscr{D}$ 上の連続な線形汎関数 χ は、$\phi \in \mathscr{D}$ に対して

$$\langle \chi \,|\, \psi \rangle$$

と式 (1.9) のように内積を用いて表される。

定義 4.1 どこでも何度でも微分可能な関数 $f(x)$ が**良い関数**（good function）または**急減少関数**（rapidly decreasing function）であるとは、関数 $f(x)$ とそのすべての導関数 $f^{(n)}(x)$ が $|x| \to \infty$ のときに全ての N について $\mathcal{O}\big(|x|^{-N}\big)$、つまり任意のベキ $\frac{1}{|x|^N}$ よりも速く零になることである。

定義 4.2 どこでも何度でも微分可能な関数 $f(x)$ が**かなり良い関数**（fairly good function）または**緩増加関数**（temptered distribution）であるとは、関数 $f(x)$ とそのすべての導関数 $f^{(n)}(x)$ が $|x| \to \infty$ のときにある m について $\mathcal{O}\big(|x|^m\big)$、つまりベキ $|x|^m$ よりも速く増加しないことである。

[*1] M.J. Lighthill のテキスト [18] は 70 ページ程度の小冊子ながら、L.Schwartz の厳密だが抽象的な系統だった [7] よりも直感的で ‘納得’ しやすい（数学的に納得できないからこそ Schwartz は超関数理論を構成したのだが）。

e^{-x^2} は良い関数、任意の多項式はかなり良い関数の例である。

定義 4.3 一般化関数（generalized function）あるいは**超関数**（distribution）$\chi(x)$ を、良い関数列 $h_n(x)$（'超関数もどき' 列）の次のような良い関数 $g(x)$ に対する積分値の極限

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\chi(x)g(x)\,dx$$

によって定義する。超関数は任意回数微分可能である。

超関数 $\alpha(x)$ と $\beta(x)$ が等しいとは、超関数もどき列 $a_n(x), b_n(x)$ が弱収束として等しいときで、超関数もどき列の選び方には依らない。

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a_n(x)g(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} b_n(x)g(x).$$

この超関数の定義は、「異常な振る舞いをする」関数の積分条件を強く制限的なものとせず、良い関数を使った超関数もどき列の極限で定義するという意味で関数概念を一般化している。緩増加関数 $f(x)$ を使って

$$f_n(x) = f(x)\mathrm{e}^{-x^2/n}$$

で与えた関数列 $f_n(x)$ は超関数もどき列である。$f_n(x)$ は確かに無限遠で多項式的にしかも指数因子 $\mathrm{e}^{-x^2/n}$ によって急減少関数として振る舞い

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dx$$

である。式 (4.1) の $D_n(x)$ がその簡単な例である。

超関数を定義する超関数もどき列がある点 $x = x_0$ の近傍で通常の関数に一様収束する場合がある。そのような点 $x = x_0$ を超関数の**正則点**（regular point）という。一方、$x = x_0$ での超関数もどきの極限での値を超関数の**局値**（local value）という。

超関数もどき関数列

$$D_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\mathrm{e}^{-nx^2} \tag{4.1}$$

を考えてみよう[*2]。$D_n(x)$ は、節 4.2 でデルタ関数 $\delta(x)$ に弱収束することがわかる。

[*2] 良い関数 $D_n(x)$ は、Hermite 多項式 $H_m(x)$（例 1.16(3)）に関する Rodriguez 公式から

$$\frac{d^m}{dx^m}D_n(x) = \frac{(-1)^m}{n^{m/2}}H_m(\sqrt{n}x)\,D_n(x)$$

を満たしていることがわかる。

任意の n について

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_n(x)\,dx = 1 \tag{4.2}$$

また、$x \neq 0$ について

$$\lim_{n\to\infty} D_n(x) = 0 \tag{4.3}$$

となって、$x \neq 0$ は正則点である。$x = 0$ では、$D_n(0) \to \infty$ となり、局値 $\delta(0)$ は異常な振る舞いをする。この事実によって、超関数 $\delta(x)$ を便宜的に

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

と表記することが多い。

4.1.1　一般化関数の性質

超関数もどき列の極限で定まる超関数の定義から直接導ける超関数の操作的性質をまとめておこう。超関数同士の和や緩増加関数との積、超関数微分、さらには（工夫すれば）超関数多項式の除算も超関数となって、通常の関数のように定義されるが、超関数同士の積は超関数にはなるとは言えないことに注意する。

以下、超関数に関する等式は良い関数と積分値として等しいと了解する。

(1) 超関数 $\alpha(x)$ と $\beta(x)$ の和は超関数 $\chi(x)$ である。

$$\chi(x) = \alpha(x) + \beta(x). \tag{4.4}$$

超関数 $\alpha(x), \beta(x)$ に収束する良い関数である超関数もどき列の和 $h_n(x) = a_n(x) + b_n(x)$ もまた良い関数であるからである。こうして定まる極限としての超関数はそれぞれの超関数もどき列の選び方には依らない。

(2) 超関数 $\alpha(x)$ とかなり良い関数（緩増加関数）$f(x)$ との積はまた超関数 $\chi(x)$ である。

$$\chi(x) = f(x)\alpha(x) \tag{4.5}$$

超関数 $\alpha(x)$ に収束する良い関数である超関数もどき列 $h_n(x)$ と $f(x)$ との積は良い関数である。とくに、定数もまた緩増加関数であるので、超関数 α の定数倍 c もまた超関数になる。

$$\chi(x) = c\,\alpha(x).$$

たただし通常の関数とは違い、**超関数同士の積は定義できない** [7, p.87] のが悩ましい。実際、超関数もどき列 $a_n(x)$ および $b_n(x)$ がそれぞれに超関数として収束したとしても

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big(a_n(x)b_n(x)\big) f(x)\,dx$$

が収束するわけではないためである。

(3) 超関数 $\chi(x)$ は任意回数微分可能である。とくに、良い関数 $f(x)$ について

$$\frac{d\chi(x)}{dx} f(x) = -\chi(x)\frac{f(x)}{dx}. \tag{4.6}$$

超関数 $\alpha(x)$ に収束する超関数もどき列 $a_n(x)$ は任意回数微分可能で、改めて

$$h_n(x) = \frac{d}{dx} a_n(x)$$

とおいた超関数もどき列は超関数

$$\chi(x) = \frac{d}{dx}\alpha(x)$$

に収束する。これらの関係は部分積分と急減少関数としての超関数もどき関数の性質を使うと次のようになる。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da_n(x)}{dx} f(x)\,dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} a_n(x)\frac{df(x)}{dx}\,dx.\end{aligned}$$

これより、極限として超関数をつかった次の積分式を得る。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha(x)}{dx} f(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\frac{df(x)}{dx}.$$

(4) 超関数 $\chi(x)$ の変数に関するスケール変換

$$\chi(ax+b)f(x) = \frac{1}{a}\chi(x) f\left(\frac{x-b}{a}\right). \tag{4.7}$$

超関数もどき列 $h_n(ax+b)$ を含む積分に変数変換 $x' = ax+b$ を適用して得られる。

4.2　デルタ関数の性質

超関数の一般的議論を避けて、超関数としてデルタ関数の性質を導いてみよう。デルタ関数の取り扱いや計算方法については [12] が優れている。

いささか乱暴であるが、以上の事柄は言い訳であるとして忘れてしまってもよい。以下では、デルタ関数を Fourier 変換表示

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \mathrm{e}^{ikx} \tag{4.8}$$

で定義されているものと考える。このとき、$x \neq 0$ で $\delta(x) = 0$ でありながら

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) = 1$$

であって、都合のよい関数 $f(x)$ に対し

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x')\delta(x - x')$$

が成立するというのである。

命題 4.4 デルタ関数 $\delta(x)$ は次のような性質を持つ。ただし、デルタ関数自身やデルタ関数を含む関係式は、原則、必要な ‘良い性質’ を持つ関数を掛けて積分を実行した意味で成立していると見なさねばならず、通常の点関数（定義域の各点ごとに値を取る関数）としては意味を有さないことに注意する。

(1) 良い関数 $f(x)$ に対して

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx \tag{4.9}$$

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x)\, dx \tag{4.9$'$}$$

特に、デルタ関数は偶関数。

$$\delta(-x) = \delta(x).$$

(2) 良い関数 $f(x)$ に対して積分内の関係として

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x) \tag{4.10}$$

特に、

$$x\delta(x) = 0 \tag{4.11}$$

(3) Heaviside の階段関数を

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

とする。これを局値 1 と 0 をそれぞれ $x > 0$ および $x < 0$ で取る超関数 $\theta(x)$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

と考える。このとき

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x). \tag{4.12}$$

(4) デルタ関数の Fourier 変換と逆変換表示

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \mathrm{e}^{i\lambda(x-x')} \tag{4.13}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x}\, dx. \tag{4.14}$$

式 (4.13) をデルタ関数の定義とする場合も多い。式 (4.14) は $\delta(x)$ の Fourier 変換が 1 であることを示している。

(5)

$$\delta(ax) = a^{-1}\delta(x) \tag{4.15}$$

(6) 重根を持たない方程式

$$F(x) = 0$$

の単純解を $\{x_i\}$ とする。このとき

$$\delta(F(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left|\dfrac{dF}{dx}\right|_{x-x_i}}. \tag{4.16}$$

特に

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a}\big(\delta(x - a) + \delta(x + a)\big). \tag{4.17}$$

(7) $\delta'(x) = \dfrac{d}{dx}\delta(x)$ として

$$x\delta'(x) = -\delta(x),$$
$$\delta'(x) = -\delta(-x).$$

証明

(1) 超関数もどき列 $D_n(x)$ の極限として $\delta(x)$ に弱収束して

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} D_n(x)f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)\,dx = f(0)$$

を示す。平均値の定理から、任意の x に対して $\xi(x)$ が存在して $f(x) = f(0) + f'(\xi)x$ である。したがって、次の評価を得る。

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\mathrm{e}^{-nx^2}f(x)\,dx - f(0)\right| \\
&\quad = \left|\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\mathrm{e}^{-nx^2}\frac{df(\xi)}{dx}\,dx\right| \\
&\quad \leqq \max\left\{\left|\frac{df}{dx}\right|\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}|x|\mathrm{e}^{-nx^2}\,dx \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\max\left\{\left|\frac{df}{dx}\right|\right\} \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

第 2 式の偶関数性はデルタ関数もどきを $D_n(x)$ としたときなどには明かであるが、性質 (1) を使ってデルタ関数もどき関数列の取り方に依存しない証明が可能である。

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-y)\delta(y)\,dy \\
&= f(0) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\big(f(x)\delta(x)\big)g(x)\,dx &= f(0)g(0) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\big(f(0)\delta(x)\big)g(x)\,dx
\end{aligned}$$

(3) $H(x)$ は $x=0$ で微分不可能であるが、超関数はどこでも微分可能で、その結果も超関数である。部分積分と $f(x)$ が無限遠で急減少関数であることを使うと次のようになる。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\theta(x)}{dx}f(x)\,dx &= -\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x)\frac{df(x)}{dx}\,dx\\ &= -\int_{-\infty}^{\infty}H(x)\frac{df(x)}{dx}\,dx\\ &= -\int_{0}^{\infty}\frac{df(x)}{dx}\,dx = f(0).\end{aligned}$$

(4) Gauss 公式を使って超関数もどき $D_n(x)$ はつぎのように表される（式 (4.1)）。

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}}\mathrm{e}^{-nx^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\lambda x-\lambda^2/4n}\,d\lambda.$$

関数列 $\mathrm{e}^{-\lambda^2/4n}/\sqrt{2\pi}$ は定数超関数 $1/\sqrt{2\pi}$ に収束することから、節 3.1 の Fourier 変換の定義より結果を得る。
あるいは、良い関数 $f(x)$ の Fourier 変換 $\widehat{f}(\lambda)$ とその反転公式 (3.7) を使って、Fourier 積分公式 $(3.5)'$ から形式的に次のように導くこともできる（積分の順序を交換するという禁を犯しているのだが）。

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\,\mathrm{e}^{i\lambda x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dx'\,\mathrm{e}^{-i\lambda x'}f(x')\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\,f(x')\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\mathrm{e}^{i\lambda(x-x')}.\end{aligned}$$

式 (4.13), (4.14) は、$\delta(x)$ を定数超関数 $1/\sqrt{2\pi}$ の Fourier 変換であることを示しており、その反転関係である。さらに、$\lambda=0$ とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx = 1,$$

また、性質 (2) から $f(x)$ を良い関数とするとき

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)\,dx = f(0)$$

が得られる。

(5) 一般化関数の性質 4.1.1(4) において、超関数 $\chi(x)$ を $\delta(x)$、$f(x)=1$ とする。

(6) $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\delta(x)\,dx = f(0)$ より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(F(x))g(x)\,dx = \sum_i \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(F)g(x(F))\,\frac{dF}{\left|\dfrac{dF}{dx}\right|}$$
$$= \sum_i \frac{g(x_i)}{\left|\dfrac{dF}{dx}\right|_{x=x_i}}$$

(7) 一般化関数の性質 4.1.1(3) において、超関数 $\chi(x)$ を $\delta(x)$、$f(x) = x$ として第 1 式を得る。第 2 式は、第 1 式から次のようにしてわかる。

$$\begin{aligned} x\delta'(x) &= -\delta(x) \qquad \text{第 1 式から} \\ &= -\delta(-x) \qquad \text{デルタ関数の偶関数性} \\ &= -\Big(-(-x)\delta(-x)\Big) \qquad \text{第 1 式から} \\ &= -x\delta'(-x). \end{aligned}$$

■

4.3 Fourier 変換を使った微分方程式の解法

4.3.1 波動方程式

線形な 1 階偏微分方程式 (移送方程式)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial x} \tag{4.18}$$

は $t = 0$ で初期波形 $f(x)$ を持つ進行波解 $u(x,t) = f(x - ct)$ を持つ（c は定数)。この事実は、進行波 $f(x - ct)$ を直接代入することによって確かめることできる。ここでは $f(x)$ は何回でも微分できる急減少関数

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^m f^{(n)}(x) = 0$$

と仮定する。

方程式 (4.18) の解 $u(x,t)$ を x に関する Fourier 変換 $\widehat{u}(\lambda,t)$ を使って求めてみよう。方程式 (4.18) を Fourier 変換し、Fourier 変換の性質 (3.11)

$$\widehat{u}'(\lambda,t) = -i\lambda\widehat{u}(\lambda,t)$$

に注意すると、問題はパラメータ λ に依存した定数係数 1 階常微分方程式の初期値問題

$$\frac{d}{dt}\widehat{u}(\lambda,t) = -ic\lambda\widehat{u}(\lambda,t), \quad \widehat{u}(\lambda,0) = \widehat{f}(\lambda)$$

になる。これは直ちに解けて

$$\widehat{u}(\lambda,t) = \widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{-ic\lambda t}$$

を得る。$u(x,t)$ を求めるために Fourier 逆変換すると、途中で積分の順序を交換してデルタ関数の Fourier 変換表示の式 (4.13) を使うと、次のように進行波解を得る。

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}[\widehat{u}](x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \widehat{u}(\lambda,t)\mathrm{e}^{i\lambda x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda(x-ct)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \mathrm{e}^{i\lambda(x-ct)}\left(\int_{\infty}^{\infty} dy\, f(y)\mathrm{e}^{-i\lambda y}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \mathrm{e}^{i\lambda(x-ct-y)}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\delta(x-ct-y) \\
&= f(x-ct)
\end{aligned}$$

さて、次の線形波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.19}$$

について、一般解 $u(x,t)$ を求めてみよう（$c > 0$）。

解 $u(x,t)$ の初期条件を

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,t) = \partial u(x,t)/\partial t = g(x)$$

として、どちらも急減少関数を仮定する。式 (4.19) を Fourier 変換すると、次の 2 階定係数常微分方程式を得る。$u(x,t)$

$$\frac{d^2}{dt^2}\widehat{u}(\lambda,t) = -c^2\lambda^2\widehat{u}(\lambda,t), \quad \widehat{u}(\lambda,0) = \widehat{f}(\lambda), \widehat{u}_t(\lambda,0) = \widehat{g}(\lambda)$$

波動方程式の解 $u(x,t)$ もまた急減少関数であるとしよう。このとき、波動方程式 (4.19) の初期値問題の解として

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} dy\, g(y) \tag{4.20}$$

が得られる。

演習 4.5 式 (4.20) が波動方程式 (4.19) の初期値問題の解であることをデルタ関数を使って計算しなさい。

4.3.2 拡散方程式

線形拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \kappa > 0,\ \alpha \text{ は定数} \tag{4.21}$$

の初期値問題 $u(x,0) = f(x)$ を考える。係数 κ を**拡散係数** (diffusion coefficient)、α を**移送係数** (drift coefficient) という。解 $u(x,t)$ を時刻 t における拡散現象の密度関数

$$u(x,t) \geqq 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, u(x,t) = 1$$

と見なすとわかりやすい。時刻 $t = 0$ の初期密度 $f(x)$ が、時間と共にどのように拡散変化するかが式 (4.21) で記述されているという描像である。

これを解くために、節 4.3.1 の波動方程式で行った処方箋を実行してみよう。

$u(x,t)$ を x に関する Fourier 変換とその反転公式

$$\widehat{u}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-2\pi i \xi x} u(x,t)$$
$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \mathrm{e}^{2\pi i \xi x} \widehat{u}(\xi,t)$$

を使って、式 (4.21) を Fourier 変換する（ここでは式 3.7″ を使った）。以下では、$u(x,t)$ は区間 $-\infty < x < \infty$ および $0 \leqq t$ で定義される十分性質のよい関数で、偏微分と積分の順序の交換が可能だとする。$\widehat{u}(\xi,t)$ が満たす式は次の 2 階常微分方程式となる。

$$\frac{d}{dt}\widehat{u}(\xi,t) = \big(-4\pi^2\kappa\xi^2 - 2\pi i\alpha\xi\big)\widehat{u}(\xi,t), \quad \widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi). \tag{4.22}$$

$\widehat{u}(\xi,t)$ は直ちに解けて

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi) \exp\big[(-4\pi^2\kappa\xi^2 - 2\pi i\alpha\xi)t\big]$$

となる。反転公式を使って逆変換すると、初期値問題の解 $u(x,t)$ は次のように書ける。

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \widehat{f}(\xi) \exp\left[(-4\pi^2\kappa\xi^2 - 2\pi i\alpha\xi)t\right] \exp(-2\pi i\xi x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \widehat{f}(\xi) \exp(-4\pi^2\kappa\xi^2 t) \exp\big(-2\pi i\xi(x+\alpha t)\big) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \left[\int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y) \mathrm{e}^{2\pi i\xi y}\right] \exp(-4\pi^2\kappa\xi^2 t) \exp\big(-2\pi i\xi(x+\alpha t)\big) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \mathrm{e}^{-4\pi^2\kappa\xi^2 t} \mathrm{e}^{-2\pi i\xi((x-y)+\alpha t)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy\, D((x+\alpha t)-y,t) f(y). \qquad (4.23)
\end{aligned}
$$

ここで関数 $D(x,t)$ を $\exp(-4\pi^2\kappa\xi^2 t)$ の逆 Fourier 変換として次で定義した。

$$
D(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \mathrm{e}^{-4\pi^2\kappa\xi^2 t} \mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}. \qquad (4.24)
$$

$\kappa > 0$ より、定義式 (4.24) は $t > 0$ でのみ収束することがわかり、またデルタ関数の Fourier 変換表示の定義から

$$
D(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-2\pi i\xi x} = \delta(x) \qquad (4.25)
$$

となっている。定義式 (4.24) から、$D(x,t)$ は

$$
\frac{\partial D}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}
$$

を満たし、このことからさらに、$D(x+\alpha t,t)$ は拡散方程式 (4.21) の解になっていることも確かめられる。

式 (4.23) を計算しよう。まず、

$$
u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, D(x-y,0) f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \delta(x-y) f(y) = f(x) \qquad (4.26)
$$

と初期値関数が得られる。$A = 4\pi^2\kappa t > 0, B = 2\pi x$ とおいて、

$$
D(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dxi\, \mathrm{e}^{-A\xi^2 - iB\xi}
$$

を書き換えると $\sqrt{A}\xi = k, d\xi = dk/\sqrt{A}$, $\beta = B/2\sqrt{A}$ として

$$D(x,t) = \frac{\exp(-\frac{B^2}{4A})}{\sqrt{A}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \mathrm{e}^{-(k+i\beta)^2}$$

が得られる。全複素平面で正則な関数 $\exp(-z^2)$ を実軸 $(-R, R)$ を通って複素平面を反時計回りに巡る（たとえば長方形の）積分路 Γ に沿った積分は Cauchy の定理から

$$\int_{\Gamma} dz\, \mathrm{e}^{-z^2} = 0.$$

これより、$r \to \infty$ とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \mathrm{e}^{-(k+i\beta)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \mathrm{e}^{-k^2} = \sqrt{\pi}$$

を得る。したがって

$$D(x,t) = \frac{\exp(-\frac{B^2}{4A})\sqrt{\pi}}{\sqrt{A}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\kappa t}}$$

と計算できた。式 (4.25) に注意すると、デルタ関数との関係式

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} = \delta(x)$$

が得られる。

これより、拡散方程式 (4.21) の初期値問題の解 (4.23) は次のようになる。

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \exp\left(-\frac{(x-y+\alpha t)^2}{4\kappa t}\right) f(y) \tag{4.27}$$

式 (4.26) に注意すると、関数 $f(x)$ を持つ初期分布 $u(x,0)$ は時間と共に $x + \alpha t$ と移送されながら $\sqrt{\kappa t}$ に比例する広がり（**分散**) で拡散していくことがわかった。

演習 4.6 拡散方程式 (4.21) において係数を $\kappa = 1$, $\alpha = 0.3$、初期値関数を

$$f(x) = \begin{cases} 50, & |x| \leqq 0.01 \\ 0, & |x| > 0.01 \end{cases}$$

とする。このときの拡散方程式の解を求め、その時間発展の様子を Mathematica で描いてみなさい。

4.3.3　Green 関数の方法

線形な偏微分方程式は Fourier 変換することによって等価な常微分方程式の問題に帰着させることができた。同様に、常微分方程式においては代数方程式に還元することができる。こうした方法は非常に深い内容を含んでいる [14]。次の定係数非斉次常微分方程式の解を考えてみよう。

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+p\frac{d}{dx}+q\right]f(x)=R(x) \tag{4.28}$$

両辺を Fourier 変換 $\mathcal{F}$ すると

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{d^2f}{dx^2}+p\frac{df}{dx}+qf\right)&=\left[(i\lambda)^2+p(i\lambda)+q\right]\widehat{f}\\&=\mathcal{F}(R)=\widehat{R}.\end{aligned}$$

これより、式 (4.28) の解は

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\,\mathrm{e}^{i\lambda x}\widehat{f}(\lambda) \tag{4.29}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\,\mathrm{e}^{i\lambda x}\frac{\widehat{R}(\lambda)}{-\lambda^2+ip\lambda+q}. \tag{4.30}$$

ここで、方程式 (4.28) の非斉次関数が

$$R(x)=\delta(x)$$

であるとき、式 (4.8) から、その Fourier 変換 $\mathcal{F}(R)$ は $\widehat{\delta}(\lambda)=(1/2\pi)^{-1/2}$ に注意する。このとき、式 (4.30) は微分方程式

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+p\frac{d}{dx}+q\right]G(x)=\delta(x) \tag{4.31}$$

の解 $G(x)$ は、$(2\pi)^{-1/2}$ に微分作用素の Fourier 変換の逆数を書けた Fourier 変換を持つように書けている。形式的にいえば、非斉次微分方程式 (4.28) は線形作用素 $\mathcal{L}(x)$ を使って

$$\mathcal{L}(x)f(x)=R(x) \tag{4.32}$$

と表されている。このとき、方程式

$$\mathcal{L}(x)G(x)=\delta(x) \tag{4.33}$$

を満たす解 $G(x)$ は、式 (4.30) で $\widehat{R} = (2\pi)^{-1/2}$ とし、作用素 $\mathcal{L}(x)$ の Fourier 変換の逆数の形の Fourier 変換表示を持っていることになる。$G(x)$ を微分作用素 $\mathcal{L}(x)$ の **Green 関数**という。

Green 関数はたいへん有用であることがわかる。もし、式 (4.33) を満たす Green 関数が得られたとき、非斉次方程式 (4.32) の解は次の積分表示を持つからである。

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, G(x-x')R(x') \tag{4.34}$$

実際，式 (4.34) を方程式 (4.32) に代入してみると

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[\mathcal{L}(x)G(x-x')\right]R(x') &= \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, \delta(x-x')R(x') \\ &= R(x)\end{aligned}$$

が確認できる。

式 (4.34) は Green 関数 $G(x)$ と非斉次関数 $R(x)$ とのたたみ込み (convolution) $f(x) = G * R(x)$ になっている（節 3.3）。

たたみ込みの Fourier 変換についての定理 3.25 から、それぞれの関数の Fourier 変換とは

$$\mathcal{F}(G * R) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(G)\mathcal{F}(R)$$

の関係にある。改めて、非斉次方程式 (4.32) を使うと次のようになっている。

$$\mathcal{F}(f) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(G)\mathcal{F}(\mathcal{L}f).$$

このことは、式 (4.33) を満たす Green 関数は、微分作用素 $\mathcal{L}(x)$ の逆操作としてみなせることを表している。

例 4.7 (強制振動子) 次の強制振動子の解を求めてみよう。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = R(x), \quad \beta, \omega_0 > 0. \tag{4.35}$$

解 $x(t)$ は式 (4.34) の形の積分表示を持つ。このとき、Green 関数 $G(x)$ は次の方程式の解である。

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\beta\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right] G(x) = \delta(x).$$

$G(x)$ の Fourier 変換 $\widehat{G}(\omega)$ は直ちに計算できて

$$\begin{aligned}\widehat{G}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d(t-t')\,\mathrm{e}^{-i\omega(t-t')}G(t-t') \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)+i2\beta\omega}\end{aligned}$$

を得る。したがって、求める Green 関数は

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\mathrm{e}^{i\omega t}\widehat{G}(\omega)$$

となる。Fourier 変換の演習 3.17 結果を使うと、次のように計算できる。

$$G(t) = \frac{1}{\omega_1}\mathrm{e}^{-\beta t}\sin\omega_1 t\cdot\theta(t).$$

ここで、$\theta(t)$ は階段関数

$$\theta(t) = \begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 1\end{cases}$$

および

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

である。これより、解 $x(t)$ は次のようになる。

$$x(t) = \frac{1}{\omega_1}\int_{-\infty}^{t} dt'\,\mathrm{e}^{-\beta(t-t')}\sin\omega_1(t-t')R(t')$$

ここで、階段関数で表された Green 関数より、変数 t' に関する積分の上限が t になることを使った。

強制力 $R(t')$ が周期関数

$$R(t') = \mathrm{e}^{i\Omega t}$$

で与えられているとき、方程式 (4.35) の解として次を得る。

$$x(t) = \frac{\mathrm{e}^{i\Omega t}}{(\omega_0-\Omega)^2+i2\beta\Omega} \tag{4.36}$$

演習 4.8 式 (4.36) が強制振動子の (4.35) の解であることを導きなさい。

4.3.4　Schwartz の超関数

Lighthill の急減少関数をつかった超関数もどき列の極限として超関数を定義 4.3 する一般化関数の方法は、‘通常の解析学’ の範囲で超関数を　理解するには都合がよいが、超関数として取り扱わねばならない一般的な場面で計算するには少々見通しが悪い。

L.Schwartzh の超関数は、ベクトル空間 $\mathscr{D}$ 上の連続な線形汎関数によって定義される [7]。

4.4　量子力学とデルタ関数

Dirac はデルタ関数を導入することによってブラケット記法によって首尾一貫した量子力学的記述が可能になることを発見した [11]。ブラケット記法では、関数 $f(x)$ はケット $|f\rangle$ の位置表示として表される。

区間 $[a,b]$ 上の関数空間に属する f と g に対する内積 $\langle f\,|\,g\rangle_{L^2}$ の定義 1.13 を思い起こそう。

$$\langle f\,|\,g\rangle = \int_a^b dx\, f(x)^* g(x)\, w(x). \tag{1.9$'$}$$

この関数内積の表式は $\mathbb{C}^n$ 内のベクトル x, y に対する第 i-成分 x_i と y_i に関する総和としての内積

$$\langle x\,|\,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k^* y_k \tag{1.1$'$}$$

を拡張して、関数の x-成分 $f(x)$ と $g(x)$ に関する重み付き積分として与えた形になっている。n-次元ベクトル a の基底 $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ による展開

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i\,|e_i\rangle\,, \qquad a_i = \langle e_i\,|\,a\rangle$$

からの類推として、以下、全く形式的に議論を進めてみよう。

関数空間において形式的に連続的な添字を持つ基底 $|x\rangle$ を導入して $|f\rangle$ の x-成分が

$$f(x) = \langle x\,|\,f\rangle \tag{4.37}$$

と表してみよう。これを $|f\rangle$ の **x-表示**または**位置表示**という（位置 x は物理的に連続的値をもつからである）。しかしながら、直ちに基底 $|x\rangle$ の直交性と規格化に関する問題が浮上する。$|x\rangle$ と $|x'\rangle$ の直交性を

$$x \neq x' \text{ について} \qquad \langle x \,|\, x' \rangle = 0 \tag{4.38}$$

を仮定して、定理 1.41 の式 (1.31) の代わりに、$|f\rangle$ の展開を次式で書く。

$$|f\rangle = \int_a^b dx\, w(x) f(x)\, |x\rangle \tag{4.39}$$

$$= \int_a^b dx\ |x\rangle\, w(x)\, \langle x \,|\, f\rangle \tag{4.40}$$

この結果は、射影演算子 $|x\rangle\langle x|$ から構成された関数空間上の恒等射影

$$\hat{\mathcal{I}} = \int_a^b dx\ |x\rangle\, w(x)\, \langle x| \tag{4.41}$$

を定義していると見なすことができることに注意しよう。

このとき、$|f\rangle$ にブラ $\langle x'|$ を作用させると次を得る。

$$\langle x' \,|\, f\rangle = f(x') = \int_a^b dx\, w(x) f(x)\, \langle x' \,|\, x\rangle\,. \tag{4.42}$$

このことから、式 (4.38) を満たす $\langle x' \,|\, x\rangle$ は脚注**??**のデルタ関数

$$\begin{aligned}\langle x' \,|\, x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{w(x)w(x')}}\delta(x-x') \\ &= \frac{1}{w(x)}\delta(x-x') \\ &= \frac{1}{w(x')}\delta(x-x')\end{aligned}$$

であることがわかる。したがって、式 (4.39) はデルタ関数を使って

$$f(x') = \int_a^b dx\, f(x)\delta(x-x') \tag{4.43}$$

と書くことができる。これはデルタ関数の代表的関係式で、Kronecker デルタを使った $a_i = \sum_k a_k \delta_{i,k}$ の連続版である。通常の関数 f に対してこのような関係を満たすような関数 $\delta(x)$ を考えることは困難で、関数概念を一般化して考える必要があった。これが Schwartz の超関数の理論 [7] である。

式 (4.41) の恒等演算子 $\hat{\mathcal{I}}$ に左右から $\langle x'|$ および $|x''\rangle$ を作用させると、次を得る。

$$\delta(x'-x'') = \int_a^b dx\, \delta(x'-x)\delta(x-x'') \tag{4.44}$$

これは $\delta_{i,j} = \sum_k \delta_{i,k}\delta_{k,j}$ の連続版である。

4.4.1　固有関数としてのデルタ関数

Dirac が量子力学の構築においてデルタ関数を導入したのは、観測される物理量は**オブザーバブル**（observable）と呼ぶ Herimite 演算子 $\hat{\mathcal{O}}$ の固有値であるという基本原理のためである。オブザーバブルの測定によって値 o を測定するとき、その量子力学的状態 $|\phi\rangle$ は $\hat{\mathcal{O}}$ の固有値 o に対応した固有ベクトルになっているというのである。

$$\hat{\mathcal{O}}\,|\phi\rangle = o\,|\phi\rangle$$

位置もまた物理量である。値 x' が測定されたということは、対応する Hermite 的である位置演算子 $\hat{x}$ があって固有値 x' に対応した固有状態 $|x'\rangle$ になっているという関係が成立していなければならない。

$$\hat{x}\,|x'\rangle = x'\,|x'\rangle\,.$$

位置演算子 $\hat{x}$ の行列表示 $\langle x|\,\hat{x}\,|x'\rangle$ は次のようになる。

$$\langle x|\,\hat{x}\,|x'\rangle = x'\,\langle x\,|\,x'\rangle$$

状態 $|x\rangle$ と $|x'\rangle$ は $x' \neq x$ のときには式 (4.38) のように直交し、一方、量子状態 $|x\rangle$ は規格化されている。

$$\int dx\,\langle x\,|\,x\rangle = 1$$

このような量子力学的位置状態 $|x\rangle$ を表すために、Dirac はデルタ関数を導入したのである [11, p.78,p.438 の訳注]。

第 5 章

離散信号と離散 Fourier 変換

5.1 離散信号

定義 1.17 では、無限個の成分を両側無限列としてならべた数列 $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$ に関して内積が定められる ℓ^2 空間を定義した。このような数の並びを対象とする場合、こうした数列を信号ということにしよう。

定義 5.1 離散信号（signal）とは

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)| < \infty$$

を満たす数列 $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$ である。信号 x の n 番目の信号要素を $x(n)$ と記して、誤解のない限り信号 x を単に $x(n)$ と表すこともある（信号の要素を自然数で指定する故に離散と称する）。ℓ^2 空間に属する $\sum_n |x(n)|^2 < \infty$ であるような信号を有限エネルギーを持つ信号という。

離散信号として、区間 $[a, b]$ 上の関数 f を標本化したものを扱うことがある。実際、音楽のデジタル信号はある定まった時間間隔での測定値から得られている。さだまった時間間隔 T [sec] ごとに f の値を測定するとき、単位時間あたりの標本回数 $\nu = 1/T$[Hz] を**周波数**、$\omega = 2\pi\nu$ を**角周波数**という（節 2.1 の用語を参照）。数列の並びとしての信号が与えられている場合、その信号が必ずしもある関数を等間隔で測定した値であるとは限らない。いま、関数の定義区間 $[a, b]$ を N 等分し、幅 $\Delta x = (b - a)/N$ ごとに N 回測定（標本）したとする。定理 3.38 の標本化定理によると、$|\lambda| > \Omega$ に対して $\widehat{f}(\lambda) = 0$ であるようなバンド幅 2Ω を持つ帯域制限関数 $f = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}]$ を一定間隔 $T = \pi j/\Omega$ で標本化して得られる離散信号 $\left\{f\left(\pi j/\Omega\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}\Big\}$

は元の連続的信号 f を再現することができる。したがって、Nyquist 振動数よりも低い率で標本化して得られた離散信号列では、元の信号は近似的にしか再現できない。

定義 5.2 **フィルタ**（filter）とは、入力信号 x を出力信号 y にする変換 L である。

$$Lx = y \qquad \text{（信号の } n \text{ 番目の成分に着目すると、} Lx\,(n) = y\,(n).$$

(1) フィルタが L が線形とは、信号 $x_1(n)$, $x_2(n)$ と定数 a, b に対して次が成立することである。

$$L(ax_1 + bx_2)(n) = aLx_1(n) + bLx_2(n).$$

(2) 線形フィルタ L が**安定**とは、ある定数 C が存在して、すべての信号 $x(n)$ に対して次が整理することである。

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |Lx(n)| \leqq C \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|.$$

(3) $k \in \mathbb{Z}$ について、信号に対する**平行移動演算子** τ_k を次のように定義する。

$$\tau_k x(n) = x(n-k).$$

(4) **線形平行移動不変**（LTI, liner translation invariant）フィルタ L とは、線形フィルタであって

$$L(\tau_k x) = \tau_k(Lx), \qquad \Big(L(\tau_k x)(n) = \tau_k(Lx)(n) = Lx(n-k)\Big).$$

(5) 信号 $x_1(n)$ と $x_2(n)$ の**たたみ込み** $x_1 * x_2(n)$

$$y(n) = x_1 * x_2(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_1(k)x_2(n-k).$$

定理 5.3 (1) $x_1(n)$ と $x_2(n)$ が信号であれば、$y(n) = x_1 * x_2(n)$ も信号である。

(2) 任意の信号の組 $x_1(n)$ と $x_2(n)$ について、

$$(x_1 * x_2)(n) = (x_2 * x_1)(n).$$

(3) $h(n)$ が信号の時、信号

$$L_h x(n) = (x * h)(n)$$

は安定な LTI フィルタである。

注意 5.4 信号 x を線形に信号 y として出力するフィルタ L は、数の並びをベクトルとするベクトル間で定められた線形演算子と考えることができる。フィルタ L が平行移動不変なときには著しい性質がある。

線形演算子は互いに線形独立な単位数列（単位ベクトル）$e^k, k \in \mathbb{Z}$

$$e^k(n) = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n \end{cases}$$

への作用によって定まる。実際、任意の信号はその要素 $x(k)$ を単位ベクトルの係数とする線形結合として $x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)e^k$ で表され、L の線形性から

$$Lx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} L(x(k)e^k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)L(e^k)$$

である一方、$Le^k = E^k$ と記したとき、平行移動不変性から

$$\begin{aligned} \tau_p(E^k) &= \tau_p(Le^k)) \\ &= L(\tau_p e^k) \qquad L \text{ の平行移動不変性} \\ &= L(e^{k+p}) = E^{k+p} \end{aligned}$$

である。E^{k+p} と E^k とでの要素関係

$$E^{k+p}(n) = E^k(n-p)$$

に注意すると、$E^k(n) = E^0(n-k)$ となることがわかる。したがって、平行移動不変なフィルタ L の信号 x への作用は

$$\begin{aligned} Lx(n) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k) \underbrace{L(e^k)(n)}_{E^k(n)}, \qquad E^k(n) = E^0(n-k) \text{ より} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)h(n-k), \qquad h \equiv E^0 = L(e^0) \\ &= x * h(n) \end{aligned}$$

と表される、この結果は、定理 5.7 の構成的証明になっている。

定義 5.5 単位インパルス信号（unit impulse signal）を

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

で定義する。

単位インパルス信号 $\delta(n)$ を使うと、どんな信号もシフトされたインパルスの和として書き表すことができる。

補題 5.6

$$x(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\delta(n-k) = x * \delta(n) \tag{5.1}$$

つぎの定理は、注意 5.4 で予告したように、すべての安定 LTI フィルタはある信号 h とのたたみ込みで定まる変換となっていることを示している。

定理 5.7 L を安定 LTI とする。このとき、ある信号 $h(n)$ が存在して

$$Lx(n) = (x * h)(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)h(n-k) \tag{5.2}$$

証明　$h(n) = (L\delta)(n)$ とする。L はフィルタであるので、$h(n)$ もまた信号 $\sum_n |h(n)| < \infty$ である。与えられた信号 $x(n)$ に対して、式 (5.1) を使って、$x(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\tau_k\delta(n)$ と書ける（平行移動演算子も使った）。L が LTI フィルタであるので

$$\begin{aligned}(Lx)(n) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)(L\tau_k\delta)(n)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\tau_k(L\delta)(n)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)h(n-k)\end{aligned}$$

となって、式 (5.2) を得る。安定性と線形性は L を無限和内に取り込むときに使った。

定義 5.8 安定 LTI フィルタ L が与えられたとき、定理 5.7 より、$Lx(n) = (x*h)(n)$ となるような信号 $h(n)$ を L の**インパルス応答**（inpulse response）あるいは L の**システム関数**（system function）という。$h(n)$ の周波数表示 $\widehat{h}(\omega)$（定義 5.10）をフィルタ L の**周波数応答**という。

注意 5.9 安定 LTI フィルタ L から定まる信号 $h(n)$ の周波数表示 $\widehat{h}(\omega)$ を周波数応答というのにはそれなりの理由がある。L への入力信号が単純振動波 $x(n) = \mathrm{e}^{i2\pi n\omega_0}$ であるときには、$\sum_n |x(n)| = \sum_n 1 = +\infty$ より、定義 5.1 の意味では $x(n)$ は信号

ではない。しかし、定理 5.7 の関係式を使うと次のようになる。

$$
\begin{aligned}
(Tx)(n) = (x * h)(n) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)h(n-k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(n-k)h(k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{i2\pi\omega_0(n-k)} h(k) \\
&= \mathrm{e}^{i2\pi n\omega_0} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)\mathrm{e}^{-i2\pi k\omega_0} \\
&= x(n)\widehat{h}(\omega_0).
\end{aligned}
$$

つまり、$x(n)$ は L によって定数 $\widehat{h}(\omega)$ 倍される、あるいは単純振動波は固有値 $\widehat{h}(\omega)$ を持つ LTI の固有ベクトルになっているということができる。

定義 5.10 信号 $x = \{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の**周波数表示**
とは $[-\pi, \pi]$ 上の複素関数

$$
\widehat{x}(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)\mathrm{e}^{-i\omega n} \equiv X\left(\mathrm{e}^{i\omega}\right) \tag{5.3}
$$

である。また、$z = \mathrm{e}^{i\omega}$ をつかって

$$
X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)z^{-n} \tag{5.4}
$$

と書くこともあり、この形を **Z-変換**（Z-tansform）という。

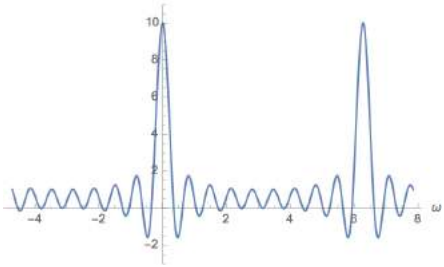
注意 5.11 角周波数表示の Fourier 変換の定義式

$$
\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i2\pi\omega x}\, dx \tag{??$'$}
$$

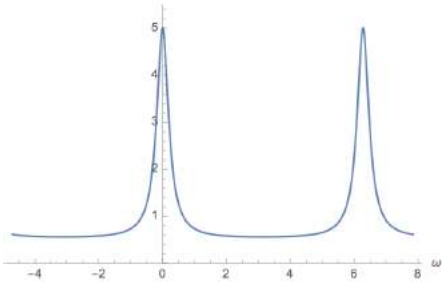
$$
f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{i2\pi\omega x}\, d\omega \tag{??$'$}
$$

とを見比べてみると、信号 $x = \{x(n)\}$ の角周波数表示 $\widehat{x}(\omega)$ は、有限長のサポートを持つ離散版関数の Fourier 変換のように見える。この見立ては正しく、節 5.3 などで論じる。

信号は $\sum_n |x(n)| < \infty$ より、$\widehat{x}(\omega)$ は角周期 1 の連続関数に一様収束する。また、$\widehat{x}(\omega)$ を $X(\mathrm{e}^{i\omega})$ と書くと、$\{\mathrm{e}^{i\omega}\}_{\omega\in[0,1)}$ が単位円であることから、複素関数 $X(z)$ を単位円に制限した関数と見なすことができる。



(a)



(b)

図 5.1　(a) $N = 10$ 個の一定信号 $x(0) = \cdots = x(9) = 1$ の場合の周波数表示 $\widehat{x}(\omega) = \left(1 - \mathrm{e}^{-i\omega n}\right)/\left(1 - \mathrm{e}^{-i\omega}\right)$ の実部のグラフ。(b) $a = 0.8 < 1$ の減衰信号 $x(n) = a^n (0 \leqq n)$（ただし $x(n) = 0 (n < 0)$）の周波数表示 $\widehat{x}(\omega) = 1/\left(1 - a\mathrm{e}^{-i\omega}\right)$ の実部のグラフ。

例 5.12

(a) N 個からなる一定信号 $x(n)$

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq n < N \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \widehat{x}(\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-i\omega n} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-i\omega N}}{1 - \mathrm{e}^{-i\omega}} \qquad \text{図 5.1(a) 参照} \\ &= \mathrm{e}^{i(N-1)\omega/2} \frac{\sin N\omega/2}{\sin \omega/2} \end{aligned}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}.$$

(b) 減衰信号 $x(n)$

$$x(n) = \begin{cases} a^n & 0 \leqq n \\ 0 & n < 0 \end{cases}.$$

$$\widehat{x}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-i\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - a\mathrm{e}^{-i\omega}}, \qquad \text{図 5.1(b) 参照}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-1} = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

定理 5.13 $x_1(n)$ と $x_2(n)$ を信号とし、$y(n) = (x_1 * x_2)(n)$ とする。周波数応答について、次が成立する。

$$\widehat{y}(\omega) = \widehat{x_1}(\omega)\widehat{x_2}(\omega)$$

証明

$$\begin{aligned}
\widehat{y}(\omega) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} y(n)\mathrm{e}^{-i\omega n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_1(k)x_2(n-k)\mathrm{e}^{-i\omega n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_1(k) \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_2(n-k)\mathrm{e}^{-i\omega n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_1(k)\mathrm{e}^{-i\omega k} \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_2(n-k)\mathrm{e}^{-i(n-k)\omega} = \widehat{x_1}(\omega)\widehat{x_2}(\omega)
\end{aligned}$$

■

5.2　$\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ の直交基底

長さ N のデータ $x(0), x(1), \ldots, x(N-1)$ が与えられると、いつでも $x(n \mod N), n \in \mathbb{Z}$ であるような周期 N 拡張を考えることができる。$x(-1) = x(N-1), x(N) = x(0)$ とみなせばよい。たとえば、$N = 12$ のときには、$x(-21) = x(-9) = x(3) = x(15) = x(27)$ である。

定義 5.14 与えられた $N \in \mathbb{N}$ について、数列 $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が**周期** N の信号とは、$x(n+N) = x(n), n \in \mathbb{Z}$ となることである。周期 N を持つ信号がなす空間を $\mathcal{S}_N$ と表す。

このことは別の言い方で置き換えることができる。ある整数 N が与えられたとき、$\mathbb{N}$ に関する N の剰余類 $\mathbb{Z} \mod N$ を

$$\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$$

と表す。このとき、周期 N を持つ信号 $x(n) \in \mathcal{S}_N$, $x(n+N) = x(n)$ とは $\mathbb{Z}_N$ 上のベクトル関数

$$x = (x(0), x(1), \ldots, x(N-1))$$

と言い換えることができる。

定義 1.17 の ℓ^2 内積

$$\langle x \mid y \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n^* y_n \tag{1.18$'$}$$

を持つこの関数空間を $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ と表そう（周期区間だけで総和している）。以下、文脈から明かな場合には内積 $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\ell^2}$ を $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ と記すことにする。

定義 5.15 N 個のベクトル関数 $E^0, E^1, \ldots, E^{N-1} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ を次で定義する。

$$E^k = \{E^k(n)\}_{n=0,\ldots,N-1}, \quad E^k(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathrm{e}^{i2\pi kn/N} \qquad 0 \leqq k \leqq N-1 \tag{5.5}$$

ベクトル E^k の第 n-成分を $E^k(n)$ で表す。

命題 5.16 $\left\{E^0, E^1, \ldots, E^{N-1}\right\}$ は $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ の正規直交基底である。

証明　$0 \leqq k, n \leqq N-1$ とする。このとき

$$\begin{aligned}
\left\langle E^j \,\middle|\, E^k \right\rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} E^{j*}(n) E^k(n) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \mathrm{e}^{-i2\pi jn/N} \frac{1}{\sqrt{N}} \mathrm{e}^{i2\pi kn/N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{i2\pi(k-j)n/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\mathrm{e}^{i2\pi(k-j)/N} \right)^n \\
&= \begin{cases} 1 & k = j \\ \dfrac{1}{N} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{i2\pi(k-j)}}{1 - \mathrm{e}^{i2\pi(k-j)/N}} = 0 & k \neq j \end{cases} \\
&= \delta_{jk}
\end{aligned}$$

■

例 5.17 $N = 4$ とする。

$$\begin{aligned}
E^0 &= \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \\
E^1 &= \frac{1}{2}(1, i, -1, -i), \\
E^2 &= \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1), \\
E^3 &= \frac{1}{2}(1, -i, -1, i).
\end{aligned}$$

定理 1.61 から、$\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ の正規直交基底で定まる $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ 上の恒等演算子

$$I_{\ell^2(\mathbb{Z}_N)} = \sum_{k=0}^{N-1} |E^k\rangle \langle E^k|$$

を使って、任意の $x \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ は $x = I_{\ell^2(\mathbb{Z}_N)}\, x$、つまり

$$\begin{aligned}
x = \{x(n)\}_{n=0,\ldots,N-1} &= \sum_{k=0}^{N-1} \langle E^k \,|\, x\rangle \, |E^k(n)\rangle \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}(k)\, \mathrm{e}^{i2\pi kn/N} \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

と展開できる。ここで、式 (5.6) の係数 $\widehat{x}(k)$ は、Fourier 基底の正規直交性を使って

$$\widehat{x}(k) = \langle E^k \,|\, x\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, \mathrm{e}^{-i2\pi kn/N} \qquad (5.7)$$

であることがわかる。この展開式 (5.6) を **Fourier 基底** $\{E^k\}_{k=0,\ldots,N-1}$ による離散信号 x の離散 Fourier 展開という。節 5.3 で改めて定義することなるが、この展開係数からなる列 $\{\widehat{x} = \{\widehat{x}(k)\}_{k=0,\ldots,N-1}$ を信号 x の N-点**離散 Fourier 変換**という。

離散 Fourier 変換とは、関数値を離散データとして標本化して得られる近似化された Fourier 係数と深い関係があることを理解して置くことは大切である。N 個のデータの組 $\{\widehat{x}(k)\}_{k=0,\ldots,N-1}$ を、周期関数 $x(t)$ の周期区間（たとえば $[0, 2a]$）での挙動を N 点 $x(0), x(1), \ldots, x(N-1)$ で標本化した組とみなす。このとき、$x(t)$ の k 次 Fourier 係数 γ_k とは

$$\gamma_k \approx \frac{1}{N}\widehat{x}(k) \tag{5.8}$$

の関係にあることを示そう。

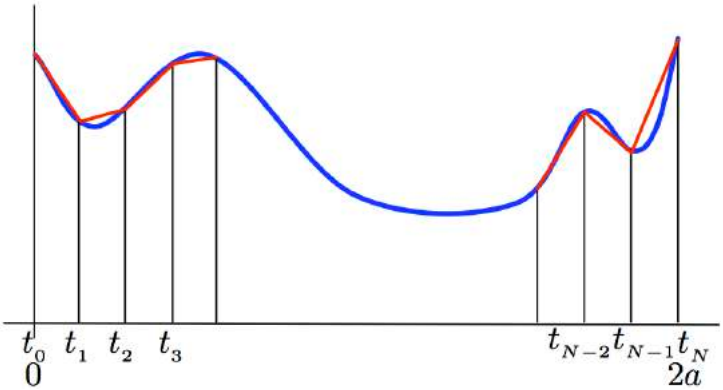


図 5.2　区間 $[0, 2a]$ 上の関数 $x(t)$ の積分値 $\frac{1}{N}\int_0^{2a} x(t)dt$ を台形公式を使って求める。区間 $[0, 2a]$ を N 等分し、その端点を $t_0 = 0, t_1 = 2a/N, t_2 = 2 \cdot 2a/N, \ldots, t_k = 2ka/N, \ldots, t_N = 2a$ として、各区間 $[t_j, t_{j+1}], 0 \leqq j < N$ に台形公式を使う。

さて、周期 $2a$ をもつ（または周期 $2a$ を持つように周期拡張した）関数 $x(t), x(t+2a) = x(t)$ の Fourier 係数を思い起こそう。$x(t)$ の形式的複素 Fourier 級数展開 (2.25)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \mathrm{e}^{i\pi kt/a} \tag{2.28$'$}$$

の係数は、周期関数に対する周期にわたる積分区間は任意の周期区間としてよい（系 2.12）という結果を使うと

$$\gamma_k = \frac{1}{2a}\int_0^{2a} x(t)\mathrm{e}^{-i\pi kt/a}\,dt \tag{2.29$'$}$$

と書ける。この被積分関数も周期 $2a$ であることに注意する。

[予備的考察]:図 5.2 のように、関数 $x(t)$ の定義区間 $[0,2a]$ での積分値 $\frac{1}{N}\int_0^{2a} x(t)dt$ を与えた N 個の関数値だけを使って近似してみよう。区間幅 $\Delta_N t = 2a/N$ で N 等分して、その端点を $t_0 = 0, t_1 = 2a/N, t_2 = 2\cdot 2a/N, \ldots, t_k = 2ka/N, \ldots, t_N = 2a$ とし、これら N 点の関数値 $x(t_j) = x(2aj/N) \equiv x(j), j = 0, \ldots, N$ を使い、。各区間 $[t_j, t_{j+1}], 0 \leqq j < N$ で台形公式を使うと、次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2a}\int_0^{2a} x(t)dt &\approx \frac{1}{2a}\Delta_N t\left[\frac{x(0)}{2} + x(1) + \cdots + x(N-1) + \frac{x(N)}{2}\right]\\ &\qquad x(t)\text{ が周期 }2a\text{ であること、}x(0)=x(N)\text{ を使うと}\\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x(j).\end{aligned}$$

以上の考察から、周期 $2a$ をもつ関数 $x(t)$ を Fourier 級数展開したときの k-次 Fourier 係数 γ_k は、N 個の関数値 $\left\{x(j) = x(2aj/N)\right\}_{j=0,\ldots,N-1}$ を使って

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \frac{1}{2a}\int_0^{2a} x(t)\mathrm{e}^{-i\pi kt/a}\,dt\\ &\approx \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x\left(\frac{2aj}{N}\right)\mathrm{e}^{-i2\pi kj/N}\end{aligned}$$

で与えられる。式 (5.7) とを見比べると、上の式は離散 Fourier 変換 $\widehat{x}(k)$ とが

$$\gamma_k \approx \frac{1}{N}\widehat{x}(k) \tag{5.8$'$}$$

の関係になっていることが示された。

5.3　離散 Fourier 変換

節 5.2 にあるように $\mathcal{S}_N$ に属する周期 N の信号は $\mathbb{Z}_N$ 上の関数であるが、恒等的に零でない限り定義 5.1 の意味で信号にはなり得ない。しかし、すべての $n \in \mathbb{Z}$ につ

いて $|x(n)| \leqq M$ なる数 M が存在する意味で有界であり、安定な LTI フィルタを通すと信号となる（定義 5.2(c)-(e)）。定義 5.8 にあるように、安定な LTI フィルタはインパルス応答フィルタ $Tx(n) = (x * h)(n)$ で特徴付けられることから、周期信号について次が成立する。

定理 5.18 与えられたシステム関数 h と周期 N の信号 $x \in \mathcal{S}_N$ に対して、たたみ込み $x * h$ もまた周期 N の信号である。

証明　$x * h(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)h(n-k)$ がすべての n に対して定義されてる信号であることは、各 n に関する収束性を確認すればよい。$x(n)$ の有界性 $|x(n) \leqq M$ から

$$|x * h(n)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |x(k)||h(n-k)| \leqq M \sum_{k\in\mathbb{Z}} |h(n-k)| = M \sum_{k\in\mathbb{Z}} |h(k)| < \infty.$$

$x * h(n)$ が周期 N を持つことは、次のようにしてわかる。

$$\begin{aligned} x * h(n+N) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)h(n+N-k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)h(n-(k-N)) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k+N)h(n-k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)h(n-k) = x * h(n). \end{aligned}$$

■

定義 5.19 (離散 Fourier 変換) 与えられた周期 N の信号 $x \in \mathcal{S}_N$ に対して、x の N-点 Fourier 変換（**DFT** ）$\widehat{x}$ を、周期 N の数列

$$\widehat{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\mathrm{e}^{-i2\pi kn/N} \tag{5.9}$$

によって定義する。x と $\widehat{x}$ の対応を

$$\mathcal{F}_N[x] = \widehat{x}$$

と表す。

補題 5.20 $\mathcal{F}_N$ は周期 N の信号を周期 N の信号に写す $\mathcal{S}_N$ 上の線形作用素である。

証明　$\mathcal{F}_N$ の線形性は明かである。$x \in \mathcal{S}_N$ である周期 N の信号に対して $\mathcal{F}_N[x] \in \mathcal{S}_N$ を示すために、$\mathcal{F}_N[x]$ が N 周期的であることを言えばよい。実際、$\omega = \mathrm{e}^{-i2\pi/N}$ とおいて、

$$\begin{aligned}
\widehat{x}(k+N) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\omega^{n(k+N)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\omega^{nk}\omega^{Nn} \qquad (omega^{Nn} = \mathrm{e}^{-i2\pi n} = 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\omega^{nk} \\
&= \widehat{x}(k).
\end{aligned}$$

この結果は $\widehat{x}$ の N-周期性を示している。 ■

定理 5.21 (離散 Fourier 逆変換) 与えられた周期 N の信号 $x \in \mathcal{S}_N$ の DFT を $\mathcal{F}_N[x] = \widehat{x}$ とする。このとき次が成立する。

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}(k)\mathrm{e}^{i2\pi kn/N}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{5.10}$$

この $\widehat{x}$ と x との対応を逆変換記法 $\mathcal{F}_N^{-1}$ を使って

$$x = \mathcal{F}_N^{-1}[\widehat{x}]$$

と表す。

証明　任意の数 r に対して

$$\sum_{k=0}^{N-1} r^k = \frac{1-r^N}{1-r}$$

を使うと

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[\mathrm{e}^{i2\pi(n-j)/N}\right]^k = \frac{1-\mathrm{e}^{i2\pi(n-j)}}{1-\mathrm{e}^{i2\pi(n-j)/N}}.$$

また、$0 \leqq n \leqq N-1$ について、命題 5.16 の証明で使ったように

$$\sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{i2\pi k(n-j)/N} = \begin{cases} 0 & n \neq j \\ N & n = j \end{cases} \tag{5.11}$$

である。したがって、$0 \leqq n \leqq N-1$ について

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}(k)\mathrm{e}^{i2\pi kn/N} &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} x(j)\mathrm{e}^{-i2\pi jk/N}\mathrm{e}^{i2\pi kn/N} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{i2\pi k(n-j)/N} \\ &= x(n). \end{aligned}$$

■

定義 5.19 の N-点離散 Fourier 変換式 (5.9) を行列表示してみよう。信号 $x(n)$、およびその N-点 DFT $\widehat{x}(n)$ をそれぞれ次のようにの列ベクトル表示する。

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}, \qquad \widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}.$$

いま、

$$\omega_N = \mathrm{e}^{-i2\pi/N}$$

として、$N \times N$ 複素行列 $\boldsymbol{F}_N$ を次のように定義する。

$$\boldsymbol{F}_N = \left[\omega_N^{jk}\right]_{j,k=0,\ldots,N-1} \tag{5.12}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \ldots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \ldots & \omega_N^{2(N-1)} \\ 1 & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \ldots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

このとき、離散 FFourier 変換 (5.9) は

$$\widehat{\boldsymbol{x}}(n) = \big(\boldsymbol{F}_N\boldsymbol{x}\big)(n)$$

のように表すことができる。

演習 5.22 式 (5.12) の行列 $\boldsymbol{F}_N$ は、対称な直交行列であることを示しなさい。

ヒント：$\boldsymbol{F}_N$ を N 個の列ベクトルを並べて $\boldsymbol{F}_N = [\boldsymbol{f}_0 \boldsymbol{f}_1 \cdots \boldsymbol{f}_{N-1}]$ と表す。$\langle \boldsymbol{f}_j \,|\, \boldsymbol{f}_k \rangle = N\delta_{jk}$ であることを式 (5.11) を使って示す。

一方、離散 Fourier 逆変換 $y = \mathcal{F}_N^{-1}[\widehat{y}]$ は、式 (5.10) より、$\boldsymbol{F}_N$ の転置共役行列 $\boldsymbol{F}_N^\dagger$ を使って

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(n) &= \frac{1}{N}\big(\boldsymbol{F}_N^\dagger \widehat{\boldsymbol{x}}\big)(n) \\ &= \frac{1}{N}\big(\boldsymbol{F}_N^\dagger \boldsymbol{F}_N \boldsymbol{x}\big)(n)\end{aligned}$$

と表される。これより、$N \times N$ 単位行列 I_N は

$$I_N = \left(\frac{\boldsymbol{F}_N}{\sqrt{N}}\right)^\dagger \frac{\boldsymbol{F}_N}{\sqrt{N}}$$

と書くことができ、$U_N = \dfrac{\boldsymbol{F}_N}{\sqrt{N}}$ はユニタリ行列であることがわかる。定義 5.15 で与えたベクトル E^k は $U_N^\dagger$ の第 k 列ベクトルになっていることに注意しよう。

定理 5.23 (DFT の性質) $\mathcal{S}_N$ に属する周期 N の信号について、DFT には次の性質がある。

(1) 周期 N の信号 $x \in \mathcal{S}_N$ を 1 単位分の平行移動 $y(n) = x(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$ した信号 $y \in \mathcal{S}_N$ について

$$\widehat{y}(k) = \mathrm{e}^{i2\pi k/N}\widehat{x}(k).$$

(2) 周期 N の信号 $x, y \in \mathcal{S}_N$ についての**巡回たたみ込み**（circular convolution）

$$x * y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(n-k) \tag{5.14}$$

もまた $x * y \in \mathcal{S}_N$ である。すなわち、式 (5.14) における総和は連続する N であればどこから和をとってもよい。

(3) 周期 N の信号 $x, y \in \mathcal{S}_N$ の DFT をそれぞれ $\widehat{x}, \widehat{y}$ とする。たたみ込み $x * y(n)$ の DFT $\widehat{x * y}(n)$ について次が成り立つ。

$$\widehat{x * y}(n) = \widehat{x}(n)\,\widehat{y}(n).$$

(4) 実である $x \in \mathcal{S}_N$ に対する DFT $\widehat{x}$ とその複素共役 $\widehat{x}^*$ について

$$\widehat{x}(N-k) = \widehat{x}^*(k), \qquad 0 \leqq k \leqq N-1.$$

周期 N が偶数であるとき、DFT $\widehat{x}$ の要素は $\mathbb{Z}_N$ 上で対象に並び、その半数の $\widehat{x}(0), \ldots, \widehat{x}(N/2-1$ を計算すればよい。

証明

(1) 1 単位の平行移動した関係 $y(k) = x(k+1)$ を使う。

$$\begin{aligned}
\widehat{y}(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} y(j)\mathrm{e}^{-i2\pi kj/N} = \sum_{j=0}^{N-1} x(j+1)\mathrm{e}^{i2\pi k/N}\mathrm{e}^{-i2\pi k(j+1)/N} \\
&= \mathrm{e}^{i2\pi k/N} \sum_{j=0}^{N-1} x(j+1)\mathrm{e}^{-i2\pi k(j+1)/N} \\
&= \mathrm{e}^{i2\pi k/N}\widehat{x}(k).
\end{aligned}$$

(2) m を $(m-1)N \leqq j < mN$ なる数とすると、次が成立する。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=j}^{N+j-1} x(k)y(n-k) &= \sum_{k=j}^{mN-1} x(k)y(n-k) + \sum_{k=mN}^{mN+j-1} x(k)y(n-k) \\
&= \sum_{k=j-(m-1)N}^{mN-(m-1)N-1} x(k)y(n-k) + \sum_{k=0}^{N+j-1-mN} x(k)y(n-k) \\
&= \sum_{k=j-(m-1)N}^{N-1} x(k)y(n-k) + \sum_{k=0}^{j-(m-1)N-1} x(k)y(n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(n-k)
\end{aligned}$$

このようにして総和の出発を移動できることから、さらに

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)y(k) = y * x(n)$$

(3) $\mathcal{S}_N$ に属する要素の巡回たたみ込みの性質を使う。

$$
\begin{aligned}
\widehat{x*y}(n) &= \sum_{k=0}^{N-1}(x*y)(k)\mathrm{e}^{-i2\pi nk/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} x(j)y(k-j)\mathrm{e}^{-i2\pi nk/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} x(j)\mathrm{e}^{-i2\pi nj/N}y(k-j)\mathrm{e}^{-i2\pi n(k-j)/N} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} x(j)\mathrm{e}^{-i2\pi nj/N}\sum_{k=0}^{N-1} y(k-j)\mathrm{e}^{-i2\pi n(k-j)/N} \\
&= \widehat{x}(n)\widehat{y}(n).
\end{aligned}
$$

(4) $x \in \mathcal{S}_N$ の要素が実であることを使う。

$$
\begin{aligned}
\widehat{x}(N-k) &= \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\mathrm{e}^{-i2\pi(N-k)j/N} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\mathrm{e}^{i2\pi kj/N} \qquad \mathrm{e}^{-i2\pi} = 1 \text{ より} \\
&= \widehat{x}^*(j)
\end{aligned}
$$

■

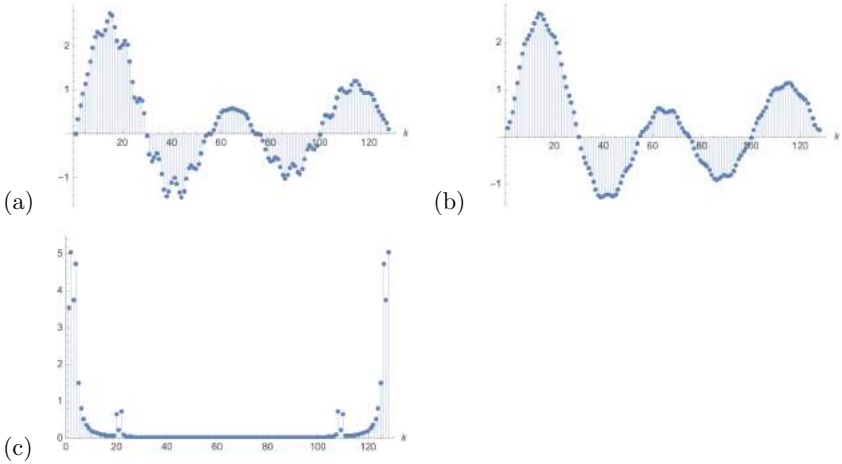


図 5.3　(a) 信号 $f(x) = \mathrm{e}^{-x/3}\big(\sin 3x + 2\sin 5x + 0.4\sin 2x \sin 40x\big)$ を $[0,\pi]$ 上の等間隔 $2^7 = 128$-点標本化した離散信号 y をプロット（関数 $f(x)$ のグラフは図 3.6(a)）。(b) 離散信号 y の DFT $\widehat{y}$ において（その絶対値のプロットが (c)）、先頭の $K = 19$ 個 $\widehat{y}(0)\ldots,\widehat{y}(K-1)$ と末尾の K 個 $\widehat{y}(N-K)\ldots,\widehat{y}(N-1)$ 以外の成分を零にした $\widehat{y}_K$ を逆変換して実部をプロット。(c) (c) $\widehat{y}$ の要素の絶対値をプロット。$\widehat{y}$ の要素は $\mathbb{Z}_{N=128}$ 上で ‘対称的’$\widehat{y}(N-k) = \widehat{y}^*(k)$, $k = 0,\ldots,N-1$ になっているため、実際の計算の手間は $\widehat{y}$ の半分 $\widehat{y}(0),\ldots,\widehat{y}(N/2-1)$ を計算するだけでよいことがわかる。

例 5.24 節 3.4 ではローパスフィルタとして Butterworth フィルタ（例 3.35）を考えた。そのとき信号として取り上げた $[0,\pi]$ 上の関数

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x/3}\big(\sin 3x + 2\sin 5x + 0.4\sin 2x \sin 40x\big) \tag{3.25}$$

を再度取り上げよう。これを等間隔に $2^7 = 128$ 点で標本化した離散信号 $y = \big\{f(\pi k/N)\big\}_{k=0,\ldots,N-1}$ を考えよう（図 5.3(a)）。

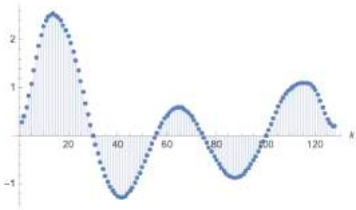
y の DFT $\widehat{y}$ において、$\widehat{y}(k)$ は、N に比べて k が小さければ関数 f の k-次 Fourier 係数 γ_k をよく近似することになる。Riemann-Lebesgue の補題 2.32 は Fourier 係数は周波数とともに小さくなることを言っており、実際、$k = N/2$ までは $\widehat{y}(k)$ は減少している。定理 5.23(4) $\widehat{y}(N-k) = \widehat{y}^*(k)$ である。図 5.3(c) は $\widehat{y}$ の要素の絶対値をプロットし t げいる。$k = 1$ のときには $\widehat{y}^*(N-1) = \widehat{y}(1)$ となって、$\widehat{y}(N-1)$ は高い周波数係数 γ_{N-1} には良く似ているとは言えない。

図 5.3(b) は、$\widehat{y}$ の先頭の $K = 19$ 個の要素 $\widehat{y}(0), \ldots, \widehat{y}(K)$ と末尾の K 個の要素 $\widehat{y}(N-K), \ldots, \widehat{y}(N-1)$ を残して、それ以外の成分を零にした $\widehat{y}_{K=19}$ を離散 Fourier 逆変換した実部だけのプロットを示している。利用する信号は $2K/N \approx 0.297$ 程度になり、形式的にはデータ圧縮したことになっている。図 5.4(は)、$K = 10$ とより少ない Fourier 成分だけを使ったプロットの結果である。

離散 Fourier 変換 $\widehat{y}$ において、さらにその要素の絶対値の最大値の 15% 未満の絶対値を持つ 117 個の要素を零に置き換えて、これを離散 Fourier 逆変換した結果の実部をプロットすると図 5.4(b) となる。この場合も、違う方法によって信号を圧縮して 8.6%（$1 - 117/128$) の要素だけで関数 f を近似したことになっている。

いずれの ‘圧縮’ 方法においても、ローパスフィルタで処理した場合と同様に、関数の微細な様子（高い周波数成分）は失われてしまったが、粗い様子（低い周波数成分）が保持されている様子がうかがわれる。

(a)



(b)

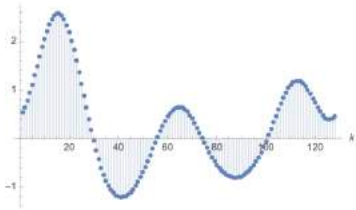


図 5.4　(a) 離散信号 y の DFT $\widehat{y}$ において、先頭の $K = 10$ 個 $\widehat{y}(0) \ldots, \widehat{y}(K)$ と末尾の K 個 $\widehat{y}(N-K) \ldots, \widehat{y}(N-1)$ 以外の成分を零にした $\widehat{y}_{K=10}$ を逆変換して実部をプロット。(b) $\widehat{y}$ の要素の最大絶対値の 15% 未満の絶対値を持つ 117 個の要素を零に置き換えた実部をプロット。

演習 5.25 Mathematica を使って図 5.3(a),(b) および (c) を描きなさい。
（ヒント）数値リスト `data` の連続する m から n 番目までを取り出すには次のようにする。Mathematica の非空リストは常に 1 番目の要素から始まることに注意（他のプログラム言語では配列要素は 0 から始まることが多い）。

```
data[[m;;n]]
```

演習 5.26 Mathematica を使って図 5.4(b) を描くにはどのようにすればよいだろうか。数値リスト `data` の離散 Fourier 変換するには組み込み関数 `Fourier` を次のよ

うに使う。

```
Fourier[data]
```

離散 Fourier 逆変換において、無視することのできる虚部を除去するには `Chop` を使ってもよい。
（ヒント）ReplaceAll（`/.`）と Condition（`/;`）を組み合わせて、数値リスト `data` 内の要素についてその絶対値が `value` 以下ならば記号 `A` に置き換えるには次のように書く。

```
data /. x_ /; Abs[x] < value -> A;
```

定理 5.27 $h(n)$ をフィルタのシステム関数、$x(n)$ を周期 N の信号とする。$\widehat{x}(n)$ を $x(n)$ の DFT、$\widehat{h}(\omega)$ を定義 5.10 で定まる周波数応答とするとき、次が成立する。

$$\widehat{x * h}(n) = \widehat{x}(n)\widehat{h}(n/N).$$

証明

$$\begin{aligned}
\widehat{x * h}(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} (x * h)(k)\mathrm{e}^{-i2\pi nk/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} x(j)h(k-j)\mathrm{e}^{-i2\pi nk/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} x(k-j)h(j)\mathrm{e}^{-i2\pi nk/N} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} h(j)\mathrm{e}^{-i2\pi j(n/N)} \sum_{k=0}^{N-1} x(k-j)\mathrm{e}^{-i2\pi n(k-j)/N} \\
&= \widehat{h}(n/N)\widehat{x}(n).
\end{aligned}$$

■

注意 5.28 フィルタの周波数応答 $\widehat{h}(\omega)$ は周期 1、$\widehat{h}(\omega+1) = \widehat{h}(\omega)$ であることから、n に関して周期 N、$\widehat{h}(\frac{n+N}{N}) = \widehat{h}(\frac{n}{N})$ で、$\widehat{h}(n/N)$ は周期 N の信号 $\tilde{h}(n)$ の N-点 DFT になっていると見なすことができる。その $\tilde{h}(n)$ は、定理 5.21 から、$\widehat{h}(n/N)$ の逆 DFT して次のように得られる。

$$
\begin{aligned}
\tilde{h}(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widehat{h}(n/N)\mathrm{e}^{i2\pi kn/N} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j\in\mathbb{Z}}h(j)\mathrm{e}^{-i2\pi jk/N}\mathrm{e}^{i2\pi kn/N} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}}h(j)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{i2\pi k(n-j)/N} \\
&\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{i2\pi k(n-j)/N} = \begin{cases} N & j-n = mN, m\in\mathbb{Z} \\ 0 & j-n \neq mN \end{cases} \text{に注意すると} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}h(n+mN).
\end{aligned}
$$

つまり、$\tilde{h}(n)$ は $h(n)$ を N-周期化

$$
\tilde{h}(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}h(n+mN)
$$

ものであることがわかる。

5.4　高速 Fourier 変換とその応用

Mathematica の組込みの FFT(高速 Fourier 変換) 関数 `Fourier` を使ってグレイスケール画像の「圧縮」を行ってみよう。ここで、「データ圧縮」とは、無視し得る微小データをゼロにしてデータを簡約することとする。

Mathematica ノートブックファイルの場所を以下で確認しておき、そこから `data` フォルダ内にカラー写真 `data/Yushima.jpg` を読み込んで横ピクセルが 1000 となるように縮小して `data/sYushima.jpg` として書き出す。このカラー写真を改めてグレイスケール写真として読み込んで `gray` とする。

```
SetDirectory[NotebookDirectory[]]
yushima = Import["data/Yushima.jpg"]
Export["data/sYushima.jpg", yushima, ImageSize -> 1000]
gray = ColorConvert[Import["data/sYushima.jpg"], "Grayscale"]
```

ImageData[gray] はグレースケール値として 0 と 1 の間の数として写真データ（2 次元リスト）を返す。計算量を考慮して写真の適当な大きさに切り出す。以下では 300 のピクセルのグレースケールデータを takedata とした（図 5.5）。

```
takedata = Take[ImageData[gray], {451, 750}, {151, 550}]
Image[takedata]
```

図 5.5　300 × 400 ピクセルに切り取った Image[takedata] が返すグレースケール画像。

takedata の 150 行目（画像中央）400 個のグレースケール値とこれを FFT して結果の絶対値をプロットするには次のようにする（図 5.6）。実数データを Fourier で FFT した結果は複素数値となり、これを InverseFourier で逆変換すると Mathematica では 10^{-10} 未満”程度のごく小さな複素数が残る。これを取り除くために Chop を使うことがここでのポイントである。

```
ListPlot[takedata[[150]], Filling -> Axis]
fft = Fourier[takedata[[150]]];
ListPlot[Abs[fft], AxesLabel -> {k,}, Filling -> Axis]
```

Mathematica の FFT 関数 Fourier, InverseFourier は便利なことに多次元データについても利用できる。画像データの場合、各行（または列）ごとに FFT してデータを Fourier 変換することも考えられるが、ここでは 2 次元リストを一度に FFT してみよう。

次の関数 approx2DdataByNeglectingSmallElements[data2D,thresholdRatio]

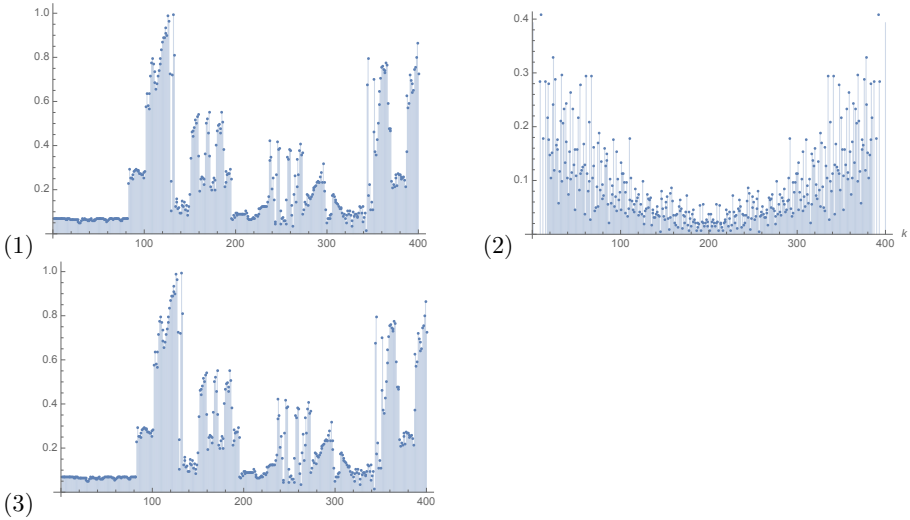


図 5.6　(1) 図 5.5 の 150 行（中央）の 400 個の 1 次元グレースケールデータ値のプロット。(2) その FFT の絶対値のプロット。(3) FFT した結果の逆変換（さらに Chop を適用）したデータのプロット。(1) が回復することがわかる。

は 2 次元グレイスケールデータ data2D と 1 以下の閾値 thresholdRatio を渡すと、FFT した後の絶対値がその最大絶対値 maxabs と比較して maxabs × thresholdRatio 以下の相対的に小さな要素をゼロにしてしまった結果を逆変換して返す。全データ数中、こうして置き換えられたデータの割合を棄却割合 Ignoring rate として表示する。Ignoring rate が大きいほど、ゼロに置き換えられた割合が大きくなりデータが簡約された度合い（「圧縮率」）が高いとみなすことにしよう。

```
approx2DdataByNeglectingSmallElements[data2D_,thresholdRatio_] :=
  Module[{k, fftlist, ignorfftlist, replaced = 0},
    ModifiedListIngoringRelativeSmallElements[lst_List] :=
      Module[{maxabs, approxed, replaceSymbol},
        maxabs = Max[Abs[lst]];
        approxed = lst /. x_
            /; Abs[x] < thresholdRatio*maxabs -> replaceSymbol;
```

```
        replaced += Count[approxed, replaceSymbol];
        approxed /. replaceSymbol -> 0
      ];
    fftlist = Fourier[data2D];
    ignorfftlist = Table[
      ModifiedListIngoringRelativeSmallElements[fftlist[[k]]],
        {k, 1, Length[data2D]}];
    Print["Ignoring rate=", replaced / Length[Flatten[data2D]] // N];
    Chop[InverseFourier[ignorfftlist]]
    ]
```

2 次元グレイスケールデータ takedata に対して閾値を 3% としたときの近似画像は次のようにして得られる。この場合、棄却率は 0.437283 となり、約 4 割を越えるデータが簡約される結果となる。

```
Image[approx2DdataByNeglectingSmallElements[takedata, 0.03]]
  Ignoring rate=0.437283
```

図 5.7(1)∼(4) は、(1) 棄却率を 0.03、(2) 棄却率を 0.04、(3) 棄却率を 0.06、(4) 棄却率を 0.08 として得られる近似画像である。

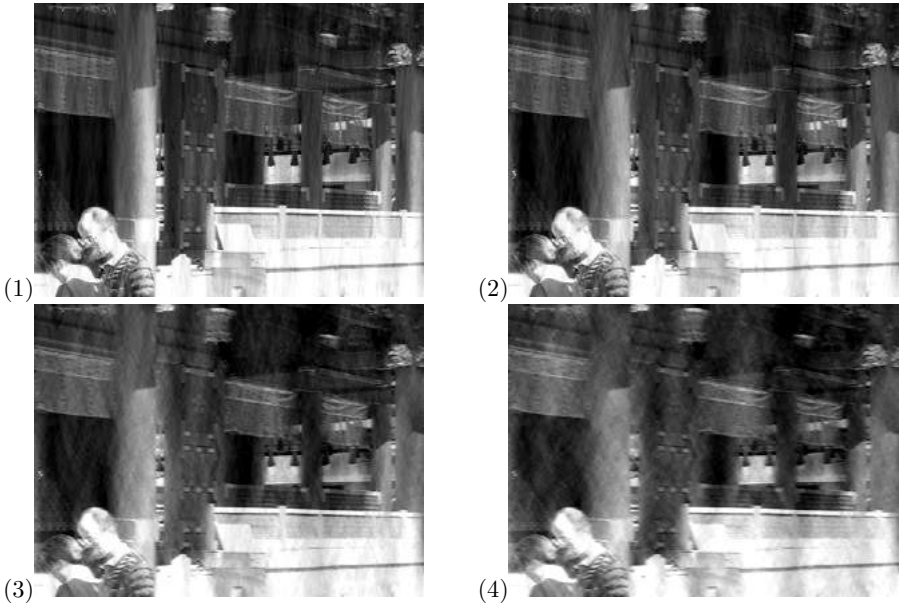


図 5.7　FFT した後の絶対値がその最大絶対値と比較して棄却率以下の相対的に小さな要素をゼロとしてから逆変換して「圧縮」した近似画像。(1) 棄却率 0.03 の結果（Ignoring rate=0.437283）. (2) 棄却率 0.04 の結果（Ignoring rate=0.55475）. (3) 棄却率 0.06 の結果（Ignoring rate=0.70905）. (4) 棄却率 0.08 の結果（Ignoring rate=0.7994）.

第 II 部

Wavelet の方法

第 6 章

Haar 関数系

例 1.29 で定義した Haar スケーリング関数 ϕ と Haar wavelet 関数 ψ を、一般的立場から考察して、特別な性質をもつ直交関数系を構成してみよう。

6.1 Haar スケーリング関数と Haar ウェーブレット関数

6.1.1 dyadic 区間

定義 6.1 スケール j の k 番目の **dyadic 区間** $I_{j,k}$ を次で定義する。

$$I_{j,k} = \left[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)\right) \tag{6.1}$$

注意 6.2 スケール j の長さ 2^{-j} の dyadic 区間 $I_{j,k}$ は $\mathbb{R}$ の分割を与えている：

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_{j,k}$$

dyadic 区間の定義から、直ちに次の補題が成立する。

補題 6.3 与えられた $j_0, k_0, j_1 \neq j_0, k_1 \neq k_1 \in \mathbb{Z}$ について、次の (1) または (2) のどちらかが成り立つ。

(1) $I_{j_i,k_1} \cap I_{j_0,k_0} = \phi$,
(2) $I_{j_1,k_1} \subset I_{j_0,k_0}$ または $I_{j_0,k_0} \subset I_{j_1,k_1}$

定義 6.4 あるスケール j の dyadic 区間 $I_{j,k}$ を

$$I_{j,k} = I^{\ell}_{j,k} \cup I^{r}_{j,k}$$

であるように、左右の細分区間を次で定義する。

$$I^{\ell}_{j,k} = I_{j+1,2k},$$
$$I^{r}_{j,k} = I_{j+1,2k+1}.$$

定義 6.5 スケール j の **diadic 階段関数** f とは、f のサポートが次のように有限個の dyadic 区間

$$\sup f = \bigcup_{k=k_0,\ldots,k_{n-1}} I_{j,k}$$

であって、各 $I_{j,k}$ 上で

$$f(x) = \text{一定}, \qquad x \in I_{j,k}$$

であるような関数である。

注意 6.6 $f(x)$ がスケール j の dyadic 階段関数であれば、f はまたスケール $j'(j' \geqq j)$ の dyadic 階段関数でもある。

6.1.2　Haar スケーリング関数

例 1.29 の Haar スケーリング関数を改めて定義しておこう。

定義 6.7 (Haar スケーリング関数)

$$\phi(x) = \chi_{[0,1)}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x < 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{6.2}$$

注意 6.8 定義 6.1 の言葉をつかえば、$\phi(x)$ は dyadic 区間 $I_{0,0}$ の端点 $x = 0, 1$ に、$\phi(x-k)$ は区間 $I_{0,k}$ の端点 $x = k, k+1$ に不連続点を持つ。また、$\phi(mx)$ は dyadic 区間 $I_{0,m^{-1}}$ 上で値 1 を取る。

定義 6.9 空間 V_0 をスケール 0 のコンパクトサポートを持つ diadic 階段関数（整数上で不連続点を持つ区分的な定数関数）全体で定義する。つまり

$$V_0 = \mathrm{cl}\left\{ \sum_{k\in\Lambda} c_k \phi(x-k) \,|\, a_k \in \mathbb{R}, \Lambda \text{ は有限の整数集合} \right\} = \overline{\mathrm{span}}\left\{\phi(x-k)\right\}_{k\in\Lambda}.$$

演習 6.10 $4\phi(2x) + 2\phi(2x-1) + 2\phi(2x-2) - \phi(2x-3)$ の様子をグラフで表しなさい。

定義 6.11 Haar スケーリング関数 $\phi(x)$ と $\phi(x')$ の内積を次で定義する。

$$\langle \phi(x) \,|\, \phi(x') \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)^* \phi(t')\, dt$$

演習 6.12 $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は V_0 の正規直交関数系であることを示しなさい。

定義 6.13 空間 V_j をスケール 0 のコンパクトサポートを持つ dyadic 階段関数全体、つまり

$$V_j = \mathrm{cl}\left\{ \sum_{k\in\Lambda} c_k \phi(2^j x - k) \,|\, c_k \in \mathbb{R}, \Lambda \text{ は有限の整数集合} \right\} = \overline{\mathrm{span}}\{\phi(2^j x - k)\}_{k\in\Lambda}$$

で定義する。V_j をスケール j の**近似空間**（approximate space）という。節 6.2 の Haar 関数系および節 6.3 の Haar 近似関数と詳細関数再訪で、V_j への射影演算子について改めて考える。

定義 6.14 スケール j の Haar スケーリング関数 $\phi_{j,k}$ を、dyadic 区間 $I_{j,k}$ 上に値を持つ規格化 $\|\phi_{j,k}\| = 1$ された関数

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k) \tag{6.3}$$

として定義する。

定理 6.15 スケール j の Haar スケーリング関数系 $\{\phi_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は V_j の正規直交系である。

証明

$$\begin{aligned}
\langle \phi_{j,k}(x) \,|\, \phi_{j,\ell}(x) \rangle_{L^2} &= \left\langle 2^{j/2}\phi(2^j x - k) \;\middle|\; 2^{j/2}\phi(2^j x - \ell) \right\rangle_{L^2} \\
&= 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^j x - k)^* \phi(2^j x - \ell)\, dx = 2^j \cdot \frac{1}{2^j}\delta_{k\ell} \\
&= \delta_{k\ell}
\end{aligned}$$

■.

定理 6.16 V_0 と V_j の要素の関係として次が成り立つ。

$f(2^j x) \in V_j$ であるときに限り、 $f(x) \in V_0$,

逆に

$$f(2^{-j}x) \in V_0 \text{ であるときに限り、} \quad f(x) \in V_j$$

証明　$f(x) \in V_0$ ならば、$f(x) = \sum_k c_k \phi_{0,k}(x)$ と表される。このとき、$f(2^j x) = \sum_k c_k \phi_{0,k}(2^j x) = \sum_k c_k \phi_{j,k}(x)$ であるので、$f(2^j x) \in V_j$ である。

同様に、$f(x) \in V_j$ のとき、$f(x) = \sum_k c'_k \phi_{j,k}(x)$ と表される。このとき、$f(2^{-j}x) = \sum_k c'_k \phi_{j,k}(2^{-j}x) = \sum_k c'_k \phi_{0,k}(x)$ であるので、$f(2^{-j}x) \in V_0$ がいえた。 ■

定理 6.17 近似空間の列 $V_0, V_1, \ldots, V_j, \ldots$ について

$$V_0 \subset V_1 \subset \cdots V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots .$$

証明　注意 6.6 から、$^\forall f \in V_j$ は V_{j+1} の要素でもあるので、$V_j \subset V_{j+1}$. ただし、包含関係 $\subset$ は strict で $V_j \subsetneqq V_{j+1}$ である。実際、V_{j+1} の要素であって V_j には属なさい関数 f が存在する。たとえば、dyadic 区間 $I_{j+1,0}$ 上の関数 $f(x) = \phi(2^{j+1}x)$ は V_{j+1} の要素であるが、V_j に属する dyadic 区間 $I_{j,k}$ 上の関数 $\phi(2^j x - k)$ のいかなる線形結合も $\phi(2^{j+1}x)$ とはできないため、$f \notin V_j$ である。これより、V_{j+1} から V_j を取り去った $V_{j+1} \backslash V_j$ は空でないことがわかる。 ■

6.1.3　Haar wavelet 関数

定理 6.17 より、スケール j の Haar スケーリング関数が張る空間 V_j は V_{j-1} を内部に完全に含み、$f \in V_j$ であるが $f \notin V_{j-1}$ であるような関数が存在する。したがって、空間 V_j は

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$$

と直和分解されるはずである。W_{j-1} をスケール $j-1$ の**詳細空間**（detail space）という。空間 W_{j-1} が V_j 内で V_{j-1} の直交補空間 $V_{j-1}^{\perp}$ となるようにとれるかを検討してみよう。簡単のためにスケール $j = 1$ で考えてみる。

探している関数 ψ は、次のような条件を満たすものである。

(1) $\psi \in V_1$、つまり $\psi(x) = \sum_\ell c_\ell \phi(2x - \ell), c_\ell \in \mathbb{R}$,
(2) $\psi \perp V_0$、つまり $\forall k$ について $\int \psi(t)^* \phi(t-k) dt = 0$.

すなわち、(1) から dyadic 階段関数として階段幅が 1/2 であり、(2) から ϕ との内積が 0 となるような ψ が求める関数である。いま、

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1)$$

と選んでみると

$$\langle \psi \,|\, \phi \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)^* \phi(t)\, dt = \int_0^{1/2} dt - \int_{1/2}^{1} dt = 1/2 - 1/2 = 0$$

しかも、$\psi(x)$ のサポート $I_{0,}$ は $\phi(x-k), k \neq 0$ のサポート $I_{0,k}$ とは重ならないために、$k \neq 0$ について常に $\int \psi(x-k)^* \phi(x) dx = 0$ である。したがって $V_1 \ni \psi$ は空間 V_0 に直交、つまり $\psi \in V_0^{\perp}$ であることがわかった。あらためて関数 ψ（既に例 1.29 で登場している）を定義しておこう。

定義 6.18 (Haar wavelet 関数)

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1) \tag{6.4}$$

演習 6.19 $\psi(x-1), \psi(x-2), \psi(x-3)$ のグラフを描いてみなさい。また、$\psi(2x-1), \psi(2x-2), \psi(2x-3)$ についてはどうか。

演習 6.20 $\phi(2x)$ を $\phi(x-k)$ と $\psi(x-\ell)$ の線形結合で表してみなさい。
（ヒント）補題 6.28 参照。

$$\begin{aligned}
&\sum_k \langle \phi(x-k) \,|\, \phi(2x) \rangle_{L^2} \phi(x-k) + \langle \psi(x-k) \,|\, \phi(2x) \rangle_{L^2} \psi(x-k) \\
&= \langle \phi(x) \,|\, \phi(2x) \rangle_{L^2} \phi(x) + \langle \psi(x) \,|\, \phi(2x) \rangle_{L^2} \psi(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\psi(x)
\end{aligned}$$

演習 6.21 $f(x) = 2\phi(4x) + 2\phi(4x-1) + \phi(4x-2) - \phi(4x-3)$ をグラフで表し、$f(x) = \psi(2x-1) + 2\phi(2x)$、さらに $f(x) = \psi(2x-1) + \psi(x) + \phi(x)$ と表されることを示しなさい。この事実は何を示しているかを説明しなさい。

定義 6.22 スケール j の Haar wavelet 関数 $\phi_{j,k}$ を

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \tag{6.5}$$

で定義する。

演習 6.23 $\psi_{j,k}(x)$ はスケール $j+1$ の dyadic 階段関数

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \left(\chi_{I_{j+1,2k}}(x) - \chi_{I_{j+1,2k+1}}(x) \right)$$

であり、

$$\langle \psi_{j,k} \,|\, \psi_{j,k'} \rangle_{L^2} = \delta_{kk'}$$

であることを確かめなさい。

6.2　Haar 関数系

dyadic 区間 $I_{j,k}$ 上で定義される Haar スケーリング関数 $\phi_{j,k}$ および Haar wavelet 関数 $\psi_{j,k}$ を **Haar 関数系**（Haar system）という。Haar 系が構成する空間を詳しく調べてみよう。

命題 6.24 V_1 内の関数 $f_1(x) = \sum_k c_k \phi(2x-k)$ が

$$f_1 \perp V_0, \qquad \text{つまり、全ての } \ell \text{ について} \quad f_1 \perp \phi(x-\ell)$$

であるのは、

$$c_1 = -c_0, c_3 = -c_2, \ldots, c_{2\ell+1} = -c_\ell,$$

であるときに限る。

証明　$V_1 \ni f_1(x) = \sum_k c_k \phi(2x-k)$ において、$\phi(2x-k)$ のサポートは dyadic 区間 $I_{1,k}$、また $\phi(x-\ell)$ のサポートは $I_{0,\ell}$ であることを考慮すると

$$\begin{aligned}
\langle f_1(x) \,|\, \phi(x-\ell) \rangle_{L^2} &= \sum_k c_k^* \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(2(t-\frac{k}{2})\right)^* \phi(t-\ell)\, dt \\
&= \sum_\ell c_{2\ell} \int_\ell^{\ell+\frac{1}{2}} \phi\left(2(t-\ell)\right)^* \phi(t-\ell)\, dt \\
&\qquad + c_{2\ell+1} \int_{\ell+\frac{1}{2}}^{\ell+1} \phi\left(2(t-\ell-\frac{1}{2})\right)^* \phi(t-\ell)\, dt \\
&= 0 \quad \text{であるためには } c_{2\ell} = -c_{2\ell+1} \text{ に限る}
\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \sum_\ell c_{2\ell}\phi(2x-\ell) + c_{2\ell+1}\phi(2x-\ell-1) = \sum_\ell c_{2\ell}\left[\phi(2x-\ell) - \phi(2x-\ell-1)\right] \\
&= \sum_\ell c_{2\ell}\psi(x-\ell) \in V_0^\perp = W_0
\end{aligned}$$

■

これより、$V_1 \ni f_1(x)$ が V_0 に直交するとき、f_1 は

$$f_1(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_{2\ell}\psi(x-\ell) \in W_0 = V_0^{\perp}$$

と表される。V_1 内の関数が V_0 に直交するのは、c_{2k} を添字を付け替え改めて c_k として、その関数が $\sum_k c_k\psi(x-k)$ と表されるときに限るのである。これより、

$$W_0 = \mathrm{cl}\left\{\sum_{k\in\Lambda} c_k\psi_{0,k}(x) \,|\, a_k \in \mathbb{R}, \Lambda \text{ は有限の整数集合}\right\} = \overline{\mathrm{span}}\{\psi_{0,k}(x)\}_{k\in\Lambda}$$

は、V_1 における V_0 の直交補空間 $V_0^{\perp} = W_0$、つまり $V_1 = V_0 \oplus W_0$ が示された。W_0 をスケール 0 の詳細空間という。この結果は次のように一般化される。

定理 6.25 スケール j の近似空間 V_j および詳細空間 W_j を、それぞれコンパクトサポートをもつ Haar wavelet 関数系 $\{\phi_{j,k}(x)\}_k$ および $\{\psi_{j,k}(x)\}_k$ が張る空間とする。

$$V_j = \mathrm{cl}\left\{\sum_{k\in\Lambda} c_k\phi_{j,k}(x) \,|\quad a_k \in \mathbb{R}, \Lambda \text{ は有限の整数集合}\right\} = \overline{\mathrm{span}\{\phi_{j,k}(x)\}_{k\in\Lambda}}, \tag{6.6}$$

$$W_j = \mathrm{cl}\left\{\sum_{k\in\Lambda} d_k\psi_{j,k}(x) \,|\quad b_k \in \mathbb{R}, \Lambda \text{ は有限の整数集合}\right\} = \overline{\mathrm{span}\{\psi_{j,k}(x)\}_{k\in\Lambda}} \tag{6.7}$$

このとき、W_j は V_{j+1} における V_j の直交補空間で、次式が成立する。

$$V_j \perp W_j,$$
$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

証明　1) W_j の各関数は V_j の全ての関数に直交し、逆に、2) V_j に直交する V_{j+1} の関数は W_j に属することを示そう。
1) W_j の関数を $g(x) = \sum_k d_k\psi_{j,k}(x)$、また、$f \in V_j$ とする。このとき、

$$\langle g \mid f\rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^* f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_k 2^{j/2} d_k\psi(2^j t - k)\right)^* f(t)\,dt = 0$$

を示せばよい。

さて、$f(x) \in V_j$ より、定理 6.16 から、$f(2^{-j}x) \in V_0$ である。したがって、

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_k d_k \psi(t-k) \right)^* f(2^{-j}t)\, dt \quad (\psi(x) \text{ は } V_0 \text{ に直交するから}) \\
&= 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k d_k^* \psi(2^j y - k)^* f(y)\, dy \quad (\text{変数の置き換え } y = 2^{-j}t \text{ より}) \\
&= 2^{j/2} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)^* f(y)\, dy.
\end{aligned}
$$

これより、g は $f \in V_j$ に直交することがわかり、1) が示された。
2) $j = 0$ のときは既に命題 6.24 の後で示した。一般の j についても同様である。 ■

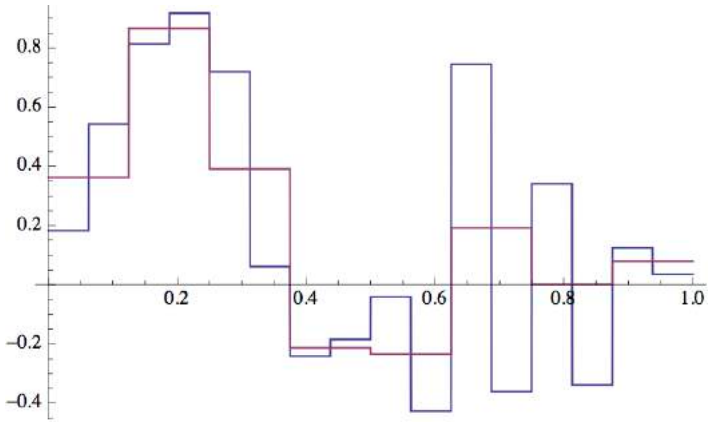


図 6.1　スケール J の dyadic 階段関数 f_J（青線）とスケール $J-1$ の dyadic 階段関数 f_{J-1}（赤線）。dyiadic 区間 $I_{J-1,k} = I_{J,2k} \cup I_{J,2k+1}$ で、$f_{J-1}(x)$ は、$f_J(x)$ の $I_{J-1,k}$ での左右区間上の値 $c_J(2k)$ と $c_J(2k+1)$ の平均値 $\frac{1}{2}(c_J(2k)+c_J(2k+1))$ を取る。

定理 6.25 を繰り返し適用すると、次のような V_j の直交分解を得る。

系 6.26

$$
\begin{aligned}
V_j &= W_{j-1} \oplus V_{j-1} \\
&= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus V_{j-2} \\
&\cdots \\
&= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \cdots \oplus W_J \oplus V_J \\
&\cdots \\
&= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \cdots\cdots \oplus W_0 \oplus V_0
\end{aligned} \tag{6.8}
$$

演習 6.27 この空間構造を**多重化解像度解析**（MRA: Multi Resolution Analysis）という。この空間構造をよく理解しなさい。Fourier 基底で張られる関数空間の分解と比較して検討してみなさい。ここでは、Haar 関数系をつかって MRA を構成したわけだが、MRA を他の関数系を使って構成できるだろうかは、Wavelet 解析における中核的課題である。

定理 6.25 より次の補題が得られる。

補題 6.28 (分割補題) $f_J(x)$ をスケール J の dyadic 階段関数とする。このとき、$f_J(x)$ は次のように分割される。

$$f_J(x) = w_{J-1}(x) + f_{J-1}(x),$$

ここで、$f_{J-1}(x)$ はスケール $J-1$ での**平均化関数**（approximated function）という。また、$w_{J-1}(x)$ をスケール $J-1$ の平均化に相補的な**詳細関数**（detail function）といい、スケール $J-1$ の Haar wavelet の関数

$$w_{J-1} = \sum_k d_k^{J-1} \psi_{J-1,k}(x), \tag{6.9}$$

で表される。

証明　$f_J(x)$ がスケール J の dyadic 階段関数であることより、$f_J(x)$ は区間 $I_{J,k}$ で一定値 $c_J(k)$ を持つ、つまり、

$$f_J(x) = \sum_k c_k^J \chi_{I_{J,k}}(x), \qquad c_k^J = 2^j \int_{I_{j,k}} f(t)\,dt$$

と表されると仮定する。各区間 $I_{J-1,k} = I_{J,2k} \cup I_{J,2k+1}$ について、スケール $J-1$

の平均化関数値 $f_{J-1}(x)$ を次で定義する。

$$
\begin{aligned}
f_{J-1}(x) &= \left[2^{J-1}\int_{I_{J-1,k}} f_J(t)dt\right]\chi_{I_{J-1,k}}(x) \\
&= \left[2^{J-1}\left(\int_{I_{J,2k}} + \int_{I_{J,2k+1}}\right) f_J(t)dt\right]\chi_{I_{J-1,k}}(x) \\
&= \frac{1}{2}\left(c^J_{2k} + c^J_{2k+1}\right)\chi_{I_{J-1,k}}(x). \qquad (6.10)
\end{aligned}
$$

図 6.1 に示したように、区間 $I_{J-1,k}$ 上で、$f_{J-1,k}(x)$ は $I_{J-1,k}$ の左右区間上の $f_J(x)$ の値の平均値を取る。

$w_{J-1}(x) = f_J(x) - f_{J-1}(x)$ とする。注意 6.6 から、w_{J-1} もスケール J の dyadic 階段関数である。このとき、

$$
\begin{aligned}
\int_{I_{J-1,k}} w_{J-1}(t)dt &= \int_{I_{J-1,k}} f_J(t)dt - \int_{I_{J-1,k}} f_{J-1}(t)dt \\
&= \left(\int_{I_{J,2k}} f_J(t)dt + \int_{I_{J,2k+1}} f_J(t)dt\right) - \int_{I_{J-1,k}} f_{J-1}(t)dt \\
&= \left(2^{-J}c^J_{2k} + 2^{-J}c^J_{2k+1}\right) - 2^{-(J-1)}\frac{1}{2}\left(c^J_{2k} + c^J_{2k+1}\right)) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

したがって、区間 $I_{J-1,k}$ 上での詳細関数 $w_{J-1}(x)$ は Haar wavelet 関数 $\psi_{J-1,k}(x)$ の倍数であらねばならず、(6.9) の形となる。 ■

補題の証明から、$f_J(x) = w_{J-1}(x) + f_{J-1}(x)$ は、解像度 2^{-J} の階段関数 $f_J(x)$ が 2 倍幅の区間 $I_{J-1,k}$ で平均化して得られる階段関数 $f_{J-1}(x)$ と各区間 $I_{J-1,k}$ での平均値からのズレ（$I_{J-1,k} = I_{j,2k} \cup I_{j,2k+1}$ の左右区間でプラスとマイナスがある）を表す詳細関数 $w_{J-1}(x)$ との和として表されることを示している。これがスケール $J-1$ の平均化に付随する詳細関数 w_{J-1} の意味である。

分割補題 6.28 を繰り返して適用すると、近似空間 V_J 内の関数 f_J は、スケール $j(j < J)$ までの平均化操作によって近似化した空間 V_j、および近似スケール j に至るまでの詳細空間の列 $W_{J-1}, W_{J-2}, \ldots, W_j$ に f_J を正射影して得られる関数の和

$$
\begin{aligned}
f_J(x) &= w_{J-1}(x) + w_{J-2}(x) + \cdots + w_j(x) + f_j(x) \\
&\cdots \\
&= w_{J-1}(x) + w_{J-2}(x) + \cdots\cdots + w_0(x) + f_0(x)
\end{aligned}
$$

と表すことができる。ここで、w_n は f_j の Haar wavelet 基底 $\{\psi_{n,k}\}$ で張られる詳細空間 W_n への正射影、f_J は f_j の Haar スケーリング基底 $\{\phi_{J,k}\}$ で張られる近似空間 V_J への正射影で得られる関数である。こうした分解を **Haar 分解**（Haar decomposition）あるいは **Haar ウエーブレット変換**（Haar Wavelet transformation）と言う。これについては節 6.3 の近似関数と詳細関数再訪、および、節 6.4 の Wavelet 変換: 分解と再構成アルゴリズムで改めて取り上げる。

例 6.29 例 6.20 では、$\chi_{[0,1/2)}$ を $\phi_{j,k}$ と $\psi_{j,k}$ を使って展開した。$f(x) = \chi_{[0,3/4)}(x)$ の場合を考えよう。区間 $[0, 3/4)$ は dyadic 区間であり、実際、$[0, \frac{3}{4}) = I_{1,0} \cup I_{1,1}$ である。$I_{0,0} = [0, 1)$ 以外では $f(x) = 0$ であるため、展開係数の候補となるのは区間 $[0, 1)$ 内の Dyadic 区間上の $\phi_{j,k}$ と $\psi_{j,k}$ との内積に限られる。

$\langle f \,|\phi_{0,0}\rangle_{L^2} = 3/4$、$k \neq 0$ について $\langle f \,|\phi_{0,k}\rangle_{L^2} = 0$. また、$I_{j,k} \subset [0, 3/4)$ および $I_{j,k} \subset [3/4, 1)$ であるような j, k、すなわち $2 \leqq j$ と $0 \leqq k \leqq 2^j - 1$ について $\langle f \,|\psi_{j,k}\rangle_{L^2} = 0$. したがって、$\langle f \,|\, \psi_{0,0}\rangle_{L^2} = 1/4$ と $\langle f \,|\, \psi_{1,1}\rangle_{L^2} = 2^{-3/2}$ だけが非零である。結局、

$$\chi_{[0,3/4)}(x) = 2^{-3/2}\psi_{1,1}(x) + \frac{1}{4}\psi_{0,0}(x) + \frac{3}{4}\phi_{0,0}(x).$$

演習 6.30 $f(x) = \chi_{[0,11/16)}(x)$ を Haar 分解しなさい。

例 6.31 $f(x) = \chi_{[0,2/3)}(x)$ の Haar 分解を考えよう。$\langle f \,|\phi_{0,0}\rangle_{L^2} = 2/3$、$j, k \neq 0$ について $\langle f \,|\phi_{0,k}\rangle_{L^2} = 0$. 区間 $[0, 2/3)$ は dyadic 区間ではないことに注意しよう。その結果、全てのスケール $j \geqq 0$ で $\psi_{j,k}(x)$ の係数があり得る。ただし、$\langle f \,|\psi_{j,k}\rangle_{L^2}$ が非零となるのは、各スケール $j \geqq 0$ で $2/3$ を含む唯一つの k_j の dyadic 区間 I_{j,k_j} だけである。したがって

$$\begin{aligned}\chi_{[0,2/3)}(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} c_j(k_j)\psi_{j,k_j}(x) + \frac{2}{3}\phi_{0,0}(x) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} c^j_{k_j}\psi(2^j x - k_j) + \frac{2}{3}\phi(x), \qquad c^j_{k_j} = 2^{j/2}c_j(k_j)\end{aligned}$$

と表される。

演習 6.32 $f(x) = \chi_{[0,2/3)}(x)$ の Haar 分解において、$c_j(k_j)$ および $c'_j(k_j)$ の値を $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ について求めなさい。

近似空間 $\{V_j\}$ および詳細空間 $\{W_J\}$ の直交性は次の定理として表される。

定理 6.33 (Haar 系の正規直交性)

(1) W_J を張るスケール J の Haar wavelet 系 $\{\psi_{J,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は W_J の正規直交系である。

(2) V_J および W_J を張るスケール J の組 $\{\phi_{J,k}, \psi_{J,k'}\}_{k,k'\in\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{R}$ 上の正規直交系で、$V_J \perp W_J$.

(3) $\{W_j\}$ を張る各スケール j の Haar wavelet 系 $\{\psi_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{R}$ 上の正規直交系で、$j \neq j'$ について互いに $W_j \perp W_{j'}$.

(4) スケール J の Haar 系 $\{\phi_{J,k}, \psi_{j,k'}(x)\}_{j\geqq J,k,k'\in\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{R}$ 上の正規直交系である。V_J を張る Haar スケーリング基底のスケールは J、一方、wavelet 基底のスケール j は J 以上（$J \leqq j$）であることに注意。

証明　1) まず、与えられたスケール J での直交性を示す。$k, k' \in \mathbb{Z}$ に対する dyadic 区間 $I_{J,k}, I_{J,k'}$ について

$$I_{J,k} \cap I_{J,k'} = \begin{cases} 0, & k \neq k' \\ I_{J,k} & k = k' \end{cases}$$

であることより

$$\langle \psi_{J,k} \,|\, \psi_{J,k'} \rangle_{L^2} = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi_{J,k}(t)^* \psi_{J,k'}(t)\, dt = 0 & k \neq k' \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\psi_{J,k}(t)|^2\, dt = 1 & k = k'. \end{cases}$$

2) 定理 6.25 である。
3) スケール間の直交性を示す。$k, k' \in \mathbb{Z}, j > j'$ のとき、補題 6.3 から、次の 3 通りを考えればよい。

(1) $I_{j,k} \cap I_{j',k'} = \phi$ のとき

$$\langle \psi_{j,k} \,|\, \psi_{j',k'} \rangle_{L^2} = 0.$$

(2) $I_{j,k} \subset I^{\ell}_{j',k'}$ のとき、$I^{\ell}_{j',k'}$ 上で $\psi_{j',k'} = 1$. よって、

$$\langle \psi_{j,k} \,|\, \psi_{j',k'} \rangle_{L^2} = \int_{I_{j,k}} \psi_{j,k}(t)^* \psi_{j',k'}(t)\, dt = \int_{I_{j,k}} \psi_{j,k}(t) dt = 0.$$

(3) $I_{j,k} \subset I^r_{j',k'}$ のとき、$I^r_{j',k'}$ 上で $\psi_{j',k'} = -1$. よって、

$$\langle \psi_{j,k} \,|\, \psi_{j',k'} \rangle_{L^2} = \int_{I_{j,k}} \psi_{j,k}(t)^* \psi_{j',k'}(t)\, dt = -\int_{I_{j,k}} \psi_{j,k}(t) dt = 0.$$

(4) $j \geqq J$ について、$\phi_{J,k}(x)$ と $\psi_{j,k}(x)$ の diadic 区間をしらべることによって、命題 6.24 や 3) と同様にして、$k, k' \in \mathbb{Z}$, $j \geqq J$ に対して

$$\langle \phi_{J,k} \,|\, \psi_{j,k'} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi_{J,k}(t)^* \psi_{j,k'}(t)\, dt = 0.$$

■

6.3 Haar 近似関数と詳細関数再訪

節 1.3 では直交系と直交射影の方法を紹介した。節 6.2 で、近似空間 V_j を階層的に直和分解することによって（定理 6.25）関数を近似する方法を紹介した。この方法は、Fourier 基底を使う関数の近似法とはまったく別種の正規直交系の構成に基づいている。

6.3.1 Haar 近似関数

定義 6.34 与えられたスケール $j \in \mathbb{Z}$ に関する近似空間 $V_j = \overline{\mathrm{span}}\,\{\phi_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ への関数 f の射影演算子 P_j を次で定義する。

$$P_j f(x) = \sum_k \langle \phi_{j,k} \,|\, f \rangle_{L^2} \phi_{j,k}(x) \tag{6.11}$$

$P_j f(x)$ を f のスケール j による Haar 平均化関数という。

注意 6.35 $\{\phi_{j,k}(x)\}$ が $\mathbb{R}$ 上の正規直交系より、dyadic 階段関数 $P_j f(x)$ は L^2 の意味で $f(x)$ を最良近似する V_j 内の関数である。$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\chi_{I_{j,k}}(x)$ に注意すると

$$\begin{aligned}\langle \phi_{j,k} \,|\, f \rangle_{L^2} \phi_{j,k}(x) &= 2^j \langle \phi(2^j x - k) \,|\, f \rangle_{L^2} \phi(2^j x - k) \\ &= 2^j \left(\int_{I_{j,k}} f(t) dt \right) \chi_{I_{j,k}}(x)\end{aligned}$$

であるので、$P_j f(x)$ は dyadic 区間 $I_{j,k}$ 上で平均された値を取ることから、V_j を平均化空間というのである。スケール j の $P_j f(x)$ の解像度は dyadic 区間 $I_{j,k}$ の幅

2^{-j} であり、その区間上における $f(x)$ の値は近似値 $\langle \phi_{j,k} \mid f \rangle_{L^2}$ で置き換えられてしまい、f の詳細は失われてしまう。

まず、射影演算子 P_j の性質を調べておこう。

補題 6.36

(1) P_j は線形演算子である。つまり、$f(x), g(x)$ および $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ について

$$P_j(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha P_j f(x) + \beta P_j g(x).$$

(2) P_j のベキ等性（idenpotent）$P_j^2 = P_j$、つまり

$$P_j(P_j f)(x) = P_j f(x).$$

(3) スケール $j' \geqq j$ の $P_{j'}$ と $f \in V_j$ について

$$P_{j'} f(x) = P_j f(x).$$

(4)

$$\|P_j f\|_{L^2} \leqq \|f\|_{L^2}.$$

証明　(1), (2) は P_j の定義から明らか。(3) は、(2) と $g \in V_j$ のとき $P_j g = g$ であること、および注意 6.6 からわかる。
(4) $\{\phi_{j,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ が正規直交系であることから

$$\begin{aligned}\|P_j f\|_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_k \langle f \mid \phi_{j,k} \rangle_{L^2} \phi_{j,k}(t) \right|^2 dt \\ &= \sum_k |\langle f \mid \phi_{j,k} \rangle_{L^2}|^2 = \sum_k \left| 2^{j/2} \int_{I_{j,k}} f(t) dt \right|^2 .\end{aligned}$$

さらに Cauchy-Schwarz の不等式から

$$\left| 2^{j/2} \int_{I_{j,k}} f(t) dt \right|^2 \leqq \left(\int_{I_{j,k}} 2^j dt \right) \left(\int_{I_{j,k}} |f(t)|^2 dt \right) = \int_{I_{j,k}} |f(t)|^2 dt.$$

したがって、

$$\|P_j f\|_{L^2} \leqq \sum \int_{I_{j,k}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \|f\|_{L^2}^2.$$

■

補題 6.37 $\mathbb{R}$ 上の連続関数 f に対して

(1)

$$\lim_{j\to\infty} \|P_j f - f\|_{L^2} = 0,$$

(2)

$$\lim_{j\to-\infty} \|P_j f\|_{L^2} = 0.$$

証明　(1) $f(x)$ が長さ 2^N の区間 I で定義されているとする（コンパクトサポート）。このとき、ある整数 J と関数 $g \in V_J$ があって

$$\|f-g\|_\infty = \max_x |f(x)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^{N+2}}}$$

とすることができる。$j > J$ について、補題 6.36(3) より、$P_j g(x) = g(x)$ である。Minkowski の不等式と補題 6.36(4) から

$$\begin{aligned}\|P_j f - f\|_{L^2} &\leqq \|P_j f - P_j g\|_{L^2} + \|P_j g - g\|_{L^2} + \|g - f\|_{L^2} \\ &= \|P_j(f-g)\|_{L^2} + \|g-f\|_{L^2} \leqq 2\|g-f\|_{L^2}\end{aligned}$$

一方、

$$\|g-f\|_{L^2}^2 = \int_I |g(t)-f(t)|^2 dt < \int_I \frac{\varepsilon^2}{2^{N+2}} dt = \frac{\varepsilon^2}{4}$$

から $\|g-f\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ を得る。したがって

$$\|P_j f - f\|_{L^2} < 2\|g-f\|_{L^2} < \varepsilon.$$

(2) $f(x)$ は区間 I 上のコンパクトサポートであるので、$I \subset I_{-j,k}$ であるようなある Dyadic 区間 $I_{-j,k}$ が存在して、

$$P_j f(x) = 2^{-j}\left(\int_{I_{-j,k}} f(t)dt\right)\chi_{I_{-j,k}}(x)$$

となる。したがって

$$\|P_j f\|_{L^2}^2 \to 0, \quad (j \to -\infty).$$

■

6.3.2　Haar 詳細関数

定義 6.38 $\mathbb{R}$ 上の関数 f に関するスケール j の Haar 詳細演算子 Q_j を

$$Q_j f(x) = P_{j+1} f(x) - P_j f(x). \tag{6.12}$$

詳細演算子 Q_j は f をどのような関数へ射影するかについて、次の補題が成立する。

補題 6.39 $\mathbb{R}$ 上のコンパクトサポートな連続関数 f に対して、$Q_j f(x)$ は次の関数として表される。

$$Q_j f(x) = \sum_k \langle \psi_{j,k} \mid f \rangle_{L^2} \psi_{j,k}(x). \tag{6.13}$$

証明　与えられたスケール j の dyadic 区間上の $x \in I_{j,k}$ で

$$P_j f(x) = 2^j \int_{I_{j,k}} f(t)dt.$$

また、$I_{j,k}$ はスケール $j+1$ の区間 $I^\ell_{j,k} = I_{j+1,2k}$ および $I^r_{j,k} = I_{j+1,2k+1}$ によって $I_{j,l} = I^\ell_{j,k} \cup I^r_{j,k}$ であることから、

$$P_{j+1} f(x) = \begin{cases} 2^{j+1} \int_{I^\ell_{j,k}} f(t)dt, & x \in I^\ell_{j,k}, \\ 2^{j+1} \int_{I^r_{j,k}} f(t)dt, & x \in I^r_{j,k} \end{cases}$$

であることに注意する。

$$\psi_{j,k}(x) = \begin{cases} 2^{j/2}, & x \in I^\ell_{j,k}, \\ -2^{j/2}, & x \in I^r_{j,k}, \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

を使うと、$x \in I^\ell_{j,k}$ について

$$\begin{aligned} Q_j f(x) &= P_{j+1} f(x) - P_j f(x) \\ &= 2^j \left(2 \int_{I^\ell_{j,k}} f(t)dt - \int_{I^\ell_{j,k}} f(t)dt - \int_{I^r_{j,k}} f(t)dt \right) \\ &= 2^j \left(\int_{I^\ell_{j,k}} f(t)dt - \int_{I^r_{j,k}} f(t)dt \right) \\ &= 2^{j/2} \langle \psi_{j,k} \mid f \rangle . \end{aligned}$$

一方、$x \in I^r_{j,k}$ については

$$\begin{aligned} Q_j f(x) &= 2^j \left(-\int_{I^\ell_{j,k}} f(t)dt + \int_{I^r_{j,k}} f(t)dt \right) \\ &= -2^{j/2} \langle \psi_{j,k} \,|\, f \rangle \end{aligned}$$

である。したがって、区間 $I_{j,k}$ 上で

$$Q_j f(x) = \langle \psi_{j,k} \,|\, f \rangle_{L^2} \psi_{j,k}(x)$$

となる。 ■

スケール j の射影演算子 Q_j の性質をまとめておこう。

補題 6.40 (1) Q_j は線形演算子である。つまり、$f(x), g(x)$ および $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ について

$$Q_j(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha Q_j f(x) + \beta Q_j g(x).$$

(2) Q_j のベキ等性（idenpotent）$Q_j^2 = Q_j$、つまり

$$Q_j(Q_j f)(x) = Q_j f(x).$$

(3) スケール $j' \neq j$ の $Q_{j'}$ と $f \in W_j$ について

$$Q_{j'} g(x) = 0.$$

(4)

$$\|Q_j f\|_{L^2} \leqq \|f\|_{L^2}.$$

証明 補題 6.36 の証明、および W_j の基底関数 $\psi_{j,k}$ の性質を使う。 ■

定理 6.33 の Haar 系の正規直交性をつぎのように射影演算子 P_j と Q_j を使って精密化することができる。

定理 6.41 (Haar 系の完全正規直交性) スケール J の Haar 系 $\{\phi_{J,k}(x), \psi_{j,k}(x) \,|\, j \geqq J\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は $\mathbb{R}$ 上の完全正規直交系である。

証明　定理 6.33 の (4) で正規直交性を示した。完全性を示すには、$\mathbb{R}$ の上のコンパクト連続関数 f が

$$f(x) \in \overline{\mathrm{span}}\{\phi_{J,k}, \psi_{j,k}\}_{j \geqq J, k \in \mathbb{Z}}$$

をいえばよい。$\varepsilon > 0$ とすると、ある整数 N があって $\|P_N f - f\|_{L^2} < \varepsilon$ とできることから、$N > J$ と取る。定義式 (6.12) より

$$\begin{aligned}\sum_{j=J}^{N-1} Q_j f(x) &= \sum_{j=J}^{N-1} P_{j+1} f(x) - P_j f(x) \\ &= P_N f(x) - P_J f(x)\end{aligned}$$

これより、補題の式 (6.13) から

$$P_N f(x) = \sum_{j=J}^{N-1} \sum_{k \in \Lambda} \langle \psi_{j,k} \mid f \rangle \, \psi_{j,k}(x) + \sum_{k \in \Lambda} \langle \phi_{j,k} \mid f \rangle \, \phi_{j,k}(x)$$

ここで、f がコンパクトサポートであるので Λ は有限集合である。したがって、

$$P_N f(x) \in \mathrm{span}\{\phi_{J,k}, \psi_{j,k}\}_{j \geqq J, k \in \mathbb{Z}}$$

および $\|P_N f - f\|_{L^2} < \varepsilon$ が示され、完全性が証明された。 ■

さらに、次も成立する。

定理 6.42 Haar 系 $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ は $\mathbb{R}$ 上の完全正規直交系である。

証明　定理 6.33 の (3) で正規直交性を示した。完全性を示すには、$\mathbb{R}$ 上のコンパクトな連続関数 f について

$$f(x) \in \overline{\mathrm{span}}\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$$

をいう。任意のスケール $J \in \mathbb{N}$ について、定義式 (6.12) より

$$\begin{aligned}\sum_{j=-J}^{J-1} Q_j f(x) &= \sum_{j=-J}^{J-1} P_{j+1} f(x) - P_j f(x) \\ &= P_J f(x) - P_{-J} f(x)\end{aligned}$$

補題 6.37 から

$$\lim_{J\to\infty} \|P_J f - f\|_{L^2} + \|P_{-J} f\|_{L^2} = 0$$

Minkowski の不等式を使うと

$$\begin{aligned}\lim_{J\to\infty} \left\| f - \sum_{j=-J}^{J-1} Q_j f \right\|_{L^2} &= \lim_{J\to\infty} \|f - P_J f + P_{-J} f\|_{L^2} \\ &\leqq \lim_{J\to\infty} \|P_J f - f\|_{L^2} + \|P_{-J} f\|_{L^2} = 0.\end{aligned}$$

また、f がコンパクトサポートであることから Λ を有限集合として

$$\sum_{j=-J}^{J-1} Q_j f(x) = \sum_{j=-J}^{J-1} \sum_{k\in\Lambda} \langle \psi_{j,k} \mid f \rangle \, \psi_{j,k}(x)$$

である。したがって

$$\sum_{j=-J}^{J-1} Q_j f(x) \in \overline{\mathrm{span}}\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$$

より、完全性が証明できた。 ■

注意 6.43 定理 6.42 から、$\mathbb{R}$ 上の L^2 関数 f を形式的に

$$f(x) = \sum_j \sum_k \langle \psi_{j,k} \mid f \rangle \, \psi_{j,k}(x)$$

と表してみる。このとき、両辺を積分すると

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \sum_j \sum_k \langle \psi_{j,k} \mid f \rangle \, \psi_{j,k}(x)dx \\ &= \sum_j \sum_k \langle \psi_{j,k} \mid f \rangle \int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(x)dx = 0\end{aligned}$$

となって、$\mathbb{R}$ 上の L^2 関数 f はすべて $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0$ であることになる。この間違いは、可積分性や滑らかさやコンパクトサポートなど f について何も仮定されていないことからくる。

次を証明抜きで述べておこう。

定理 6.44 空間 $L^2(\mathbb{R})$ は次の無限直和として分解される。

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots.$$

この分解に応じて、各 $f \in L^2(\mathbb{R})$ は

$$f = f_0 + \sum_{j=0}^{\infty} w_j$$

と一意に表される。

6.4 Wavelet 変換： 分解と再構成アルゴリズム

分割補題 6.28 の言葉をつかうと、スケール J の階段関数 $P_J f(x)$ は解像度 $2^{-j}(j < J)$ までの階段関数を使って次のように分解することができる。この操作を**ウェーブレット分解**（wavelet decomposition）または**ウェーブレット変換**（wavelet transformation）という。

$$\begin{aligned} P_J f(x) &= Q_{J-1} f(x) + Q_{J-2} f(x) + \cdots + Q_j f(x) + P_j f(x) \\ &= Q_{J-1} f(x) + Q_{J-2} f(x) + \cdots\cdots + Q_0 f(x) + P_0 f(x) \end{aligned} \tag{6.14}$$

ここで、関数 $P_j f$ は

$$\begin{aligned} P_j f(x) &= \sum_k \langle \phi_{j,k} \mid f \rangle_{L^2} \phi_{j,k}(x) \\ &= \sum_k 2^j \langle \phi(2^j x - k) \mid f \rangle \phi(2^j x - k) = \sum_k \left(2^j \int_{I_{j,k}} f(t)\, dt \right) \phi(2^j x - k) \end{aligned} \tag{6.15}$$

は解像度 $2^{-j}(j < J)$ の階段関数であり、解像度を細かくすれば（より大きなスケール J とすれば）$f(x)$ の特長をよりよく近似すると考えることができる（補題 6.37 参照）。ただし、$P_J f(x)$ を得るにはまず係数 $\langle \phi_{J,k} \mid f \rangle_{L^2} = 2^J \int_{I_{J,k}} f(x) dx$ を計算しなければならない。しかし、以下でみるように、式 (6.14) の右辺にある関数（Haar 関数の係数）を求めるために、実際上は必ずしもこうした積分計算をする必要はない。

多くの応用では、コンパクトサポート、たとえば区間 $[a, b)$ 上の関数 f を考える。このとき、区間 $[a, b]$ から $[0, 1)$ への同相写像を $\tau : x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$ としたとき次の可換関

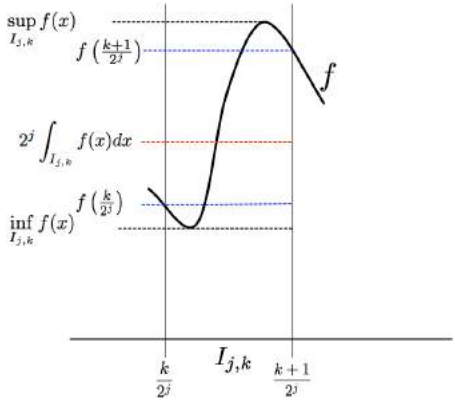


図 6.2　スケール j の dyadic 区間 $I_{j,k}$ 上の関数 f の平均化値 $2^j \int_{I_{j,k}} f(x)dx$ と両端点での標本値 $f(\frac{k}{2^j})$ および $f(\frac{k+1}{2^j})$. f が $I_{j,k}$ 上で単調なとき、$f(\frac{k}{2^j}) < 2^j \int_{I_{j,k}} f(x)dx < f(\frac{k+1}{2^j})$ となる。

係

$$\begin{array}{ccc} [a,b) & \xrightarrow{f} & [a,b) \\ \tau\downarrow & & \downarrow\tau \\ [0,1) & \xrightarrow[\tilde{f}]{} & [0.1) \end{array} \tag{6.16}$$

より、$[a,b)$ 上の関数 f を $[0,1)$ 上の関数 $\tilde{f} = \tau \circ f \circ \tau^{-1}$ と自然に同一視することができる。コンパクトサポート $[a,b)$ 上の関数をこの同一視によって $[0,1)$ 上の関数として取り扱うと計算上都合がよい。

一方、関数 f を $x = \ldots, -2/2^j, -1/2^j, 0, 1/2^j, 2/2^j, \ldots$ といった幅 2^{-j} の dyadic 区間 $\{I_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ の端点で**関数値を標本化** $\{f\left(\frac{k}{2^j}\right)\}_k$ することがある。幅 $|\Delta x| = \frac{1}{2^j}$ を持つ間隔 Δx で関数値を標本化することによって関数 f が十分正しく近似できる（Shannon-Whittaker の標本化定理 3.38）。帯域制限のある信号 f の最大周波数の 2 倍の周期幅（Nyquist 周期）で標本化した離散信号列 $\mathbf{f} = (f^0 f^1 \ldots f^{N-1})$ から信号 $\mathbf{f}$ が完全に再現されるからである。

したがって以降では、コンパクトサポートを持つ関数 $f(x)$ においては、区間 $[0,1)$ 上の関数 $\tilde{f}(x)$ と同一視した上で、式 (6.15) の $P_j\tilde{f}(x)$ を計算するのではなく解像度 2^{-j} で標本化して得られた 2^j 個の関数値の組 $\{c_k^j\}_{k=0,\ldots,2^j-1}$ で定義される次の階段

関数 $f_j(x)$ を考え、これを解像度 2^{-j} による関数 f の近似 $P_j f$ とする。

$$P_j f(x) \sim f_j(x) = \sum_{k=0}^{2^j-1} c_k^j \phi(2^j x - k) = \sum_{k=0}^{2^j-1} f\left(\frac{k}{2^j}\right) \phi(2^j x - k).$$

6.4.1　ウェーブレット変換の分解アルゴリズム

Haar スケーリング関数 ϕ と wavelet 関数 ψ との関係

$$\begin{aligned} \phi(2x) &= \frac{\psi(x) + \phi(x)}{2} \\ \phi(2x-1) &= \frac{\phi(x) - \psi(x)}{2} \end{aligned}$$

をつかって、ただちに次の関係を得る。

補題 6.45

$$\phi(2^j x) = \frac{\psi(2^{j-1}x) + \phi(2^{j-1}x)}{2} \tag{6.17}$$

$$\phi(2^j x - 1) = \frac{\phi(2^{j-1}x) - \psi(2^{j-1}x)}{2} \tag{6.18}$$

一般に

$$\phi(2^j x - 2k) = \frac{\psi(2^{j-1}x - k) + \phi(2^{j-1}x - k)}{2} \tag{6.17$'$}$$

$$\phi(2^j x - 2k - 1) = \frac{\psi(2^{j-1}x - k) - \phi(2^{j-1}x - k)}{2} \tag{6.18$'$}$$

分割補題 6.28 は次のようにウェーブレット変換における Haar 分解係数の関係を与える。

演習 6.46 補題 6.45 を使って、例 6.21 で取り上げた $f(x) = 2\phi(4x) + 2\phi(4x-1) + \phi(4x-2) - \phi(4x-3)$ を Haar 分解して、$f(x) = \psi(2x-1) + \psi(x) + \phi(x)$ となることを示しなさい。

定理 6.47 (Haar 分解定理) スケール j の関数を

$$f_j(x) = \sum_k c_k^j \phi(2^j - k) \in V_j$$

とする。このとき、関数 f_j は分割補題 6.28 より

$$f_j(x) = w_{j-1}(x) + f_{j-1}(x),$$

と分解されて、

$$w_{j-1}(x) = \sum_k d_k^{j-1}\psi(2^{j-1}x - k) \in W_{j-1},$$
$$f_{j-1}(x) = \sum_k c_k^{j-1}\phi(2^{j-1}x - k) \in V_{j-1}$$

である。ここで、

$$c_k^{j-1} = \frac{c_{2k}^j + c_{2k+1}^j}{2}, \tag{6.19}$$
$$d_k^{j-1} = \frac{c_{2k}^j - c_{2k+1}^j}{2}. \tag{6.20}$$

証明

$$\begin{aligned} f_j &= \sum_k c_k^j \phi(2^j - k) \\ &= \sum_k c_{2k}^j \phi(2^j x - 2k) + \sum_k c_{2k+1}^j \phi(2^j x - 2k - 1) \end{aligned}$$

と添字についての和を偶数と奇数にわけて考え、補題 6.45 を使うと

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum c_{2k}^j \frac{\psi(2^{j-1}x - k) + \phi(2^{j-1}x - k)}{2} + \sum_k c_{2k+1}^j \frac{\phi(2^{j-1}x - k) - \psi(2^{j-1}x - k)}{2} \\ &= \sum_k \left(\frac{c_{2k}^j - c_{2k+1}^j}{2}\right)\psi(2^{j-1}x - k) + \left(\frac{c_{2k}^j + c_{2k+1}^j}{2}\right)\phi(2^{j-1}x - k) \\ &= w_{j-1}(x) + f_{j-1}(x). \end{aligned}$$

■

信号 f を離散化してスケール J の解像度 2^{-J} で標本化し、係数 $\{c_k^J = f\left(\frac{k}{2^J}\right)\}_k$ によって階段関数 $f_J(x)$ をひとたび定めると、分解定理 6.47 を繰り返し適用して得られる Haar 分解

$$f_J = w_{J-1} + w_{J-2} + \cdots + w_0 + f_0$$

の係数はスケール J における初期係数の組 $\{c_k^J\}$ だけから

$$\begin{array}{ccccccccccc} c_{k_J}^J & \to & \cdots & \to & c_{k_j}^j & \to & c_{k_{j-1}}^{j-1} & \cdots & \to & c_0^0 \\ & \searrow & \cdots & \searrow & d_{k_j}^j & \searrow & d_{k_{j-1}}^{j-1} & \cdots & \searrow & d_0^0 \end{array} \tag{6.21}$$

のような形で段階的に決定できる。$\{c_k^j\} \to \{c_k^{j-1}\} \cup \{d_k^{j-1}\}$ を **1 段階 wavelet 変換**（1-step wavelet transformation）と呼ぼう。

係数の個数は $^{\#}\{c_k^j\} = {}^{\#}\{c_k^{j-1}\} + {}^{\#}\{d_k^{j-1}\}$ と 1 段階 wavelet 変換では変わらないこと、また平均化係数は $\{c_k^j\} \to \{c_k^{j-1}\}$ で個数は半分になることに注意する。したがって、最初の標本数 2^J とすると、段階 $j(J-1 \geqq j \geqq 0)$ までに得られる全ての係数の集合 $\left\{\{d_{k_{J-1}}^{J-1}\}, \ldots, \{d_{k_j}^j\}, \{c_{k_j}^j\}\right\}$ の要素数は同じである。実際、$0 \leqq k_j \leqq 2^j - 1$ であることに注意すると、段階 j までに得られた係数集合の要素数における関係次のようにである。

$$\begin{aligned} {}^{\#}\{c_{k_J}^J\} &= {}^{\#}\{c_{k_{J-1}}^{J-1}\} + \sum_{s=j}^{J-1} {}^{\#}\{d_{k_s}^s\} + {}^{\#}\{c_{k_j}^j\} \\ &= 2^{J-1} + \left(\sum_{s=j}^{J-1} 2^s\right) + 2^j \\ &= 2^J. \end{aligned}$$

こうして段階 $j(J-1 \geqq j \geqq 0)$ までに得られた Haar 関数系の係数の組 $\left\{\{d_{k_{J-1}}^{J-1}\}, \ldots, \{d_{k_j}^j\}, \{c_{k_j}^j\}\right\}$ から階段関数

$$\begin{aligned} w_j &= \sum_{k_j=0}^{2^j-1} d_{k_j}^j \psi(2^j x - k_j), \\ f_j &= \sum_{k_j=0}^{2^j-1} c_{k_j}^j \phi(2^j x - k_j) \end{aligned}$$

を計算することによって、離散標本値関数 f_J は

$$f_j = w_{j-1} + \cdots + w_j + f_j$$

と分解することができる。

6.4.2 ウェーブレット逆変換の再構成アルゴリズム

節 6.4.1 のウェーブレット変換の分解アルゴリズムでみたように、関数 f を欲するスケール J で標本化（離散化）して得られた係数の組 $\{c_k^J\}_k$ から、f_J を $w_{J-1}+\cdots+w_0+f_0$ と dyadic 階段関数の和として表すための係数 c_0^0（f_0 の係数）および詳細化係数集合の組 $\{d_\ell^j\}_{0\leqq j<J-1,\ell=0,\ldots,2^j-1}$（詳細関数 $\{w_j\}$ の係数）が得られる。これがウェーブレット変換である。この過程は逆にたどることができ、その操作を**ウェーブレット逆変換**（inverse wavelet transformation）という。

信号処理とは、関数 f_J（これは f と同一視しているのだが）を処理目的に応じて関数 f'_J として近似する操作である。処理目的として、たとえば、ノイズの除去やデータ圧縮がある。したがって、Haar 分解における信号処理とは、係数集合 $\{c_k^0\}_k, \{d_\ell^j\}_{0\leqq\ell<J,k}$ を目的に応じて別の係数集合、$\{c_k^0\}_k$ および $\{d_k'^j\}_{0\leqq j<J,k}$ に置き換えることによって近似関数 f'_J を構成することに他ならない。これをウェーブレット逆変換にともなう**再構成アルゴリズム**という。

補題 6.45 はスケール j の Haar 関数を一段粗いスケール $j-1$ の関数で表す関係式である。この関係は可逆な関係

$$\phi(x)=\phi(2x)+\phi(2x-1)$$
$$\psi(x)=\phi(2x)-\phi(2x-1)$$

にあり、次の補題が成立する。

補題 6.48

$$\phi(2^{j-1}x)=\psi(2^jx)+\phi(2^jx-1) \tag{6.22}$$
$$\psi(2^{j-1}x)=\phi(2^jx)-\phi(2^jx-1) \tag{6.23}$$

定理 6.49 (Haar 再構成定理) スケール J の関数 f_J が $f_J=w_{J-1}+w_{J-2}+\cdots+w_0+f_0$ と分解できて

$$w_j(x)=\sum_k d_k^j\psi(2^jx-k)\in W_j,\qquad 0\leqq j<J$$
$$f_0(x)=\sum_k c_k^0\phi(x-k)$$

であるとする。このとき、f_J は

$$f_J(x)=\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} c_\ell^J\phi(2^Jx-\ell)\in V_J$$

と再構成できる。ここで、c_ℓ^j は $j=1$ から $j=J$ まで次のアルゴリズムによって再帰的に定められる。

$$c_\ell^j = \begin{cases} c_k^{j-1} + d_k^{j-1}, & \ell = 2k \text{ が偶数}, \\ \\ c_k^{j-1} - d_k^{j-1}, & \ell = 2k+1 \text{ が奇数}. \end{cases} \tag{6.24}$$

証明　補題 6.48 を使うと

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_k c_k^0 \phi(x-k) \\ &= \sum_k c_k^0 \Big(\phi(2x-2k) + \phi(2x-2k-1) \Big) \\ &= \sum_\ell \tilde{c}_\ell^1 \phi(2x-\ell) \end{aligned}$$

ただし、

$$\tilde{c}_\ell^1 = \begin{cases} c_k^0, & \ell = 2k \text{ が偶数} \\ c_k^0, & \ell = 2k+1 \text{ が奇数}. \end{cases}$$

同様にして、

$$\begin{aligned} w_0(x) &= \sum_k d_k^0 \psi(x-k) \\ &= \sum_k d_k^0 \Big(\phi(2x-2k) - \phi(2x-2k-1) \Big) \\ &= \sum_\ell \tilde{d}_\ell^1 \phi(2x-\ell) \end{aligned}$$

ただし、

$$\tilde{d}_\ell^1 = \begin{cases} d_k^0, & \ell = 2k \text{ が偶数} \\ -d_k^0, & \ell = 2k+1 \text{ が奇数}. \end{cases}$$

したがって

$$f_0(x) + w_0(x) = \sum_\ell c_\ell^1 \phi(2x-\ell)$$

とすると

$$c_\ell^1 = \tilde{c}_\ell^1 + \tilde{d}_\ell^1 \begin{cases} c_k^0 + d_k^0, & \ell = 2k \text{ が偶数} \\ \\ c_k^0 - d_k^0, & \ell = 2k+1 \text{ が奇数.} \end{cases}$$

を得る。さらに、$w_1 = \sum_k d_l^1 \psi(2x-k)$ についても同様に考えると

$$f_2(x_= f_0(x) + w_0(x) + w_1(x) = \sum \ell c_\ell^2 \phi(2^2 x - \ell)$$

として

$$c_\ell^2 = \tilde{c}_\ell^2 + \tilde{d}_\ell^2 \begin{cases} c_k^2 + d_k^2, & \ell = 2k \text{ が偶数} \\ \\ c_k^2 - d_k^2, & \ell = 2k+1 \text{ が奇数.} \end{cases}$$

を得る。この過程を $f_J = f_{J-1} + w_{J-1}$ まで再帰的に繰り返して結果を得る。 ■

6.4.3 具体例

次の関数を考えてみよう。

$$f(x) = \sin(2x)\cos\left(x^3\right) + \left(\frac{\sin(110(x-2))}{110(x-2)}\right)^2 - \left(\frac{\sin(95(x-1))}{95(x-1)}\right)^2 \quad (6.25)$$

区間 $[0,\pi]$ での様子（図 6.3）を観察すると、狭い区間での急激な関数値の変化（スパイク）が二箇所 $x=1$ および $x=2$ の付近にあることがわかる。

区間 $[0,\pi)$ を $N = 2^8 = 254$ 個のスケール $J = 8$ の dyadic 区間 $\{I_{8,k}\}_k$ に分割し、その左端 $x = \frac{k}{2^8}, (k = 0,\ldots,2^8-1)$ で標本化した関数値の組を $\{c_k^8 = f\left(\frac{k}{2^8}\right)\}_{k=0,\ldots,2^8-1}$ とする。Mathematica は、段階 j のスケーリング関数 $\phi(2^j x - k)$ を `HaarScale[x, j, k]`、$[0,\pi]$ 上の関数 $f(x)$ を式 (6.16) の意味で $[0,1]$ 上の関数 $\tilde{f}(x)$ として同一視して `spiked[x]` で定義しておくと、標本値の組 $\{c_k^8\}$ を `coeff` として求めて次のようにしてスケール $J=8$ の階段関数 $f_8(x)$ を表示できる。ここで、Mathematica の添字が 1 から始まることを考慮して、`coeff[k + 1]` としていることに注意しよう。

```
HaarScale[x_Real, j_Integer, k_Integer] :=
  If[x < k/2^j || (k + 1)/2^j < x, 0, 1]
  j=8;
```

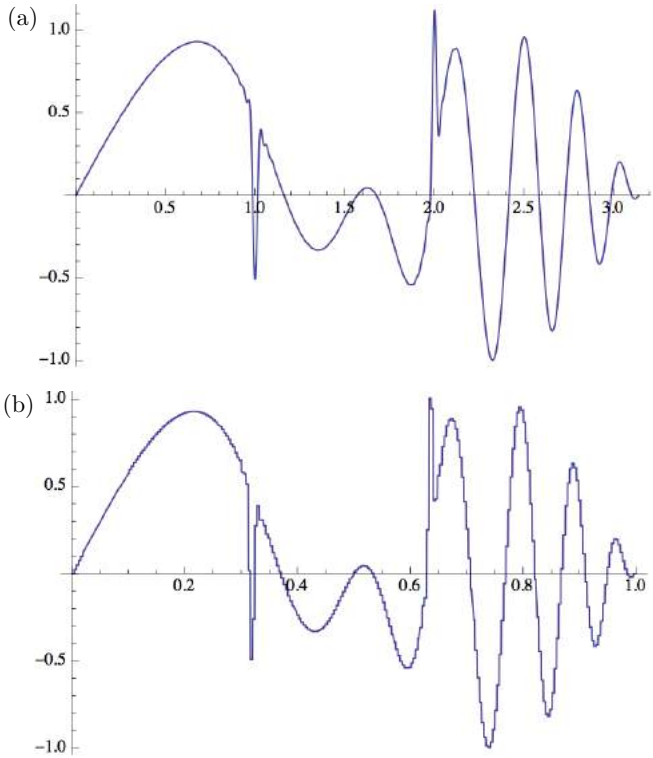


図 6.3　(a) $f(x) = \sin(2x)\cos\left(x^3\right) + \left(\frac{\sin(110(x-2))}{110(x-2)}\right)^2 - \left(\frac{\sin(95(x-1))}{95(x-1)}\right)^2$ の区間 $[0, \pi]$ での様子。狭い区間での急激な関数値の変化（スパイク）が二箇所 $x = 1$ および $x = 2$ の付近に見られる。
(b) 区間 $[0, \pi)$ を 2^8 個に分割して各左端で標本化した値 $\{f\left(\frac{k\pi}{2^8}\right)\}_{k=0,\ldots,2^8-1}$ を区間 $[0, 1)$ 上の関数 $\tilde{f}(x)$ と同一視するために $f(\pi x)$ の解像度 2^{-8} での標本値とした階段関数 $f_8(x)$ の様子。

```
coeff = Table[N[spiked[t]], {t, 0, Pi, Pi/(2^j - 1)}];
spiked[x_Real] := Sum[coeff[[k + 1]] HaarScale[x, j, k], {k, 0, 2^j - 1}]
Plot[dspiky[x], {x, 0, 1}]
```

このとき、スケール $J = 8$ の標本値の組 $\{c_k^8\}$ から、奇数番目の係数リストを oddCoeff、偶数番目の係数リストをevenCoeff として、段階 $J - 1 = 7$ の平均化関

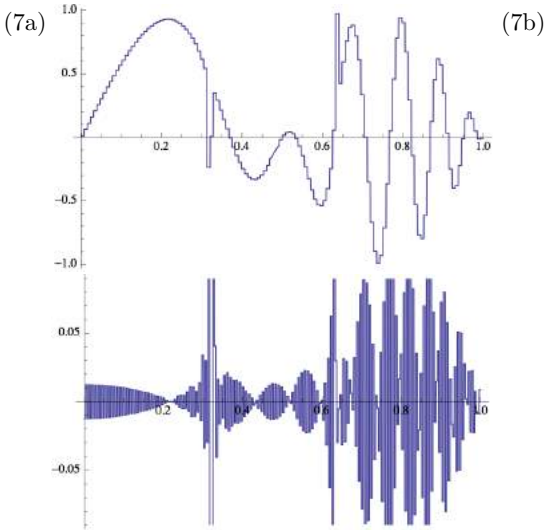


図 6.4　(7a) 式 (6.25) の関数をスケール $J = 8$ で標本化した階段関数 f_8 の平均化関数 $f_7(x)$ と (7b) 詳細化関数 $w_7(x)$. この図では $w_7(x)$ の一部の値が図範囲を越えている。

数 $f_7(x)$ を `averaged[x]`、詳細関数 $w_7(x)$ を `detailed[x]` としたとき、これらを次のように求めることができる。ただし、Mathematica の添字が 1 から始まることから、0 から添字が始まるリスト even と odd における even - odd は Mathematica では odd - even となることに注意する。また、`[[...]]` 内の添字指定 `i;;j;;2` は、i から j までのステップ 2 でリスト要素を取り出す Mathematica 記法である。

```
Haarwavelet[x_Real, j_Integer, k_Integer] :=
 HaarScale[x, j + 1, 2 k] - HaarScale[x, j + 1, 2 k + 1]
oddCoeff = coeff[[1 ;; Length[coeff] ;; 2]];
evenCoeff = coeff[[2 ;; Length[coeff] ;; 2]];
aveCoeff = (evenCoeff + oddCoeff)/2;
diffCoeff = (oddCoeff - evenCoeff)/2;
detailed7[x_Real] :=
 Sum[diffCoeff[[k + 1]] Haarwavelet[x, 7, k], {k, 0, 2^7 - 1}]
averaged7[x_Real] :=
 Sum[aveCoeff[[k + 1]] HaarScale[x, 7, k], {k, 0, 2^7 - 1}]
```

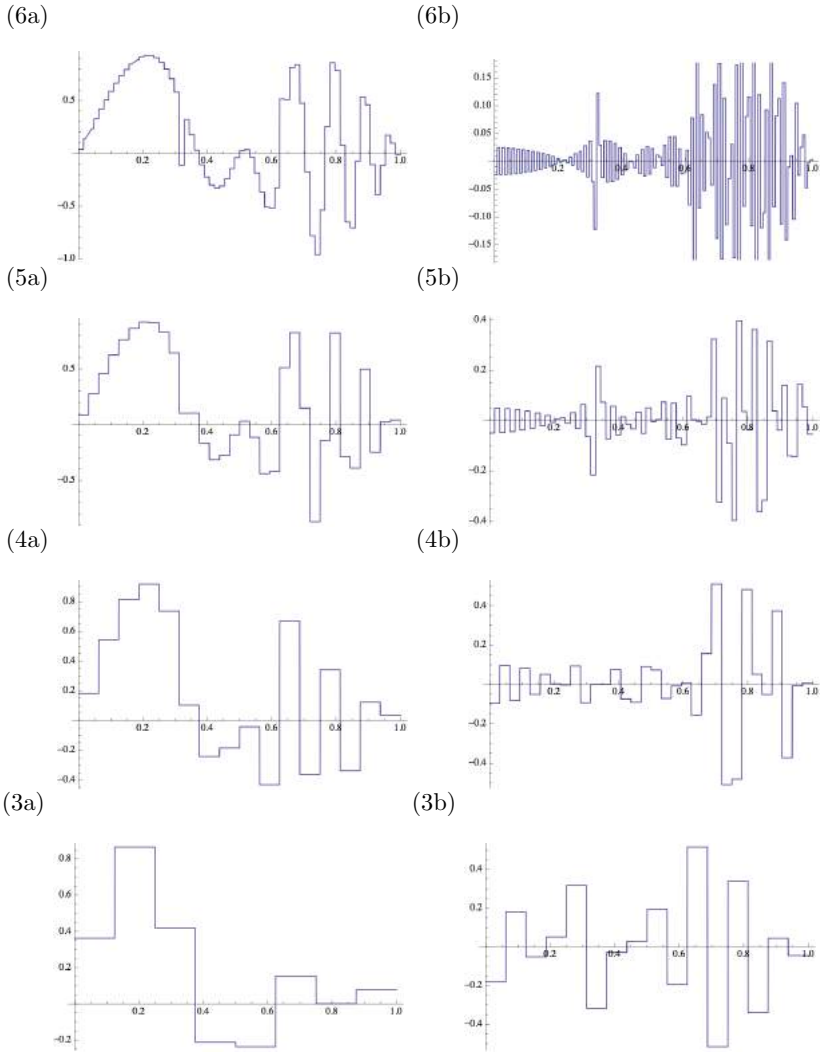


図 6.5　式 (6.25) の関数をスケール $J = 8$ で標本化した階段関数 f_8 の平均化関数と詳細関数。（6）f_6 と w_6,（5）f_5 と w_5,（4）f_4 と w_4,（3）f_3 と w_3.

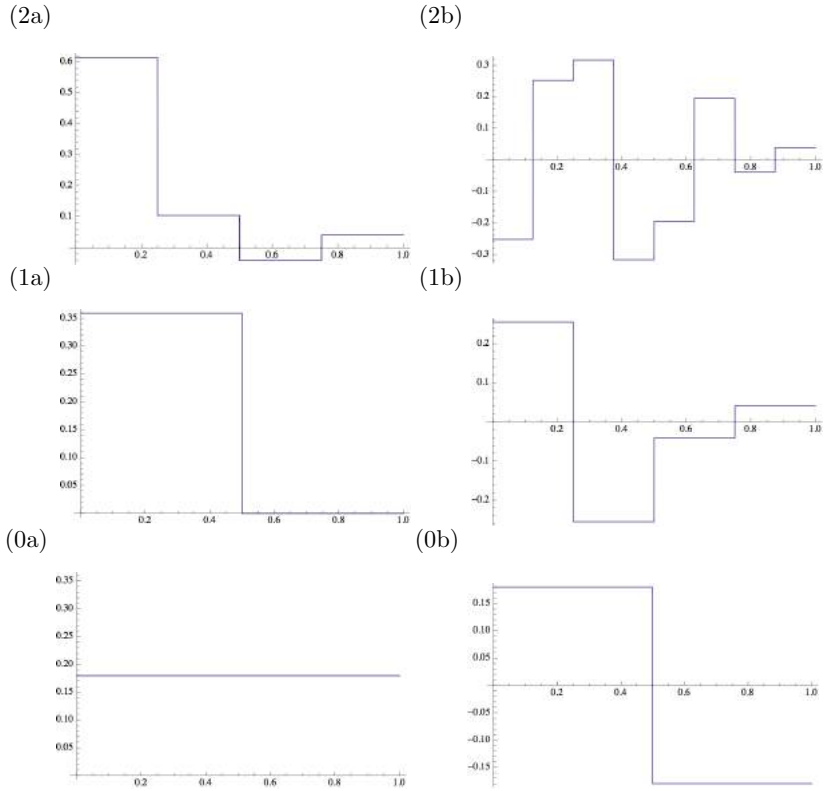


図 6.6　式 (6.25) の関数をスケール $J = 8$ で標本化した階段関数 f_8 の平均化関数と詳細関数。（2）f_2 と w_2,（1）f_1 と w_1,（0）f_0 と w_0.

段階 $j = 7$ での関数の和 `detailed7[x] + averaged7[x]` は元の関数 `dspiked[x]` となる（図 6.16(b) と図 6.4 とを比較）。同様な手順によって、段階 $j = 6 \sim 0$ までの平均化関数と詳細関数を図 6.5 および図 6.6 に示した。

平均化関数 $\{f_\ell\}$ だけを観察してみよう。標本化から得られた dyadic 区間 $I_{8,k}$ 上の階段関数 f_8 は、f_7 では倍の dyadic 区間 $I_{7,k} = I_{8,2k} \cup I_{7,2k+1}$ 上で左右区間における係数 c^8_{2k} と c^8_{2k+1} の平均値 $\frac{1}{2}(c^8_{2k} + c^8_{2k+1})$ を取る。f_6 ではさらに倍の区間上で隣り合う係数の平均値 $\frac{1}{2}(c^7_{2k'} + c^7_{2k'+1})$ というように、f_5, f_4, f_3, f_2, f_1 と次々に階段の幅が倍々に広がっていく。f_0 に至っては全区間 $[0, 1)$ での平均値となっている（図

6.16 と図 6.6 の (6-0a))。解像度 $2^{-\ell}$ を持つスケール ℓ が小さい f_ℓ になるにつれて、元の関数 f の近似は粗くなって、f_0 で平ら（全区間平均）になってしまう。

一方、関数 f の粗視化を逆に辿ると、図 6.6(0) で $f_0 + w_0$ が (1) の f_1 になること、(2) で $f_1 + w_1$ が (2) の f_2 となることがその数値からも確かめられる。これが再構成アルゴリズムで、$f_{\ell+1} = f_\ell + w_\ell (0 \leqq \ell < j)$ を与えている。

演習 6.50 図 6.3、図 6.4、図 6.5 および図 6.6 を描いてみなさい。

（ヒント）: 与えられたスケール J の関数 f_J の Haar 分解 $f_J = w_{J-1} + \cdots + w_{J-k} + f_{J-k}$ において、$f_{J-k}(x)$ =`averagedHaarScaling[x, k]` および $w_{J-k}(x)$ =`HaarWaveletElement[x, k]` の計算のために次のように Mathematica 関数を定義してもよい（ただし、スケール J の係数の組 $\{c_k^J\}$ = `coeff` が与えられていて段階 $J-k$ の Haar 分解係数リスト $\{c_\ell^{J-k}\}$, $\{d_\ell^{J-k}\}$ を得て関数 f_{J-k}, w_{J-k} を構成するために $1 \leqq$ `k` $\leqq J$ の範囲で引数 k が与えられている)。ただし、このやり方はたいへん効率が悪く、逐次的に求められる途中の段階 $0 \leqq j \leqq J-k$ の係数 $\{c_\ell^j\}$ や $\{d_\ell^j\}$ を毎回その都度計算してしまっている（区分的に連続関数として計算しているが、階段区間の幅と階段の高ささえ分かれば計算できることである)。

```
averagedHaarScaling[x_Real, k_Integer] :=
Module[{cf, n, oddc, evenc, avecf, j, i},
  (* coef=Table[N[f[x]], {x, a, b,(b-a)/(2^n-1)}]; *)
  cf = coeff;
  n = Log[2, Length[coeff]];
  For[j = 0, j < k, j++,
   oddc = cf[[1 ;; 2^(n - j) ;; 2]];
   evenc = cf[[2 ;; 2^(n - j) ;; 2]];
   avecf = (oddc + evenc)/2;
   cf = avecf;
   ];
  Sum[cf[[i + 1]] HaarScale[x, n - k, i], {i, 0, 2^(n - k) - 1}]
]

HaarWaveletElement[x_Real, k_Integer] :=
Module[{cf, n, oddc, evenc, avecf, diffcf, j, i},
  (* coef=Table[N[f[x]], {x, a, b,(b-a)/(2^n-1)}]; *)
  cf = coeff;
  n = Log[2, Length[coeff]];
  For[j = 0, j < k, j++,
```

```
      oddc = cf[[1 ;; 2^(n - j) ;; 2]];
      evenc = cf[[2 ;; 2^(n - j) ;; 2]];
      avecf = (oddc + evenc)/2;
      cf = avecf;
      ];
     diffcf = (oddc - evenc)/2;
     Sum[diffcf[[i + 1]] Haarwavelet[x, n - k, i], {i, 0,
       2^(n - k) - 1}]
  ]
```

たとえば、図 6.5(3) を

```
Plot[averagedHaarScaling[x, 5], {x, 0, 1}]
Plot[HaarWaveletElement[x, 5], {x, 0, 1}
```

で描くことができ、`HaarWaveletElement[x, 4]` が `HaarWaveletElement[x, 5] + averagedHaarScaling[x, 5]` に等しいことが確かめられる。

6.5　高速ウェーブレット変換

ウェーブレット変換においては係数の組 $\{c_k^j\}$ および $\{d_k^j\}$ だけが本質的である。スケーリング関数や wavelet 関数は、定理 6.47 のように、係数の組を使って関数 f_j を $f_j(x) = w_{j-1}(x) + f_{j-1}(x)$ と Haar 分解して近似関数 $\{f_j\}$ を具体的に構成するときに必要になる。これらは式 (6.19) と (6.20)、つまり

$$c_k^j = \frac{c_{2k}^{j+1} + c_{2k+1}^{j+1}}{2}, \tag{6.19}$$

$$d_k^j = \frac{c_{2k}^{j+1} - c_{2k+1}^{j+1}}{2}. \tag{6.20}$$

の関係式を $\begin{matrix} c_{k_{j+1}}^{j+1} & \to & c_{k_j}^j \\ d_{k_{j+1}}^{j+1} & \searrow & d_{k_j}^j \end{matrix}$ と表わすことにすると、最初にスケール J で標本化して得られる 2^J 個の組 $\{c_k^J\}$ から、式 (6.19) と (6.20) を次々と適用して、$\{c_k^{J-1}\} \to \{c_k^{J-2}\} \to \ldots$ というようにしてカスケード (6.21) のようにして、最後には係数 c_0^0 と d_0^0 を求めていく。これが Wavelet 変換である。

1 段階 wavelet 変換（190 ページ）で注意したように、与えられたスケール J における段階 $j(J-1 \geqq j \geqq 0)$ までに得られた Haar 関数系の係数の組

$\left\{\{d^{J-1}_{k_{J-1}}\},\ldots,\{d^{j}_{k_j}\},\{c^{j}_{k_j}\}\right\}$ の要素総数は最初の標本数 2^J のままで変わらない。この事実を利用して、Haar ウェーブレット変換の分解係数を効率的に求める高速アルゴリズムを考えよう。

最初に与えるスケール J の標本係数の組 $\{c^J_k\}_{k=0,\ldots,2^J-1}$ を長さ 2^J の配列 `data` に格納しておく。1 段階 wavelet 変換の各段階 $j(0 \leqq j \leqq J-1)$ で、配列要素をつぎのように更新するとしよう（以下は $J=3$ の場合の段階 0 までの配列変化を示している）。また、記号 '^' のついた要素は新たに値が代入された配列要素を表している。

$$
\begin{array}{ll}
\text{j=3} & \left[c^3_0 \quad c^3_1 \quad c^3_2 \quad c^3_3 \quad c^3_4 \quad c^3_5 \quad c^3_6 \quad c^3_7\right] \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow \\
\text{j=2} & \left[\widehat{c^2_0} \quad \widehat{d^2_0} \quad \widehat{c^2_1} \quad \widehat{d^2_1} \quad \widehat{c^2_2} \quad \widehat{d^2_2} \quad \widehat{c^2_3} \quad \widehat{d^2_3}\right] \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow \\
\text{j=1} & \left[\widehat{c^1_0} \quad d^2_0 \quad \widehat{d^1_0} \quad d^2_1 \quad \widehat{c^1_1} \quad d^2_2 \quad \widehat{d^1_1} \quad d^2_3\right] \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow \\
\text{j=0} & \left[\widehat{c^0_0} \quad d^2_0 \quad d^1_0 \quad d^2_1 \quad \widehat{d^0_0} \quad d^2_2 \quad d^1_1 \quad d^2_3\right]
\end{array}
$$

1 段階 wavelet 変換後の段階 $j-1$ における配列要素 `data` は、段階 j における配列 `data` を使って

$$
\begin{aligned}
&\text{各 } k \text{ について} && \texttt{tmp} \leftarrow \texttt{data}[2^{J-j+1}k] \\
&c^{j-1}_k \text{ として} && \texttt{data}[2^{J-j+1}k] \leftarrow \frac{1}{2}\left(\texttt{tmp} + \texttt{data}[2^{J-j+1}k + 2^{J-j}]\right) \\
&d^{j-1}_k \text{ として} && \texttt{data}[2^{J-j+1}k + 2^{J-j}] \leftarrow \frac{1}{2}\left(\texttt{tmp} - \texttt{data}[2^{J-j+1}k + 2^{J-j}]\right) \\
& && k = 0,\ldots,2^{j-1}-1
\end{aligned}
$$

として得られる。これより、段階 $j=0$ までの Haar ウェーブレット係数を求める高速ウェーブレット変換アルゴリズムが得られる。

命題 6.51 (高速ウェーブレット変換) スケール J の 2^J 個の標本係数の組 $\{c^J_k\}_{k=0,\ldots,2^J-1}$ が長さ 2^J の配列 `data` に代入 `data` $\leftarrow \{c^J_k\}$ されている。このとき、近似度を上げながら段階 $j=0$ までの Haar ウェーブレット係数を求めるウェーブレット変換アルゴリズムは次のようである。

```
for j = J to 1
    for k = 0 to 2^(j-1) - 1
        tmp <- data[2^(J-j+1)k]
```

```
    data[2^(J-j+1)k] <- (tmp + data[2^(J-j+1)k + 2^(J-j)]) / 2
    data[2^(J-j+1)k + 2^(J-j)] <- (tmp - data[2^(J-j+1)k + 2^(J-j)]) / 2
```

このアルゴリズムによって得られる長さ 2^J の配列 data において、段階 $j(0 \leqq j \leqq J-1)$ までの係数の組 $\left\{\{d^{J-1}_{k_{J-1}}\}, \ldots, \{d^j_{k_j}\}, \{c^j_{k_j}\}\right\}$ は次の関係にある。

$$\{c^j_{k_j}\} = \{\mathtt{data}[2^{J-j}k_j]\}, \quad k_j = 0, \ldots 2^j - 1$$
$$\{d^j_{k_j}\} = \{\mathtt{data}[2^{J-j}k_j + 2^{J-j-1}]\}.$$

注意 6.52 この計算アルゴリズムに必要な空間量は、与えられる最初のスケール J の係数 $\{c^J_k\}$ を格納する 2^J 個の配列 data[ ] と 1 個の変数 tmp に必要な総計 $2^j + 1$ 個のメモリである。計算量は data[$2^{(J-j+1)k}$] および data[$2^{(J-j+1)k} + 2^{(J-j)}$] を計算するために必要な足し算が $2 \times (1 + 2^1 + \cdots + 2^{J-1}) = 2^{J+1}$ 回である。

注意 6.53 このテキストで紹介するアルゴリズムはリスト（配列）の先頭位置を 0 からとしている。しかしながら、Mathematica ではリストの先頭位置は 1 から始まることに注意する。

一方、Haar 再構成定理 6.49 の式 (6.24) によって、段階 $j(0 \leqq j \leqq J-1)$ で得られた Haar 関数系の係数の組 $\left\{\{d^{J-1}_{k_{J-1}}\}, \ldots, \{d^j_{k_j}\}, \{c^j_{k_j}\}\right\}$ から

$$c^j_{2k} = c^{j-1}_k + d^{j-1}_k, \quad k = 0, \ldots, 2^{j-1} - 1 \tag{6.26}$$
$$c^j_{2k+1} = c^{j-1}_k - d^{j-1}_k \tag{6.27}$$

を逐次的に適用して、元の 2^J 個の標本化係数の組 $\{c^J_k\}_{k=0,\ldots,2^J-1}$ を復元することができる。これより、段階 j まで Haar ウェーブレット変換によって求められた Haar 関数系の係数の組から、元の標本化係数の組 $\{c^J_k\}$ を復元する高速逆ウェーブレット変換アルゴリズムが得られる。

命題 6.54 (高速逆ウェーブレット変換) 段階 j まで Haar ウェーブレット変換によって求められた Haar 関数系の係数の組が長さ 2^J の配列 data に代入 data $\leftarrow \left\{\{d^{J-1}_{k_{J-1}}\}, \ldots, \{d^j_{k_j}\}, \{c^j_{k_j}\}\right\}$ されている。このとき、元のスケール J の標本化係数 $\{c^J_k\}$ を復元する逆ウェーブレット変換アルゴリズムは次のようである。

```
for j = 0 to J-1
    for k = 0 to 2^j - 1
        tmp <- data[2^(J-j)k]
```

```
data[2^(J-j)k] <- tmp + data[2^(J-j)k + 2^(J-j-1)]
data[2^(J-j)k + 2^(J-j-1)] <- tmp - data[2^(J-j)k + 2^(J-j-1)]
```

演習 6.55 節 6.4.3 の具体例において、スケール J の関数 f_J を $f_J = w_{J-1} + \cdots + w_{J-k} + f_{J-k}$ というように Haar 分解する高速ウェーブレット変換を使う Mathematica プログラムを書きなさい。

6.5.1　平均化係数の左詰配置

個数 2^J 個の係数の組 $\{c_k^J\}$ から、1 段階 wavelet 変換を繰り返して、2^j 個の j 段階（$1 \leqq j \leqq J$）の平均化係数の組 $\{c_k^j\}$ からそれぞれ 2^{j-1} 個の段階 $j-1$ の平均化係数の組 $\{c_k^{j-1}\}$ および詳細係数の組 $\{d_k^{J-1}\}$ を求めることが wavelet 変換である。高速 wavelet 変換アルゴリズムは 2^J 個の係数の組 $\left\{\{d_k^{J-1}\}, \ldots, \{d_k^1\}, d_0^0, c_0^0\right\}$ は空間計算量の観点から効率的であった。

$\{c_k^j\} \to \{c_k^{j-1}\} \cup \{d_k^{J-1}\}$ において、$\{c_k^j\}$ を長さ 2^j の連続する配列に収納し、1 段階 wavelet 変換後に得られる $2j-1$ 個の隣り合う 2 個の係数を平均化した組 $\{c_k^{j-1}\}$ を同じ配列領域に左詰めに、2^{j-1} 個の隣り合う 2 個の係数の平均からのズレの組 $\{d_k^{J-1}\}$ を右詰めに配置することを考えてみよう。この係数配置の仕方を**平均化係数の左詰配置**と呼ぼう。

平均化係数の左詰配置法をとると、段階 j まで 1 段階 wavelet 変換を繰り返したとき、大きさ 2^J の配列は次の順に係数が並ぶ。

$$\left\{\{c_{k_j}^j\}_{0 \leqq k_j \leqq 2^j-1}, \{d_{k_j}^j\}_{0 \leqq k_j \leqq 2^j-1}, \{d_{k_{j-1}}^{j-1}\}_{0 \leqq k_{j-1} \leqq 2^{j-1}-1}, \ldots, \{d_{k_{J-1}}^{J-1}\}_{0 \leqq k_{J-1} \leqq 2^{J-1}-1}\right\}.$$

平均係数の左詰配置は、節 7.3 でみるように、係数データの視覚化に意味があるような画像データを取り扱う場合に都合がよい。

第 7 章

離散 Haar 系

7.1 離散 Haar 関数系

先の演習 6.50 で、与えられたスケール $J = 8$ の 2^J 個の係数の組 $\{c_k^J\}$ から関数 f_J の Haar 分解 $f_J = w_{J-1} + \cdots + w_{J-k} + f_{J-k}$ を計算して各関数 $w_{J-k}(x)$ を描くためには相応の時間がかかる。この計算に必要な主要な部分は、完全な Haar 分解係数の組 $\{c_k^j\}_{j=0,\ldots,J-1}$, $\{d_k^j\}_{j=0,\ldots,J-1}$ を得るための計算でなく、dyadic 区間上で定数である区分的に連続な階段関数の扱いに費やされ、特に描画する際は相当時間を要する。このままでは、与えられたスケール J が実用域における計算を行うことは事実上不可能である。

計算の高速化は実用的にも理論的にも追求されるべきことがらである。たとえば、サンプリング周波数 4,4100Hz の CD 音質で標本化したスケール 19（2^{19} 個）のモノラル音声データは時間的には $2^{19}/44100 = 11.9$[sec] に相当する。また、一片 $512 = 2^9$ ピクセルのグレースケール正方画像は $2^{9+9} = 262144$ つまりスケール 18 のデータに相当する。計算の高速化は Fourier 変換の場合と同様に、まず基底関数の離散化、次いで、諸計算のアルゴリズム自体の改良によって達成される。ここでは、Haar 関数系の離散化を考えよう。

コンパクトサポート $[a, b)$ で定義された関数 $f(x)$ をスケール J で標本化するとは、区間 $[a, b)$ を 2^J 当分して $x = a + k\frac{b-a}{2^J} (k = 1, \ldots, 2^J - 1)$ における 2^J 個の関数値の組

$$\left\{c_k^J\right\}_{k=0,\ldots,2^J-1}, \qquad c_k^J = f\left(a + k\frac{b-a}{2^J}\right)$$

を採取することである。右端の標本値 $c_{2^J-1}^J$ は $x = b - \frac{b-q}{2^J}$ での値 $f\left(b - \frac{b-q}{2^J}\right)$ で

あることに注意しよう。区間 $[a,b)$ 上の関数 $f(x)$ をこの 2^J 個の標本値 $\{c_k^J\}$ によって階段関数によって近似することと、解像度 2^{-J} で区間 $[0,1)$ 上の階段関数

$$\widehat{f}_J(x) = \sum_{k=0}^{2^J-1} c_k^J \phi(2^J x - k)$$

を考えることとは同等である（式 (6.16) 参照)。実際、図 6.3(b) は、こうして区間 $[0,\pi)$ 上の関数を標本化して係数の組 $\{c_k^J\}$ を得て、$[0,1)$ の関数として表している。以下、$[a,b)$ 上の関数 f をこうして同一視した $[0,1)$ 上の関数 $\widehat{f}$ を同じ記号 f で表そう。

このようにして $[0,1)$ 上の関数 f をスケール J で標本化すると、区間 $[0,1)$ の関数 f は 2^J 個の関数値の点列 $\boldsymbol{f} = (c_0^J, \ldots, c_{2^J-1}^J)$ に置き換わる。これが $[0,1)$ 上の関数 f の**離散化**（discretaization）である。

Haar 関数系の離散化において、もとの関数の定義域 $[0,1)$ を等分割して 2^J 個の関数値 $\{c_k^J\}$ を標本値として与え、各段階 $0 \leqq j \leqq J$ において、隣り合う要素を足して 2 で割って得られる平均化関数値の組 $\{c_k^j\}$ は同じく Haar 分解定理 6.47 の式 (6.19) から求められるようにしたい。つまり、離散化された Haar 関数系においても、この平均化操作は段階を $J-1$ から 0 へと下げるにつれて平均化にあずかる要素数が倍々に広がり、段階 0 に至って全要素を平均化するようにしたいのである。

同時に、この分解過程は可逆で、平均からのズレを与える式 (6.20) の詳細係数 $\{d_k^j\}$ を合わせて使って Haar 再構成定理 6.49 の式 (6.24) から元の係数の組 $\{c_k^J\}$ を再構成できねばならない。

以上の準備的考察から、$[0,1)$ 上の Haar 関数系に対応した解像度 2^{-J} における離散 Haar 関数系（ベクトル系）を次のように定義する（図 7.1)。

定義 7.1 (離散 Haar ベクトル系) 与えられたスケール J で定まる長さ 2^{J+1} のベクトルであって

(1) その要素が次で与えられるベクトルを離散 Haar スケーリング関数 $\phi_J(j,k)$ と定義する。

$$\phi_J(j,k) = (\underbrace{0\ldots0}_{k2^{J+1-j}}\ \underbrace{1\ldots\ldots1}_{2^{J+1-j}}\ \underbrace{0\ldots\ldots0}_{2^{J+1}-(k+1)2^{J+1-j}}), \quad (0 \leqq j \leqq J, 0 \leqq k < 2^j - 1) \tag{7.1}$$

(2) その要素が次で与えられるベクトルを離散 Haarwavelet 関数 $\psi_J(j,k)$ 定義す

る。

$$\psi_J(j,k) = (\underbrace{0\ldots0}_{k2^{J+1-j}}\ \underbrace{1\ldots1}_{2^{J-j}}, \underbrace{-1\cdots-1}_{2^{J-j}}\ \underbrace{0\ldots\ldots0}_{2^{J+1}-(k+1)2^{J+1-j}}), \quad (0 \leqq j \leqq J,\, 0 \leqq k < 2^j-1) \tag{7.2}$$

注意 7.2 $\phi_J(0,0)$ と $\psi_J(0,0)$ はそれぞれ $[0,1)$ 上の $\phi(x)$ および $\psi(x)$ に相当する。関数変化の観点からは常に $\psi(2^jx)$ は $\phi(2^jx)$ の倍の解像度を持っており、$\psi(2^jx)$ は幅 $\frac{1}{2^j}$ の区間内の左右で値が ±1 を取ることから、スケール J の離散 Haar 系のベクトル長を 2^{J+1} としている。実際、段階 j の離散 Haar 関数系（ベクトル系）$\phi_J(j,k)$ および $\psi_J(j,k)$ の 2^{J+1} 個の要素を位置 $x = \frac{k}{2^{J+1}}, k = 0,\ldots,2^{J+1}-1$ にプロットし（図 7.1）、さらに各点から長さ $2^{-(J+1)}$ の水平線を引いて得られる関数のグラフは、$0 \leqq j \leqq J$ についての区分的に連続な Haar 関数系 $\phi(2^jx-k)$ および $\psi(2^jx-k)$ のグラフに一致する。

スケール J で定まる長さ 2^{J+1} を持つ離散 Haar ベクトル系の内積を、式 (1.1) のベクトル内積で定義する。このとき、離散 Haar 関数系においても定理 6.33 と同等な直交関係が成立する。

定理 7.3 スケール J の離散 Haar 関数系は直交ベクトル系であり、次が成立する。

(1) $V_j^J = \mathrm{span}\{\phi_J(j,k)\}_{k=1,\ldots,2^j-1}$ を張る基底ベクトルの組に関する直交性

$$\langle \phi_J(j,k) \,|\, \phi_J(j,k') \rangle = 2^{J+1-j}\delta_{kk'}, \quad (0 \leqq j < J,\, 0 \leqq k,\, k' < 2^j-1).$$

(2) ベクトル空間の組 $\{W_j^J\}_{j=0,\ldots,J} = \left\{\mathrm{span}\{\psi_J(j,k)\}_{k=1,\ldots,2^j-1}\right\}_{j=0,\ldots,J}$ を張る各基底ベクトルの組に関する直交性と、それらベクトル空間の直交性 $W_j^J \perp W_{j'}^J$

$$\langle \psi_J(j,k) \,|\, \psi_J(j',k') \rangle = 2^{J+1-j}\delta_{jj'}\delta_{kk'}, \quad (0 \leqq j,\, j' < J,\, 0 \leqq k < 2^j-1,\, 0 \leqq k' < 2^{j'}-1).$$

(3) $\{\phi_J(j,k)\}_{k=1,\ldots,2^j-1}, \psi_J(j',k')\}_{0\leq j\leqq j'<J,\, k=0,\ldots,2^j-1,\, k'=0,\ldots,2^{j'}-1}$ の直交性 $V_j^J \perp W_{j'}^J (j \leqq j')$.

$$\langle \phi_J(j,k) \,|\, \psi_J(j',k') \rangle = 0, \quad (j \leqq j',\, 0 \leqq k < 2^j-1,\, 0 \leqq k' < 2^{j'}-1).$$

証明　離散 Haar ベクトルの定義からわかる。 ■

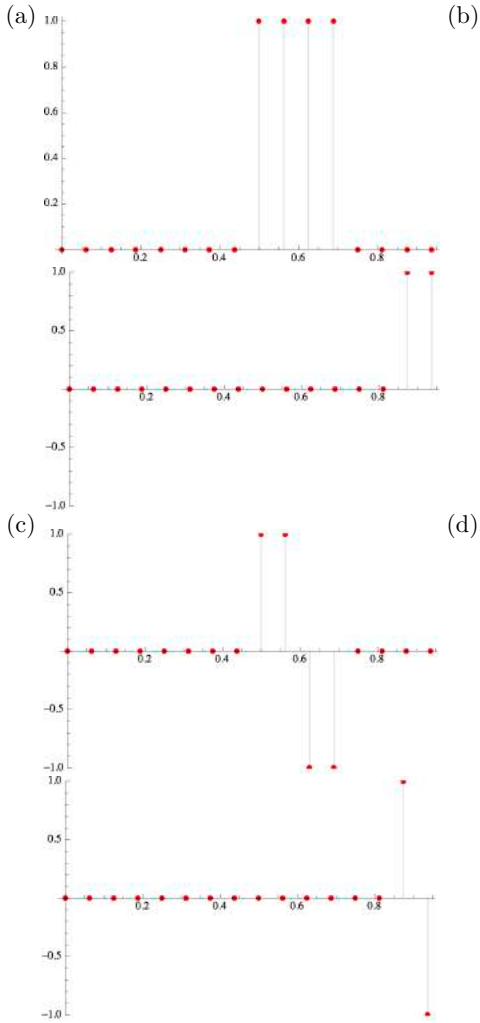


図 7.1　(a) スケール $J = 3$ での離散 Harr スケーリング関数 $\phi_3(2,2)$, (b) $\phi_3(3,7)$. (c) 離散 Harr wavelet 関数 $\psi_3(2,2)$, (d) $\psi_3(7,3)$.　スケール $J = 3$ では $2^{J+1} = 16$ 点がプロットされている。サポートは点 $k2^{J+1-j} + 1$ 番目から $(k+1)2^{J+1-j}$ 番目までである（$k = 0, \ldots, 2^j - 1$）。最大解像度 2^{-J} に相当する離散スケーリング関数は $\phi_J(J,k)$、また離散 wavelet 関数は $\psi_J(J,k)$ で、これより‘細かい’$\phi_J(j,k)$ や $\psi_J(j,k)$ はない。図では、位置 $x = \frac{k}{2^{J+1}}, k = 0, \ldots, 2^{J+1} - 1$ にプロットしている。

注意 7.4 注意 7.2 でも指摘したように、離散 Haar ベクトル系を導入しても、Haar 関数系について成立する直交性や Haar 分解などの性質はそのまま引き継がれる。2^J 個の標本化した関数値の組 $\{c_k^J\}_{k=0,\ldots,2^J-1}$ を与えたときにウェーブレット変換によって得られた係数の組 $\left\{\{d_{k_{J-1}}^{J-1}\},\ldots,\{d_{k_j}^j\},\{c_{k_j}^j\}\right\}, (0 \leqq j \leqq J-1)$ から得られる $[0,1)$ 上の関数

$$\sum_{j'=j}^{J-1}\sum_{k_{j'}=0}^{2^{j'}-1} d_{k_{j'}}^{j'}\psi(2^{j'}x-k_{j'}) + \sum_{k=0}^{2^j-1} c_k^j\phi(2^jx-k)$$

は、2^{J+1} 個の要素を持つベクトル和

$$\sum_{j'=j}^{J-1}\sum_{k_{j'}=0}^{2^{j'}-1} d_{k_{j'}}^{j'}\psi_J(j',k_{j'}) + \sum_{k=0}^{2^j-1} c_k^j\phi_J(j,k)$$

というように、Haar 関数系を使う $[0,1)$ 上の関係式は、$\phi(2^jx-k)$ を $\phi_J(j,k)$ に、$\psi(2^jx-k)$ を $\psi_J(j,k)$ にと離散化関数（ベクトル）置き換えてもそのまま成立する。

注意 7.5 したがって、2^J 個の標本化して得られた係数の組 $\{c_k^J\}_{k=0,\ldots,2^J-1}$ に関するウェーブレット変換（あるいは逆変換）係数の組 $\left\{\{d_{k_{J-1}}^{J-1}\},\ldots,\{d_{k_j}^j\},\{c_{k_j}^j\}\right\}, (0 \leqq j \leqq J-1)$ の計算は Haar 関数系の場合と何ら変わらることはない。

Mathematica プログラムを考えよう。最大スケール $J =$ `scale` における離散 Haar 関数 $\phi_{\texttt{scale}}(j,k) =$ `dHaarScale[j, k, scale]` および $\psi_{\texttt{scale}}(j,k) =$ `dHaarWavelet[j, k, scale]` はたとえば次のように定義できる。

```
dHaarScale[j_Integer, k_Integer, scale_Integer] := Module[{},
  hs[j] := Module[{bhalf, ehalf, i},
    bhalf = Table[1, {i, 1, 2^(scale + 1 - j)}];
    ehalf = Table[0, {i, 2^(scale + 1 - j) + 1, 2^(scale + 1)}];
    Flatten[Append[bhalf, ehalf]]
  ];
  Nest[RotateRight, hs[j], 2^(scale + 1 - j)*k]
]

dHaarWavelet[j_Integer, k_Integer, scale_Integer] := Module[{},
  hw[j] := Module[{bquater, equater, remain, i},
    bquater = Table[1, {i, 1, 2^(scale - j)}];
    equater = Table[-1, {i, 2^(scale - j) + 1, 2^(scale + 1 - j)}];
    remain = Table[0, {i, 2^(scale + 1 - j) + 1, 2^(scale + 1)}];
```

```
      Flatten[{bquater, equater, remain}]
    ];
    Nest[RotateRight, hw[j], 2^(scale + 1 - j)*k]
  ]
```

このとき、$\phi_3(2,2)$ および $\psi_3(2,2)$ は次のよう得られる。

```
dHaarScale[2, 2, 3]
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0}

dHaarWavelet[2, 2, 3]
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, -1, -1, 0, 0, 0, 0}
```

これを

```
ListPlot[dHaarScale[2, 2, 3], Filling -> Axis]
```

と単にプロットすると、リスト `dHaarWavelet[2, 2, 3]` は位置 $x = 1, 2, \ldots, 16$ にプロットされる。Mathmatica のリスト描画がリストの先頭が $x = 1$ から描かれるためである。スケール J の 2^{J+1} 個の点を図 7.1 のように位置 $x = \frac{k}{2^{J+1}}, k = 0, \ldots, 2^{J+1} - 1$ にプロットするには、つぎのように `ListPlot` 内でプロット位置を調節する関数 `plotRightPosition[lst]` を使えばよい。

```
plotRightPosition[lst_List] :=
                Table[{(i - 1)/Length[lst], lst[[i]]}, {i, 1, Length[lst]}]

ListPlot[plotRightPosition[dHaarScale[2, 2, 3]], Filling -> Axis]
```

プロット位置が $2^{-(J+1)}$ だけずれることは見かけ上のことであって本質的ではない。事実、最大スケール J が大きくなるとこのずれは視覚的にも問題がなくなるので、描画においてこうしたズレ修正は行なう必要性がなくなってしまう。

演習 7.6 図 7.1 のように、$\phi_3(2,2)$ および $\psi_3(2,2)$ などをプロットしなさい。

7.2　2 次元 Haar ウェーブレット基底

ここではいささか天下り的ではあるが、2 つのベクトル空間 V と W に対して**テンソル積**（tensor product）

$$V \times W \to V \otimes W \tag{7.3}$$

を具体的な場合について書き下しておこう。$V \otimes W$ は $^\forall v \in V$ および $^\forall w \in W$ から得られる $v \otimes w$ が $v \in V$ に関しても $w \in W$ に関しても線形であるようなベクトル空間である。すなわち

$$(av_1 + bv_2) \otimes w = a(v_1 \otimes w) + b(v_1 \otimes w),$$
$$v \otimes (cw_1 + dw_2) = c(v \otimes w_1) + d(v \otimes w_2)$$

であるような双線形則を満たす。

定義 7.7 (関数のテンソル積) 1 変数関数からなる 2 つのベクトル空間 V および W において、関数 $f \in V$ と $g \in W$ のテンソル積を

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y) \tag{7.4}$$

で定義する。

注意 7.8 関数のテンソル積の持つ双線形性は $\big((af_1 + bf_2) \otimes g\big)(x, y) = a(f_1 \otimes g)(x, y) + b(f_2 \otimes g)(x, y)$ であって、もちろん引数 (x, y) に関するものではない：$(f \otimes g)(ax_1 + bx_2, y) \neq af(x_1)g(y) + bf(x_2)g(y)$.

定義 7.9 (ベクトルの Kronecker 積) m 次元ベクトルベクトル空間 V および n 次元ベクトル空間 W において、$\boldsymbol{u} = [u_0, \ldots, u_{m-1}] \in V$, $\boldsymbol{v} = [v_0, \ldots, v_{n-1}] \in W$ のテンソル積を次の Kronecker 積 $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$ で定義する（この場合、行列要素の添字を 0 から始めることにすると都合がよい）。

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} u_0 v_0 & \ldots & u_1 v_k & \ldots & u_0 v_{n-1} \\ u_j v_0 & \ldots & u_j v_k & \ldots & u_j v_{n-1} \\ u_{m-1} v_0 & \ldots & u_{m-1} v_k & \ldots & u_{m-1} v_{n-1}. \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

注意 7.10 式 (7.5) から明らかなように、このとき $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$ は $m \times n$ 行列全体からなるベクトル空間の要素である。

定義 7.11 m 行 n 列の行列全体をベクトル空間 M とするとき、その要素 $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in M$ の内積を次で定義する（ここでは、行列要素の添字は 0 から始まることにする）。

$$\langle A \mid B \rangle_{\text{行列}} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} a^*_{i,j} b_{i,j} \tag{7.6}$$

つまり、行列の内積 $\langle A \,|\, B \rangle$ は対応する行列要素を掛けた総和である。

命題 7.12 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ について、行列 $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d}$ の内積は

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d}\rangle_{\text{行列}} &= \sum_i\sum_j (\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})_{ij}(\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d})_{ij} = \sum_i\sum_j (a_ib_j)(c_id_j)\\ &= \left(\sum_i a_ic_i\right)\left(\sum_j b_jd_j\right) = \langle \boldsymbol{a}\,|\,\boldsymbol{c}\rangle\,\langle \boldsymbol{b}\,|\,\boldsymbol{d}\rangle\end{aligned}$$

証明　行列内積の定義から明らか。 ■

例 7.13 式 (7.1) で定義したスケール J の離散 Haar ベクトル系 $\phi_J(J,k)$ および $\psi_J(J,k)$ の Kronecker 積を計算してみよう（$0 \leqq k \leqq 2^J-1$）。$\phi_J(J,k)$, $\psi_J(J,k)$ はスケール J のもとで最大解像度 2^{-J} を持つ最も ‘細かい’Haar ベクトルであることに注意する（図 7.1 参照）。

$J=0$ のとき

$$\phi_0(0,0)\otimes\phi_0(0,0) = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad \phi_0(0,0)\otimes\psi_0(0,0) = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix},$$
$$\psi_0(0,0)\otimes\phi_0(0,0) = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix},\quad \psi_0(0,0)\otimes\psi_0(0,0) = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

こうして得られた 2×2 行列 `mat` を Mathematica において

```
ListPlot3D[mat, Mesh -> None, InterpolationOrder -> 1,
    ColorFunction -> "SouthwestColors"]
```

として表示した結果が図 7.2 の右側（(a’), (b’), (c’), (d’)）である。区分的に連続な Haar 関数系のテンソル積の結果と離散 Haar ベクトルのテンソル積（Kronecker 積）は本質的に同等であることが確認できる（この事実は既に注意 7.2 で指摘している）。

演習 7.14 Haar スケーリング関数系 $\phi(x), \psi(x)$ および $J=0$ のときの離散 Haar ベクトル $\phi_0(0,0), \psi_0(0,0)$ のテンソル積のグラフが図 7.2 のようになることを確かめなさい。

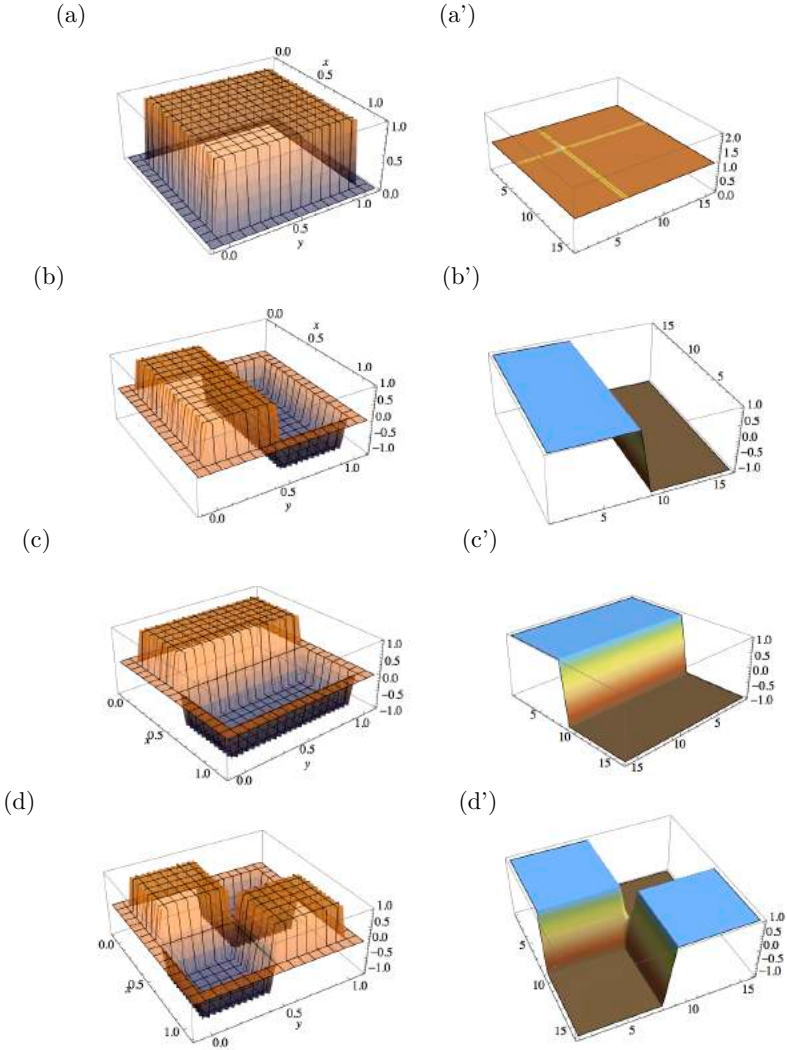


図 7.2　2 次元 Haar 関数系と 2 次元 Haar 離散系 (a) $\phi \otimes \phi(x,y)$ (a') $\phi_0(0,0) \otimes \phi_)(0,0)$, (b) $\phi \otimes \psi(x,y)$ (b') $\phi_0(0,0) \otimes \psi_)(0,0)$, (c) $\phi \otimes \psi(x,y)$ (c') $\psi_0(0,0) \otimes \phi_)(0,0)$, (d) $\psi \otimes \psi(x,y)$ (d') $\psi_0(0,0) \otimes \psi_)(0,0)$. 注意 7.2 で指摘しように、区分的連続な Haar 系と離散 Haar 系とは本質的に同等であることがわかる。

$J=1$ のとき（$k,\ell=0,1$）には、$\phi_1(1,k)\otimes\phi_1(1,\ell)$ は次のようになる：

$$\phi_1(1,0)\otimes\phi_1(1,0)=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \phi_1(1,0)\otimes\phi_1(1,1)=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\phi_1(1,1)\otimes\phi_1(1,0)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix},\quad \phi_1(1,1)\otimes\phi_1(1,1)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

$\phi_1(1,k)\otimes\psi_1(1,\ell)$ は次のようになる：

$$\phi_1(1,0)\otimes\psi_1(1,0)=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \phi_1(1,0)\otimes\psi_1(1,1)=\begin{bmatrix}0&0&1&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\phi_1(1,1)\otimes\psi_1(1,0)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&-1&0&0\\1&-&0&0\end{bmatrix},\quad \phi_1(1,1)\otimes\psi_1(1,1)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}.$$

$\psi_1(1,k)\otimes\phi_1(1,\ell)$ は次のようになる：

$$\psi_1(1,0)\otimes\phi_1(1,0)=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \psi_1(1,0)\otimes\phi_1(1,1)=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\psi_1(1,1)\otimes\phi_1(1,0)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\-1&-1&0&0\end{bmatrix},\quad \psi_1(1,1)\otimes\phi_1(1,1)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-1&-1\end{bmatrix}.$$

$\psi_1(1,k)\otimes\psi_1(1,\ell)$ は次のようになる：

$$\psi_1(1,0)\otimes\psi_1(1,0)=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \psi_1(1,0)\otimes\psi_1(1,1)=\begin{bmatrix}0&0&1&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\psi_1(1,1)\otimes\psi_1(1,0)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&-1&0&0\\-1&1&0&0\end{bmatrix},\quad \psi_1(1,1)\otimes\psi_1(1,1)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}.$$

さて、一般のスケール J の長さ 2^{J+1} の離散 Haar ベクトル $\phi_J(J,k)$ と $\psi_J(J,\ell)$ とのテンソル積を考えてみよう。たとえば

$$\begin{aligned}\Phi^J_{k,\ell} &\equiv \phi_J(J,k)\otimes\phi_J(J,\ell)\\ &= (\underbrace{0\ldots0}_{2k}\,1\,1\,\underbrace{0\ldots\ldots0}_{2^{J+1}-2(k+1)})\otimes(\underbrace{0\ldots0}_{2\ell}\,1\,1\,\underbrace{0\ldots\ldots0}_{2^{J+1}-2(\ell+1)})\end{aligned} \tag{7.7}$$

は $2^{J+1}\times 2^{J+1}$ 正方行列で（$0\leqq k,\ell\leqq 2^J-1$）で、ベクトルのテンソル積の定義 7.1 から、この $2^{2(J+1)}$ 個の行列要素は次のようになっている（行列要素の添字を 0 から始める）。

$$\left(\Phi^J_{k,\ell}\right)_{m,n}=\begin{cases}1, & 2k\leqq m\leqq 2k+1,\ 2\ell\leqq n\leqq 2\ell+1,\\ 0, & \text{それ以外.}\end{cases} \tag{7.8}$$

つまり、行列 $\phi_J(J,k)\otimes\phi_J(J,\ell)$ の非零部分は 2×2 の正方行列ブロックである。同様にして

$$\Psi^{J,d}_{k,\ell}\equiv\phi_J(J,k)\otimes\psi_J(J,\ell), \tag{7.9}$$

$$\Psi^{J,v}_{k,\ell}\equiv\psi_J(J,k)\otimes\phi_J(J,\ell), \tag{7.10}$$

$$\Psi^{J,d}_{k,\ell}\equiv\psi_J(J,k)\otimes\psi_J(J,\ell) \tag{7.11}$$

においても非零成分の様子はどれも同じ添字領域（$2k\leqq m\leqq 2k+1,\ 2\ell\leqq n\leqq 2\ell+1,\ 0\leqq k,\ell\leqq 2^J-1$）で唯一つの 2×2 正方行列ブロックをなし、それ以外の要素は全て 0 であることがわかる。すなわち、$(2k,2\ell)$-行列要素を左端上とする非零正方行列ブロックは次のようである。

$$\left(\Phi^J_{k,\ell}\right)_{\text{非零ブロック}}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \tag{7.12}$$

$$\left(\Psi^{J,h}_{k,\ell}\right)_{\text{非零ブロック}}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \tag{7.13}$$

$$\left(\Psi^{J,v}_{k,\ell}\right)_{\text{非零ブロック}}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix} \tag{7.14}$$

$$\left(\Psi^{J,d}_{k,\ell}\right)_{\text{非零ブロック}}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{7.15}$$

演習 7.15

$$\begin{aligned}\left\langle\Phi^J_{k,\ell}\,\middle|\,\Phi^J_{k,\ell}\right\rangle_{\text{行列}} &\equiv \|\Phi^J_{k,\ell}\|=\|\Psi^{J,h}_{k,\ell}\|=\|\Psi^{J,v}_{k,\ell}\|=\|\Psi^{J,d}_{k,\ell}\|\\ &= 2^2=4\end{aligned} \tag{7.16}$$

であることを示しなさい。
（ヒント）離散 Haar ベクトルの定義式 (7.1) より、

$$\|\phi_J(j,k)\| = \|\psi_J(j,\ell)\| = 2^{J+1-j}$$

に注意する。

7.3　2 次元 Haar ウェーブレット変換

大きさ 2^{J+2} の正方行列 $M = (m_{i,j})$ を $2^{J+2} \times 2^{J+2} = 2^{2(J+2)}$ 次元ベクトル空間とみなしたとき、正規直交する自然な基底行列を $\big(E(i,j)\big)_{k,\ell} = \begin{cases} 1, & k = i, \ell = j \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$ としたとき、

$$M = \sum_{i,j=1}^{2^{2(J+2)}} m_{i,j} E(i,j)$$

と展開できる。以下で、自然基底以外の直交基底を離散 Haar ベクトル系から構成し、その基底行列で正方行列を展開することを考えてみよう。

定理 7.16 離散 Haar ベクトル系のテンソル積から得られる大きさ $2^{J+1}(J \geqq 0)$ の正方行列系の組

$$\Big\{\Phi^J_{k,\ell} = \phi_J(J,k) \otimes \phi_J(J,\ell), \Psi^{J,h}_{k,\ell} = \phi_J(J,k) \otimes \psi_J(J,\ell),$$
$$\Psi^{J,v}_{k,\ell} = \psi_J(J,k) \otimes \phi_J(J,\ell), \Psi^{J,d}_{k,\ell} = \psi_J(J,k) \otimes \psi_J(J,\ell)\Big\}_{0 \leqq k,\ell \leqq 2^J-1}$$

は大きさ 2^{J+1} の正方行列からなる $2^{2(J+1)}$ 次元ベクトル空間の直交基底をなす。

証明　大きさ 2^{J+1} の正方行列は $2^{2(J+1)}$ 個の要素を持ち、$2^{2(J+1)}$ 次元ベクトル空間の要素と見なすことができる。各行列系は 2^{2J} 個の行列からなり、これが 4 組あることからベクトル空間の次元数だけある。命題 7.12 および定理 7.3 から、$\{\phi_J(j,k)\}$ および $\{\psi_J(j,k)\}$ の直交性から

$$\begin{aligned}\Big\langle \Phi^J_{k,\ell} \,\Big|\, \Psi^{J,h}_{k',\ell'} \Big\rangle_{\text{行列}} &= \langle \phi_J(J,k) \otimes \phi_J(J,\ell) \mid \phi_J(J,k') \otimes \psi_J(J,\ell') \rangle \\ &= \langle \phi_J(J,k) \mid \phi_J(J,k') \rangle \cdot \langle \phi_J(J,\ell) \mid \psi_J(J,\ell') \rangle \\ &= 2^2 \delta_{kk'} \delta_{\ell\ell'}.\end{aligned}$$

他の組み合わせについても同様であり、これらの行列系は互いに直交して線形独立である。正規直交基底行列は、自身との内積が 4 である（演習 7.16）ことから、各行列系で $\frac{1}{2}$ 倍したものである。 ■

系 7.17 大きさ $2^{J+1}(J \geqq 0)$ の任意の正方行列 A は次のように展開される。

$$A = \sum_{k,\ell=0}^{2^J-1} \frac{1}{4}\Big(\left\langle \Phi_{k,\ell}^{J} \mid A \right\rangle_{\text{行列}} \Phi_{k,\ell}^{J} + \left\langle \Psi_{k,\ell}^{J,h} \,\middle|\, A \right\rangle_{\text{行列}} \Phi_{k,\ell}^{J,h} + \left\langle \Psi_{k,\ell}^{J,v} \,\middle|\, A \right\rangle_{\text{行列}} \Phi_{k,\ell}^{J,v} + \left\langle \Psi_{k,\ell}^{J,d} \,\middle|\, A \right\rangle_{\text{行列}} \Phi_{k,\ell}^{J,d} \Big) \tag{7.17}$$

証明　直交基底についての一般論より、正規直交行列系 $\frac{1}{2}\Phi_{k,\ell}^{J}$, $\frac{1}{2}\Psi_{k,\ell}^{J,h}$, $\frac{1}{2}\Psi_{k,\ell}^{J,v}$ および $\frac{1}{2}\Psi_{k,\ell}^{J,d}$ との内積を使って展開できる。 ■

系 7.17 のようにして大きさ 2^{J+1} の任意の正方行列 $A = (a_{i,j})$ を展開したとき、行列 $\Phi_{k,\ell}^{J}$, $\Psi_{k,\ell}^{J,h}$, $\Psi_{k,\ell}^{J,v}$ および $\Psi_{k,\ell}^{J,d}$（$0 \leqq k, \ell \leqq 2^J - 1$）の係数は次のようである。

$$\left.\begin{aligned}
\tfrac{1}{4}\left\langle \Phi_{k,\ell}^{J} \,\middle|\, A \right\rangle_{\text{行列}} &= \tfrac{1}{4}\big(a_{2k,2\ell} + a_{2k,2\ell+1} + a_{2k+1,2\ell} + a_{2k+1,2\ell+1}\big) \\
\tfrac{1}{4}\left\langle \Psi_{k,\ell}^{J,h} \,\middle|\, A \right\rangle_{\text{行列}} &= \tfrac{1}{4}\big(a_{2k,2\ell} - a_{2k,2\ell+1} + a_{2k+1,2\ell} - a_{2k+1,2\ell+1}\big) \\
\tfrac{1}{4}\left\langle \Psi_{k,\ell}^{J,v} \,\middle|\, A \right\rangle_{\text{行列}} &= \tfrac{1}{4}\big(a_{2k,2\ell} + a_{2k,2\ell+1} - a_{2k+1,2\ell} - a_{2k+1,2\ell+1}\big) \\
\tfrac{1}{4}\left\langle \Psi_{k,\ell}^{J,d} \,\middle|\, A \right\rangle_{\text{行列}} &= \tfrac{1}{4}\big(a_{2k,2\ell} - a_{2k,2\ell+1} - a_{2k+1,2\ell} + a_{2k+1,2\ell+1}\big)
\end{aligned}\right\} \tag{7.18}$$

これら総計 $4 \times 2^{2J} = 2^{2(J+1)}$ 個の係数から定まる大きさ 2^{J+1} の正方行列を Haar wavelet 変換行列として次のように定める。

定義 7.18 (1 段階 Haar wavelet 変換) 大きさ 2^{J+1} の任意の正方行列 A に対して、行列 A_{Haar} を次で定義する。

$$\left(A_{Haar}\right)_{k,\ell} = \frac{1}{4}\left\langle \Phi_{k,\ell}^{J} \mid A \right\rangle_{\text{行列}}, \qquad \left(A_{Haar}\right)_{k,2^J+\ell} = \frac{1}{4}\left\langle \Psi_{k,\ell}^{J,h} \,\middle|\, A \right\rangle_{\text{行列}}$$

$$\left(A_{Haar}\right)_{2^J+k,\ell} = \frac{1}{4}\left\langle \Psi_{k,\ell}^{J,v} \,\middle|\, A \right\rangle_{\text{行列}}, \qquad \left(A_{Haar}\right)_{2^J+k,2^J+\ell} = \frac{1}{4}\left\langle \Psi_{k,\ell}^{J,d} \,\middle|\, A \right\rangle_{\text{行列}}.$$

ここで、$0 \leqq k, \ell \leqq 2^J - 1$ である。A_{Haar} を A の 1 段階 Haar wavelet 変換行列または単に 1 段階 Haar wavelet 変換といい

$$\mathcal{H} : A \mapsto A_{Haar} \tag{7.19}$$

と記す。

例 7.19 $J=0$ として $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき、式 (7.18) から

$$A_{Haar}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(a+b+c+d) & \frac{1}{4}(a-b+c-d) \\ \frac{1}{4}(a+b-c-d) & \frac{1}{4}(a-b-c+d) \end{bmatrix}_{\text{Haar}}.$$

この結果は次のように、行列 A の各行について 1 段階 wavlelet 変換した結果を平均化係数を右詰め（202 ページ）して、さらに続けて列についても 1 段階 wavlelet 変換した結果を平均化係数を右詰めした結果得られる 2×2 行列になっていることに注意する。

$$\overset{\substack{\text{行の 1 段階 } wavelet \text{ 変換} \\ \text{右詰め}}}{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(a+b) & \frac{1}{2}(a-b) \\ \frac{1}{2}(c+d) & \frac{1}{4}(c-d) \end{bmatrix}}$$

$$\overset{\substack{\text{列の 1 段階 } wavelet \text{ 変換} \\ \text{右詰め}}}{\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(c+d)\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a-b)+\frac{1}{2}(c-d)\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(c+d)\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a-b)-\frac{1}{2}(c-d)\right) \end{bmatrix}}$$

例 7.20 $J=1$ のときを考えてみよう。

$$A=\begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 8 & 2 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{のとき} \quad A_{Haar}=\begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\text{Haar}}.$$

この結果も、行列 A の各行について 1 段階 wavlelet 変換した結果を平均化係数を右詰めし、さらに続けて列についても 1 段階 wavlelet 変換した結果を平均化係数を右詰めした結果得られる 4×4 行列になっている。

$$\begin{array}{c}\text{行の 1 段階 } wavelet \text{ 変換}\\ \text{右詰め}\end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(9+7) & \frac{1}{2}(6+2) & \frac{1}{2}(9-7) & \frac{1}{2}(6-2) \\ \frac{1}{2}(5+3) & \frac{1}{2}(4+4) & \frac{1}{2}(5-3) & \frac{1}{2}(4-4) \\ \frac{1}{2}(8+2) & \frac{1}{2}(4+0) & \frac{1}{2}(8-2) & \frac{1}{2}(4-0) \\ \frac{1}{2}(6+0) & \frac{1}{2}(2+2) & \frac{1}{2}(6-0) & \frac{1}{2}(2-2) \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow$$

$$\begin{array}{c}\text{行の 1 段階 } wavelet \text{ 変換}\\ \text{右詰め}\end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}\big((9+7)+(5+3)\big) & \frac{1}{4}\big((6+2)+(4+4)\big) & \frac{1}{4}\big((9-7)+(5-3)\big) & \frac{1}{4}\big((6-2)+(4-4)\big) \\ \frac{1}{4}\big((8+2)+(6+0)\big) & \frac{1}{4}\big((4+0)+(2+2)\big) & \frac{1}{4}\big((8-2)+(6-0)\big) & \frac{1}{4}\big((4-0)+(2-2)\big) \\ \frac{1}{4}\big((9+7)-(5+3)\big) & \frac{1}{4}\big((6+2)-(4+4)\big) & \frac{1}{4}\big((9-7)-(5-3)\big) & \frac{1}{4}\big((6-2)-(4-4)\big) \\ \frac{1}{4}\big((8+2)-(6+0)\big) & \frac{1}{4}\big((4+0)-(2+2)\big) & \frac{1}{4}\big((8-2)-(6-0)\big) & \frac{1}{4}\big((4-0)-(2-2)\big) \end{bmatrix}$$

さらに、A_{Haar} の左上隅の 2×2 行列 $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ についても Haar wavelet 変換を施して $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ を得る。左上隅 2×2 ブロックをこの結果で置き換えて得られる行列は、平均化係数を右詰めして 1 段階 wavelet 変換を 2 回繰り返して得られたもので、次のようになる。

$$A \underset{\mathcal{H}}{\rightarrow} \mathcal{H}A = A_{Haar} \underset{\mathcal{H}}{\rightarrow} \mathcal{H}^2 A = A_{\mathrm{Haar}^2} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathrm{Haar}^2}$$

最左隅上の要素 4 は、4×4 行列の 16 個全要素の平均値であることに注意する。

定理 7.21 大きさ 2^{j+1} の正方行列 $\mathbf{P}^j$ の 1 段階 Haar wavelet 変換 $\mathcal{H}\mathbf{P}^j$ は、次で定

まる大きさ 2^j の 4 つの正方行列（$0 \leqq k, \ell \leqq 2^j - 1$）

$$\left(\mathbf{P}^{j-1}\right)_{k,\ell} = \frac{1}{4}\left\langle \Phi^J_{k,\ell} \,\middle|\, \mathbf{P}^j \right\rangle_{\text{行列}}, \quad \left(\mathbf{Q}^{j-1,h}\right)_{k,\ell} = \frac{1}{4}\left\langle \Psi^{J,h}_{k,\ell} \,\middle|\, \mathbf{P}^j \right\rangle_{\text{行列}},$$
$$\left(\mathbf{Q}^{j-1,v}\right)_{k,\ell} = \frac{1}{4}\left\langle \Psi^{J,v}_{k,\ell} \,\middle|\, \mathbf{P}^j \right\rangle_{\text{行列}}, \quad \left(\mathbf{Q}^{j-1,d}\right)_{k,\ell} = \frac{1}{4}\left\langle \Psi^{J,d}_{k,\ell} \,\middle|\, \mathbf{P}^j \right\rangle_{\text{行列}}$$

を使って、次のように表される。

$$\mathbf{P}^j \underset{\mathcal{H}}{\to} \mathcal{H}\mathbf{P}^j = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{P}^{j-1} & \mathbf{Q}^{j-1,h} \\ \hline \mathbf{Q}^{j-1,v} & \mathbf{Q}^{j-1,d} \end{array}\right]_{\text{Haar}}.$$

したがって、大きさ 2^{J+1} の正方行列 $\mathbf{P}^J$ の Haar wavelet 変換は、合計 $J+1$ 回の 1 段階 Haar wavelet 変換 $\mathcal{H}\mathbf{P}^j = \mathbf{P}^{j-1}$ が逐次的に定める系列 $\{\mathbf{P}^J, \ldots, \mathbf{P}^1\}$ によって与えられる。

7.4　2 次元 Haar ウェーブレット変換の応用

第 7.2 節の 2 次元 Haar ウェーブレット変換を使って画像処理を行ってみよう。ここでも第 5.4 節と同じように、無視し得る微小データをゼロにしてデータを簡約するとことでグレイスケール画像の「圧縮」を試みる。

第 7.18 節の 1 段階 Haar ウェーブレット変換は次のように書ける。2 のベキ乗 N の正方行列データの 1 段階の Wavelet 変換（和平均と平均からのズレ）を大きさ行列 $N/2$ を持つ 4 ブロックの係数行列 LL_1, LH_1,HL_1 および HH_1 として求める。左上の配列ブロック LL_1 はレベル 1 の Haar 平均行列である。

```
Haar2DWaveletTransform[signal_List] :=
  Module[{datasize, scale, hdata, vdata, m, n},
    datasize = Length[signal];
      (*scale=Log[2,datasize];*)
    hdata = ConstantArray[0, {datasize, datasize}];
    For[m = 0, m <= datasize - 1, m++,(*各行で Wavelet 変換*)
        For[n = 0, n <= datasize/2 - 1, n++,
          hdata[[m + 1, n + 1]] =
            (signal[[m + 1, 2 n + 1]] + signal[[m + 1, 2 n + 2]]) / 2;
          hdata[[m + 1,datasize/2 + n + 1]] =
```

```
            (signal[[m + 1, 2 n + 1]] - signal[[m + 1, 2 n + 2]]) / 2;
        ]
      ];
      vdata = hdata;
      For[n = 0, n <= datasize/2 - 1, n++,(*各列で Wavelet 変換*)
          For[m = 0, m <= datasize/2 - 1, m++,
            vdata[[m + 1, n + 1]] =
              (hdata[[2 m + 1, n + 1]] + hdata[[2 m + 2, n + 1]]) / 2;
            vdata[[datasize/2 + m + 1,n + 1]] =
              (hdata[[2 m + 1, n + 1]] - hdata[[2 m + 2, n + 1]]) / 2;
            vdata[[m + 1,datasize/2 + n + 1]] =
              (hdata[[2 m + 1, datasize/2 + n + 1]] +
                 hdata[[2 m + 2, datasize/2 + n + 1]]) / 2;
            vdata[[datasize/2 + m + 1, datasize/2 + n + 1]] =
              (hdata[[2 m + 1, datasize/2 + n + 1]] -
                 [[2 m + 2, datasize/2 + n + 1]]) / 2;
          ;
      ];
      vdata
    ]
```

第 5.4 節と同様に、Mathematica ノートブックファイルの場所を以下で確認しておく。そこから data フォルダ内にカラー写真 data/construction.jpg を読み込んで、グレースケール画像のデータを縦横ピクセルが $2^9 = 512$ となるように次のようにして 2 次元データ graydata を切り出して Image[graydata] で表示する。さらに、graydata に 1 段階 Haar ウェーブレット変換を施して配列プロットしてみる。

```
SetDirectory[NotebookDirectory[]]
const = Import["data/construction.jpg"]
grayconstruction = ColorConvert[const, "Grayscale"]
graydata = Take[ImageData[grayconstruction], {1, 512}, {1, 512}]
Image[graydata]
tgray = Haar2DWaveletTransform[graydata];
ArrayPlot[tgray]
```

図 7.3 からわかるように、元の画像 (1) は 1 段階 Haar ウェーブレット変換したとき、半分の大きさの平均化画像データ (2) が左隅上のブロック LL_1 に位置することがわかる。

(a)

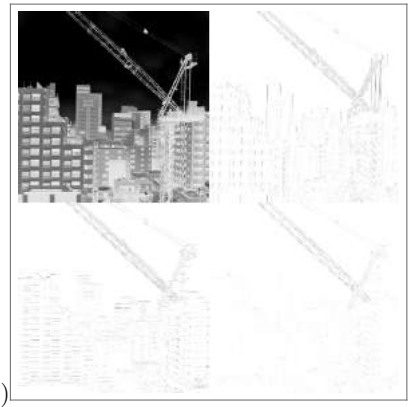
(b) 

図 7.3　(1) 大きさ $2^9 = 512$ のグレースケール画像と (2) その 1 段階 Haar ウェーブレット変換した結果の配列プロット。左隅上のブロック LL_1 に大きさが半分になった（反転した）平均化画像がみえる。

ブロック LL_1 に 1 段階 Haar ウェーブレット変換を施し、さらのその左隅上のブロック LL_2 に 1 段階 Haar ウェーブレット変換を施すというようにして大きさ 1 ピクセルに達するまで 1 段階 Haar ウェーブレット変換を繰り返して、2 ベキの大きさ N の全てのウェーブレット係数は次のように 2 次元 Haar ウェーブレット変換 `HaarWavelet2DTransform[signal]` として計算できる。引数 `signal` として大きさ 2 ベキ N のグレースケール 2 次元リストを渡す。

```
HaarWavelet2DTransform[signal_List] :=
    Module[{datasize, maxlevel, data, tdata, j},
        datasize = Length[signal];
        maxlevel = Log[2, datasize];
        data = signal;
        data = Haar2DWaveletTransform[data];
        For[j = 1, j < maxlevel, j++,
```

```
                tdata = Take[data, {1, datasize/2^j}, {1, datasize/2^j}];
                data[[1 ;; datasize/2^j, 1 ;; datasize/2^j]] =
                Haar2DWaveletTransform[tdata];
            ];
        data
        ]
```

2 次元 Haar ウェーブレット変換の逆変換を考えよう。1 段階 Haar ウェーブレット変換は次の逆変換 `Haar2DInverseWaveletTransform[vdata]` を持つことに注意する。

```
Haar2DInverseWaveletTransform[vdata_List] :=
  Module[{datasize, maxlevel, signal, m, n},
    datasize = Length[vdata];
    (*maxlevel=Log[2,datasize];*)
    signal = ConstantArray[0, {datasize, datasize}];
    For[n = 0, n <= datasize/2 - 1, n++,
        For[m = 0, m <= datasize/2 - 1, m++,
          signal[[2 m + 1, 2 n + 1]] =
            vdata[[m + 1, n + 1]] + vdata[[datasize/2 + m + 1, n + 1]]
             + vdata[[m + 1, datasize/2 + n + 1]] +
             vdata[[datasize/2 + m + 1, datasize/2 + n + 1]];
           signal[[2 m + 2, 2 n + 1]] =
             vdata[[m + 1, n + 1]] - vdata[[datasize/2 + m + 1, n + 1]]
              + vdata[[m + 1, datasize/2 + n + 1]] -
             vdata[[datasize/2 + m + 1, datasize/2 + n + 1]];
           signal[[2 m + 1, 2 n + 2]] =
             vdata[[m + 1, n + 1]] + vdata[[datasize/2 + m + 1, n + 1]]
              - vdata[[m + 1, datasize/2 + n + 1]] -
             vdata[[datasize/2 + m + 1, datasize/2 + n + 1]];
           signal[[2 m + 2, 2 n + 2]] =
             vdata[[m + 1, n + 1]] - vdata[[datasize/2 + m + 1, n + 1]]
              - vdata[[m + 1, datasize/2 + n + 1]] +
             vdata[[datasize/2 + m + 1, datasize/2 + n + 1]];
        ]
```

```
        ];
        signal
      ]
```

これより、2 次元 Haar ウェーブレット変換で得たウェーブレット係数行列から、左隅上より 1 ステップ変換逆関数 Haar2DInverseWaveletTransform を繰り返して 2 次元逆 Haar ウェーブレット変換 HaarInverseWavelet2DTransform[vdata] を書くことができる。

```
HaarInverseWavelet2DTransform[vdata_List] :=
    Module[{size, scale, wdata, idata, j},
        size = Length[vdata];
        scale = Log[2, size];
        wdata = vdata;
        For[j = 1, j <= scale, j++,
            idata = Take[wdata, {1, 2^j}, {1, 2^j}];
            idata = Haar2DInverseWaveletTransform[idata];
            wdata[[1 ;; 2^j, 1 ;; 2^j]] = idata;
       ];
       wdata
    ]
```

第 5.4 節の高速 Fourier 変換とその応用で取り上げたように、次の関数 approxHaarDataByNeglectingSmallElements[graydata,thresholdRatio] は 2 次元グレイスケールデータ data と 1 以下の閾値 thresholdRatio を渡すと、2 次元 Haar ウェーブレット変換した後の絶対値がその最大絶対値 maxabs と比較して maxabs × thresholdRatio 以下の相対的に小さな要素をゼロにしてしまった結果を逆変換して返す。全データ数中、こうして置き換えられたデータの割合を棄却割合 Ignoring rate として表示する。Ignoring rate が大きいほど、ゼロに置き換えられた割合が大きくなりデータが簡約された度合い（「圧縮率」）が高いとみなそう。

```
approxHaarDataByNeglectingSmallElements[data_,thresholdRatio_]
 := Module[{tgraydata, replaced, ignorgraydata},
      ModifiedDataNeglectingRelativeSmallElement[lst_List] :=
        Module[{maxabs, approxedlist, replaceSymbol},
          maxabs = Max[Abs[lst]];
```

```
            approxedlist = lst /. x_
              /; Abs[x] < thresholdRatio*maxabs -> replaceSymbol;
            replaced = Count[Flatten[approxedlist], replaceSymbol];
            approxedlist  /. replaceSymbol -> 0
          ];
        tgraydata = HaarWavelet2DTransform[data];
        ignorgraydata =
          ModifiedDataNeglectingRelativeSmallElement[tgraydata];
        Print["Ignoring rate=",
              replaced / Length[Flatten[graydata]] // N];
        Image[HaarInverseWavelet2DTransform[ignorgraydata]]
      ]
```

2 次元グレイスケールデータ graydata に対して閾値を 5% としたときの Haar 近似画像は次のようにして得られる。この場合、棄却率は 0.885658 となり、約 8 割を越えるデータが簡約される結果となる。

```
approxHaarDataByNeglectingSmallElements[graydata, 0.05]
  Ignoring rate=0.885658
```

図 7.4(1)∼(4) は、(1) 棄却率を 0.05、(2) 棄却率を 0.10、(3) 棄却率を 0.15、(4) 棄却率を 0.20 として得られる Haar 近似画像である。

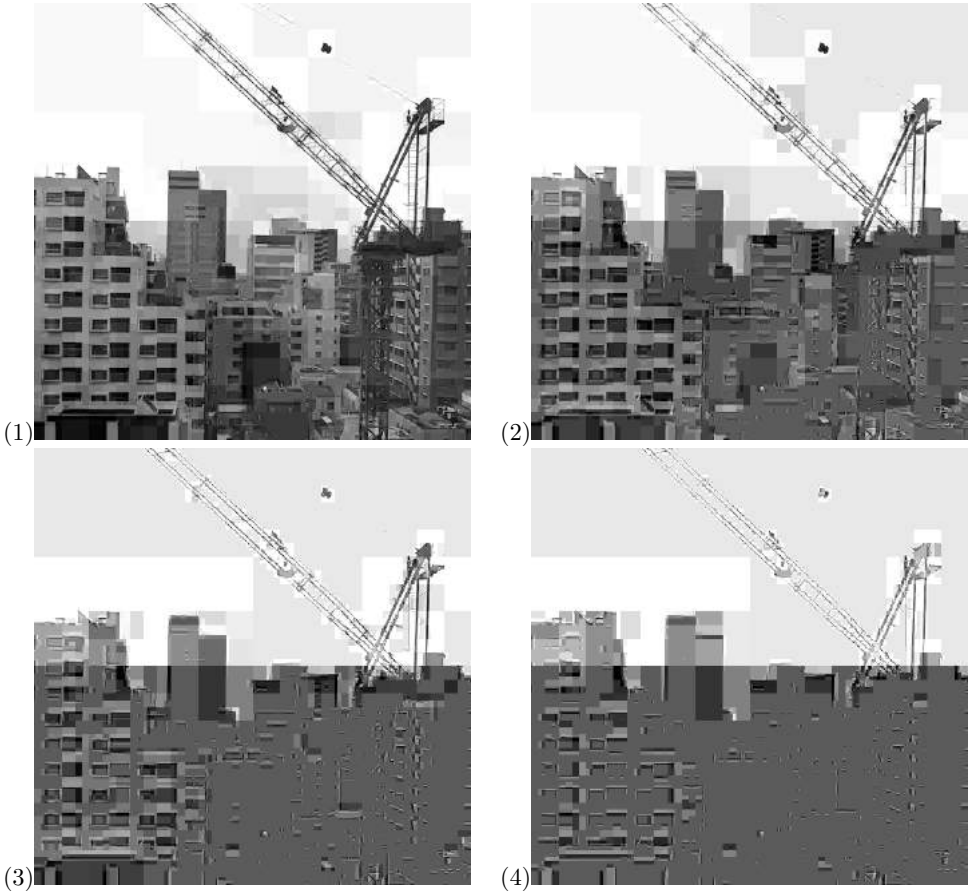


図 7.4　2 次元 Haar ウェーブレット変換した後の絶対値がその最大絶対値と比較して棄却率以下の相対的に小さな要素をゼロとしてから逆変換して「圧縮」した Haar 近似画像。(1) 棄却率 0.05 の結果（Ignoring rate=0.885658）. (2) 棄却率 0.10 の結果（Ignoring rate=0.942432）. (3) 棄却率 0.15 の結果（Ignoring rate=0.968399）. (4) 棄却率 0.20 の結果（Ignoring rate=0.982594）.

第 8 章

多重解像度解析

8.1　平行移動から構成される直交基底

第 6 章で詳しくみたように、Haar スケーリング関数（定義 6.7）から構成される Haar スケーリング（正規）直交関数系

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k) \tag{6.3'}$$

および、それから構成される Haar wavelet 関数（定義 6.18）から構成される Haar wavelet（正規）直交関数系

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k) \tag{6.5'}$$

はいずれも、$\phi(x)$ や $\psi(x)$ のようなある関数 $\gamma(x) \in L^2$ に対する平行移動 $\{T_k\gamma(x) = \gamma(x-k)\}_k$ の形で与えられていることが特徴的である。$\{T_k\gamma(x) = \gamma(x-k)\}_k$ が正規直交関数系であるとき、この正規直行系を**平行移動から構成された正規直交関数系**という。

ある関数 $\gamma(x) \in L^2$ に関して $\{T_k\gamma(x) = \gamma(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が平行移動から構成された正規直交関数系となるような関数 $\gamma(x)$ の条件を調べてみよう。そのような $\gamma(x)$ を使えば、$f(x) \in \overline{\mathrm{span}}\{T_k\gamma(x)\}$ のとき

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f \,|\, T_k\gamma \rangle \, T_k\gamma(x)$$

と関数 $f(x)$ が 1 つの関数 $\gamma(x)$ を使って展開できることに注意する。

命題 8.1 関数系 $\{T_k\gamma(x)\}$ が平行移動から構成された正規直交関数系であることは、関数 $\gamma(x) \in L^2$ が次を満たすときである。

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\gamma}(\lambda + 2\pi k)|^2 = \frac{1}{2\pi}, \qquad \text{全ての } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{8.1}$$

ここで、$\widehat{\gamma}(\lambda)$ は関数 $\gamma(x)$ の Fourier 変換である。

証明　$\{T_k\gamma(x)\}$ の正規直交性から

$$\langle T_k\gamma \,|\, T_\ell\gamma\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^*(x-k)\gamma(x-\ell)\,dx = \delta_{k\ell}.$$

一方、Plancherel の定理 3.22 より、$f(x), g(x) \in L^2$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f^*(x)g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \widehat{f}^*(\lambda)\widehat{g}(\lambda).$$

したがって、式 (3.13) の平行移動に関する Fourier 変換の性質 $\widehat{f(x-n)} = \mathrm{e}^{-in\lambda}\widehat{f(x)}$ を使うと、次式を得る。

$$\begin{aligned}\delta_{n0} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \left[\mathrm{e}^{-in\lambda}\widehat{\gamma}(\lambda)\right]^* \widehat{\gamma}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \mathrm{e}^{in\lambda}|\widehat{\gamma}(\lambda)|^2 \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2\pi k-\pi}^{2\pi k+\pi} d\lambda\, \mathrm{e}^{in\lambda}|\widehat{\gamma}(\lambda)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\gamma}(\lambda+2\pi k)|^2 \end{aligned} \tag{8.2}$$

ここで

$$E(\lambda) \equiv \sqrt{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\gamma}(\lambda + 2\pi k)|^2$$

と置くと、式 (8.2) は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} E(\lambda)\mathrm{e}^{in\lambda}\, d\lambda = \delta_{0n} \tag{8.3}$$

と表される。$E(\lambda)$ が周期 2π の関数であれば、$E(\lambda)$ の Fourier 級数は式 (2.4) より $1/\sqrt{2\pi}\sum_n \varepsilon_n \mathrm{e}^{in\lambda}$、その係数は $\varepsilon_n = 1/\sqrt{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E(\lambda)\mathrm{e}^{-in\lambda}d\lambda$ である。これより、式 (8.3) は

$$\varepsilon_{-n} = \delta_{0n}$$

を意味する。これより $E(\lambda) = 1/\sqrt{2\pi}$ であることがわかり、命題が証明される。$E(\lambda)$ の周期性は次のように示される。

$$\begin{aligned} E(\lambda + 2\pi) &= \sqrt{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\gamma}(\lambda + 2\pi(k+1))|^2 \\ &= \sqrt{2\pi} \sum_{k' \in \mathbb{Z}} |\widehat{\gamma}(\lambda + 2\pi k')|^2 = E(\lambda). \end{aligned}$$

■

8.2　多重解像度解析（MRA)

第 6.1 の Haar スケーリング関数と Haar wavelet 関数や第 6.4 節の Wavelet 変換：分解と再構成アルゴリズムで眺めたような具体的に Haar 関数系で成立した性質、たとえば定理 6.25 や系 6.26 は一般的に多重化解像度解析（演習 6.27）の枠組みとして特徴づけられる。

定義 8.2 (多重解像度解析 [19]) $\mathbb{R}$ 上の L^2 関数がなす部分空間列 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ が次の性質を満たすとき、スケーリング関数 ϕ を持つ $\mathbb{R}$ 上の多重解像度解析 (MRA: Multi Resolution Analysis) をなすという。

(a)（入れ子性）すべての $j \in \mathbb{Z}$ について $V_j \subset V_{j+1}$. 解像度 $j+1$ の空間はより小さい解像度 j 以下の情報を持つ。

(b)（稠密性）$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$. $\hat{P}_j$ を V_j への直交射影とするとき、$f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ に対して $\lim_{j \to \infty} \hat{P}_j f = f$. いいかえれば、$\mathbb{R}$ 上のコンパクトサポートな連続関数 $f(x)$ に対して $f(x) \in \overline{\mathrm{span}}\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$、つまり、与えた $\varepsilon > 0$ に対し $\|f - g\| < \varepsilon$ となるるな $j \in \mathbb{Z}$ と $g(x) \in V_j$ が存在する。

(c)（分離性）$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

(d)（スケーリング）すべての $j \in \mathbb{Z}$ について、$f(x) \in V_j$ であるのは $f(2x) \in V_{j+1}$ のときに限り、$f(x) \in V_j$ であるとき $f(2^{-j}x) \in V_0$.

(e)（正規直交系）$\mathbb{R}$ 上のある L^2 関数 $\phi(x) \in V_0$ が存在し、平行移行から構成される関数系 $\{T_k \phi(x)\}$ が V_0 の正規直交基底

$$V_0 = \overline{\mathrm{span}}\{T_k \phi(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

となっている。

この J_j を解像度 j の**近似空間**という。このとき、定義 8.2(b) はすべてぼ $f \in L^2$ は j が大きいほど良く V_j 内の関数によって近似できることを意味している。実際、第 6 章の Haar 関数系においては定理 6.25 で与えたように

$$V_j = \left\{ h \in L^2(\mathbb{R}) \,|\, \text{任意の } k \in \mathbb{Z} \text{ について } h(x)|_{x \in [2^j k, 2^j (k+1))} = \text{定数} \right\} \quad (6.6')$$

となっていた。

定義 8.2(e) にあるスケーリング関数 $\phi(x)$ の平行移動から構成される正規直交基底は、Haar 関数以外にもさまざまな選び方があり、ϕ の各選択に応じて相異なる多重解像度解析が生成される。スケーリング関数として自然なクラスは Haar 関数がそうであるようにコンパクトサポートな関数である。Haar 関数は連続ではないが、ドブシーが示したようにコンパクトサポートかつ連続なスケーリング関数を構成することができる [9]。スケーリング関数の選び方は、第 6.4 節で触れたように、近似処理に基づく信号の分解と再構成の計算量と品質においては本質的である。

定義 8.3 MRA の定義 8.2 におけるスケーリング関数 $\phi(x)$ に対して、各 $j, k \in \mathbb{Z}$ について関数 $\phi_{j,k}(x)$ を

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k) = D_{2^j} T_k \phi(x), \qquad j \in \mathbb{Z} \tag{8.4}$$

また、$L^2(\mathbb{R})$ 内の関数 $f(x)$ に作用する各 $j \in \mathbb{Z}$ について V_j への射影演算子 $\hat{P}_j$ を

$$\hat{P}_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\phi_{j,k}\rangle \langle \phi_{j,k}| \tag{8.5}$$

および、詳細演算子 $\hat{Q}_j$ を

$$\hat{Q}_j = \hat{P}_{j+1} - \hat{P}_j \tag{8.6}$$

で定義する。

定理 8.4 各 $j \in \mathbb{Z}$ について、$\{\phi_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ は近似空間 V_j の正規直交系である。

証明　$\phi_{0,k}(x) \in V_0$ であることから、定義 8.2(d) より $\phi_{j,k}(x) \in V_j$. 一方、$\{\phi_{0.k}(x)\}$ が平行移動から構成された正規直交系であることから $\langle \phi_{0,k} | \phi_{0,\ell} \rangle = \langle \phi_{j,k} | \phi_{j,\ell} \rangle = \delta_{k\ell}$. したがって、$\{\phi_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ は正規直交系である。

$f_j(x) \in V_j$ のとき、$D_{2^{-j}} f_j(x) = f_j(2^{-j}x) \in V_j$ が V_0 の正規直交基底で展開できることから

$$D_{2^{-j}} |f_j\rangle = \sum_k \langle \phi_{0,k} \,|\, D_{2^{-j}} f_j \rangle \, |\phi_{0,k}\rangle = \sum_k \langle D_{2^j} \phi_{0,k} \,|\, f_j \rangle \, |\phi_{0,k}\rangle \,.$$

これより、$f_j \in V_j$ は次のように V_j の正規直交基底を使って展開できる。

$$
\begin{aligned}
|f_j\rangle &= D_{2^j} D_{2^{-j}} |f_j\rangle = D_{2^j} \sum_k \langle D_{2^j} \phi_{0,k} \mid f_j\rangle |\phi_{0,k}\rangle \\
&= \sum_k \langle D_{2^j} \phi_{0,k} \mid f_j\rangle D_{2^j} |\phi_{0,k}\rangle \\
&= \sum_k \langle \phi_{j,k} \mid f_j\rangle |\phi_{j,k}\rangle \\
&= \hat{P}_j |f_j\rangle
\end{aligned}
$$

■

多重解像度解析（MRA）が重要であるのは、第 8.4 節で示すように、スケーリング関数 ϕ を定めて定義 8.2 を満たすように関数空間列 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ を構成するとき、正規直交ウェーブレット関数系 $\{\psi\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ が存在して $L^2(\mathbb{R})$ の基底となり、$L^2(\mathbb{R})$ 内の任意の f に対して、V_j への直交射影 $\hat{P}_j$ を使って

$$
\hat{P}_j f = \hat{P}_{j-1} f + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f \mid \psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k} \tag{8.7}
$$

と表されることにある。

そこで、正規直交ウェーブレット関数系 $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ の MRA との関係性を調べてみよう。Haar 関数系については定理 6.25 で示したことだが、近似空間 V_j における V_{j-1} の直交補空間を W_{j-1} とする。

$$
V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}, \qquad V_{j-1} \perp W_{j-1}.
$$

MRA の定義 8.2(a) を繰り返して適用すると、系 6.26 の式 (6.8) と同様に、互いに直交する次のような部分空間への分解が得られる。

$$
\begin{aligned}
V_j &= \bigoplus_{k=1}^{n} W_{j-k} \oplus V_{j-n} \\
&= \bigoplus_{k=1}^{j-J} W_{j-k} \oplus V_J, \qquad j > J,
\end{aligned} \tag{8.8}
$$

したがって

$$
L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} W_k \tag{8.9}
$$

が成立する。すなわち、関数系 $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底となっている。また、$\{\psi_{0,k}\}+k\in\mathbb{Z}$ が W_0 の正規直交基底であるとき、任意の $j\in\mathbb{Z}$ に対しても $\{\psi_{j,k}\}+k\in\mathbb{Z}$ も W_j の正規直交基底になっていうことが第 8.4 節で示される。したがって、ウェーブレットの構成とは、定めたスケーリング関数 ϕ から W_0 で正規直交規定となるようなウェーブレット関数 $\psi\in W_0$ を見出すことに帰着されることになる。

8.3　スケーリング関係

MRA の定義 8.2(a)(d)(e) より、次の定理が得られる。

定理 8.5 (2-スケール関係) $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ をスケーリング関数 ϕ を持つ MRA とする。ことのとき、次の 2-スケール関係が成立する。

$$\phi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}p_k\phi(2x-k),\qquad p_k=\langle\phi_{1,k}\,|\,\phi\rangle=2\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(2x-k)\phi(x)\,dx \tag{8.10}$$

また、一般的に次の関係式が成り立つ。

$$\phi(2^{j-1}x-\ell)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}p_{k-2\ell}\phi(2^jx-k) \tag{8.11}$$

定義 8.3 の式 (8.4) から、式 (8.11) は V_j の正規直交基底として次のように表される。

$$\phi_{j-1,\ell}(x)=2^{1/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}p_{k-2\ell}\phi_{j,k}(x) \tag{8.12}$$

証明　$\phi\in V_0\subset V_1$ であり、$\{\phi_{1,k}\}$ は V_1 の正規直交基底であることから $\phi(x)$ はその基底を使った線形結合として絵ラワされる：$\phi(x)=\sum_k\tilde{p}_k\phi_{1,k}(x)$. $\{\phi_{1mk}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ の正規直交性より

$$\tilde{p}_k=\langle\phi_{1,k}\,|\,\phi\rangle=2^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(2x-k)\phi(x)\,dx$$

この式を代入して次を得る。

$$\begin{aligned}\phi(x)&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{p}_k\phi_{1,k}(x)\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[2^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(2x-k)\phi(x)\,dx\right]2^{1/2}\phi(2x-k).\end{aligned}$$

これより、$p_k = 2^{1/2}\tilde{p}_k = 2\int \phi^*(2x-k)\phi(x)\,dx$ として定理の前半を得る。定理の後半は、x を $2^{j-1}x - \ell$ に置き換えて総和の記号を調整することで得られる。 ■

例 8.6 Haar スケーリング関数 $\phi(x) = \chi_{[0,1)]}(x)$ については $p_0 = p_1 = 1$ を得る（他の係数はすべてゼロ）。実際、

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x-1).$$

定理 8.7 (2-スケール係数の性質) $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ をスケーリング関数 ϕ を持つ MRA とする。konotoki, 2-スケール関係を項別積分できるとき、以下の等式が成立する。

(1) $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} p^*_{k-2\ell}p_k = 2\delta_{\ell 0}$

(2) $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |p_k|^2 = 2$

(3) $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k = 2$

(4) $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{2k} = 1, \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{2k+1} = 1.$

証明　(1) 基底の完全性定理（1.60）に関する Parseval の等式

$$\langle f \mid g\rangle = \sum_k f^*_k\, g_k$$

から直接得られる。(2) $\ell = 0$ とした (1) の特別な場合である。

(3) 定理 8.5 から

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-k)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x')\,dx'\end{aligned}$$

$\int \phi(x')dx'$ がゼロにはなり得ないことより、結果を得る。(4) 第一の等式 $\sum_k p^*_{k-2\ell}p_k = 2\delta_{\ell 0}$ の添字を ℓ から $-\ell$ に変更して後に ℓ について総和を取ると

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} p^*_{k+2\ell}p_k = 2.$$

k についての総和を偶奇で分けて

$$
\begin{aligned}
2 &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} p^*_{2k+2\ell}p_{2k} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} p^*_{2k+1+2\ell}p_{2k+1}\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} p^*_{2k+2\ell}\right)p_{2k} + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} p^*_{2k+1+2\ell}\right)p_{2k+1}
\end{aligned}
$$

さらに内側の ℓ についての和を $\ell-k$ で置き換えると

$$
\begin{aligned}
2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{2k}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} p^*_{2\ell} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{2k+1}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} p^*_{2\ell+1} \\
&= \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{2k}\right|^2 + \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{2k+1}\right|^2
\end{aligned}
$$

$E=\sum_k p_{2k}$ および $O=\sum_k p_{2k+1}$ と置くと、最後の表式は $2=|E|^2+|O|^2$ と書ける。一方、(3) の表式は総和を偶奇に分けて $E+O=2$ であることに注意する. E,O に関する 2 つの式を満たす唯一の解は $E=O=1$ であることがわかる。 ■

8.4　ウェーブレット関数系の構成

MRA には $J_j\subset V_{j+1}$ であるような部分集合列 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ が必要である（定義 8.2)。V_{j+1} は V_j とその直交補空間 W_j に分割されるのであるが、そこで問題となるのは、MRA を構成するスケーリング関数 ϕ から W_j を張る直交基底 $\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ をどのように構成するかである。$\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は定理 8.5 を使って、次のように与えられる。

定理 8.8 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ が 2-スケール関係

$$\phi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k\phi(2x-k) \tag{8.10$'$}$$

を持つスケーリング関数 ϕ で定義される多重解像度解析とする。このとき、$V_{j+1}=V_j\oplus W_j$ であるような部分空間 V_j に対する直交補空間 W_j は

$$\psi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k p^*_{1-k}\phi(2x-k) \tag{8.13}$$

である関数系 $\{\phi(2^jx-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ によって張られ、その正規直交基底は

$$\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k) \tag{8.14}$$

である。

例 8.9 例 8.6 で見たように Haar のスケーリング関数 $\phi(x)$ では $p_0 = p_1 = 1$. これより、Haar のウェーブレット関数は $\psi(x) = p_1\phi(2x) - p_0\phi(2x-1)$ と構成される。

証明　$j = 0$ のときに成立することを示せば、MRA の定義 8.2(d) のスケーリング性から一般の j についても成立することに注意する。

まず、関数系 $\{\psi_{0,k}(x) = \psi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が直交し、$\psi_{0,k}(x)$ がすべての $k \in \mathbb{Z}$ について V_0 に直交し、結果として W_0 が V_1 内の V_0 の直交補空間に含まれていることを示す。

式 (8.14) から $\psi_{0,m}(x) = \sum_{k'}(-1)^{k'} p^*_{1-k'+2m}\phi(2x-k')$ であること、および $\{2^{1/2}\phi(2x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が直交系であることから、次式を得る（最後に定理 8.7 の関係式 (1) を使う）。

$$\begin{aligned}\langle \psi_{0,m} \mid \psi_{0,\ell}\rangle &= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{1-k+2m}p^*_{1-k+2\ell}\\ &= \frac{1}{2}\sum i \in \mathbb{Z} p_i p^*_{i+2\ell-2m}\\ &= \delta_{m-\ell,0} = \delta_{m,\ell}\end{aligned}$$

これより、関数系 $\{\psi_{0,k}(x) = \psi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ の直交性が示された。

次に、$\psi(x-m)$ が空間 V_0 の基底である $\phi(x-\ell)$ に直交していることを示す。内積をとって次式を得る。

$$\langle \psi_{0,m} \mid \phi_{0,\ell}\rangle = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k p_{1-k+2m}p_{k-2\ell}.$$

右辺の総和はゼロになる。実際、$m = \ell = 0$ の場合、$\sum_k(-1)^k p_{1-k}p_k$ はゼロになる。一般に、$j \geqq 0$ に対して $k = m+\ell-j$ の項は $k = m+\ell+j+1$ の項とで打ち消し合い、総和はゼロとなる。したがって、W_0 は V_0 の直交補空間に含まれていることが分かった。

最後に、V_1 の基底 $\phi(2x-j)$ は V_0 の基底 $\phi(x-k)$ と W_0 の基底 $\psi(x-k)$ を使って

$$\phi(2x-j) = \sum_k a_k\phi(x-k) + b_k\psi(x-k)$$

と表されることを示して、$V_1 = V_0 \oplus W_0$ であることを証明しよう。関数系 $\{\phi(x-$

$k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ の直交性から

$$\begin{aligned} a_k &= \int \phi^*(y-k)\phi(2y-j)\,dy \\ &= \int \sum_{\ell} p_\ell^* \phi^*(2y-2k-\ell)\phi(2y-j)\,dy \\ &= \frac{1}{2} p_{j-2k}^* \end{aligned}$$

また、同様にして次を得る。

$$\begin{aligned} b_k &= \int \psi^*(y-k)\phi(2y-j)\,dy \\ &= \frac{1}{2}(-1)^j p_{1-j+2k}. \end{aligned}$$

これらより、確かめるべきは次式となる。

$$\begin{aligned} \phi(2x-j) &= \frac{1}{2}\sum_k p_{j-2k}^* \phi(x-k) + (-1)^j p_{1-j+2k}\psi(x-k) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k,\ell}\Big((-1)^{j+1} p_{1-j+2k} p_{1-\ell}^* + p_{j-2k}^* p_\ell\Big)\phi(2x-2k-\ell). \end{aligned}$$

右辺の $\phi(2x-2k-\ell)$ の係数が $2k+\ell=j$ 以外でゼロになることを示そう。つまり、以下を示す。$\ell = j-2k$ のとき

$$\sum_k p_{1-j+2k} p_{1-j+2k}^* + p_{j-2k}^* p_{j-2k} = 2 \tag{*}$$

および、$n \neq 0$ について $\ell = j-2k+n$ のとき

$$\sum_k (-1)^n p_{1-j+2k} p_{1-j+2k-n}^* + \sum_k p_{j-2k}^* p_{j-2k+n} = 0, \quad n \neq 0 \tag{**}$$

式 $(*)$ については、$m = 1-j+2k$、$m = j-2k$ として、定理 8.7 の関係式 (2) から

$$\sum_m p_m p_m^* = 2$$

を得る。式 $(**)$ については、n の偶奇で分けて考える。奇数 $n = 2i$ のとき、最初の総和は添字を $k' = i+j-k$ と変えて

$$\sum_{k'} -p_{j-2k'+n} p_{j-2k'}^*$$

となって後の総和と打ち消し合う。一方、偶数 $n = 2i$ のとき、後の総和は添字を $k = -k' + j + i$ と変えて

$$\sum_{k'} p^*_{-j+2k'-n} p_{-j+2k'}$$

となる。これを $m = -j + 2k'$ で書き直すと、式 $(**)$ の最初の総和で $m = 1 - j + 2k$ としたものとまとめることができて、式 $(**)$ は

$$\sum_{m} p^*_{m-2i} p_m$$

と表される。定理 8.7 の関係式 (1) から、この式の総和はゼロである。 ■

定理 8.8 の式 (8.13) と式 (8.14) より、空間 W_j の正規基底 $\psi_{j,k}(x) = 2^{1/2}\psi(2^j x - k)$ は V_{j+1} の正規基底 $\phi_{j+1,\ell}(x)$ を使って

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-1/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (-1)^\ell p^*_{1-\ell+2k} \phi_{j+1,\ell}(x) \tag{8.15}$$

と表される。V_j の部分空間 V_{j-1} とその直交補空間 W_{j-1} への分解 $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ を繰り返すと互いに直交する次のような部分空間への分解が得られる。

$$V_j = \bigoplus_{k=1}^{j-J} W_{j-k} \oplus V_J, \qquad j > J, \tag{8.8$'$}$$

さらに、$\{V_j\}$ は $V_{-1}, V_{-2}, \ldots$ と $J < 0$ についてて定義されており、MRA の定義 8.2(c) から、先の式 (8.9) を次の定理として得られる。

定理 8.10 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ がスケーリング関数 ϕ をもつ MRA とする。W_j を V_{j+1} 内の部分空間 V_j の直交補空間とするとき次が成立する。

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} W_k. \tag{8.9$'$}$$

各 $j \in \mathbb{Z}$ について $\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は W_j の正規直交系、ウェーブレット系 $\{\psi_{j,k}(X)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交系である。実際、$f \in L^2(\mathbb{R})$ は $\sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k, w_k \in W_k$ と一意に展開される。

8.5　MRA の分解および再構成公式

$f_j(x)$ をある $j \in \mathbb{Z}$ の近似空間 V_j に属しているとする。たとえば、$f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して V_j への射影演算子 $\hat{P}_j$ によって、$f_j(x) = \hat{P}_j f(x)$ を考える。定理 8.4 より、f_j は V_j の正規直交系を使って次のように展開される。

$$f_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \phi_{j,k} \,|\, f \rangle \, \phi_{j,k}(x). \tag{8.16}$$

$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}, V_{j-1} \perp W_{j-1}$ と直和分解されることと定理 8.8 から f_j を $f_j = f_{j-1} + w_{j-1}, f_{j-1} \in V_{j-1}, w_{j-1} \in W_{j-1}$ と分解でき、それぞれ V_{j-1} および W_{j-1} の正規直交系を使って次のようにも展開できる。

$$\begin{aligned} f_j(x) &= f_{j-1}(x) + w_{j-1}(x) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \phi_{j-1,k} \,|\, f \rangle \, \phi_{j-1,k}(x) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \psi_{j-1,k} \,|\, f \rangle \, \psi_{j-1,k}(x). \end{aligned} \tag{8.17}$$

式 (8.12) および式 (8.14) から、式 (8.17) の係数は次のように分解される。

$$\left.\begin{aligned} \langle \phi_{j-1,k} \,|\, f \rangle &= 2^{-1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} p^*_{k-2\ell} \, \langle \phi_{j,k} \,|\, f \rangle \\ \langle \psi_{j-1,k} \,|\, f \rangle &= 2^{-1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k p_{1-k+2\ell} \, \langle \phi_{j,k} \,|\, f \rangle \end{aligned}\right\} \tag{8.18}$$

$f_j(x)$ を $\phi_{j,k}(x)$ に置き換えて、$\langle \phi_{j-1,k} \,|\, \phi_{j,k} \rangle = 2^{-1/2} p^*_{k-2\ell}$ および $\langle \psi_{j-1,k} \,|\, \phi_{j,k} \rangle = 2^{-1/2}(-1)^k p_{1-k+2\ell}$ を使うと、式 (8.18) は次のようになる。

$$\phi_{j,k}(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} 2^{-1/2} p^*_{k-2\ell} \phi_{j-1,k}(x) + \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} 2^{-1/2} (-1)^k p_{1-k+2\ell} \psi_{j-1,k}(x) \tag{8.19}$$

この式 (8.19) は、式 (8.12) とを比較して分かるように、スケーリング関数の **2-スケールの逆関係**を与えている。これより、式 (8.16) の $f_j(x)$ の展開係数 $\langle \phi_{j,k} \,|\, f \rangle$ は次のように再構成される。

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,k} \,|\, f \rangle =& 2^{-1/2} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} p_{k-2\ell} \, \langle \phi_{j-1,\ell} \,|\, f \rangle \\ &+ 2^{-1/2} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} (-1)^k p^*_{1-k+2\ell} \, \langle \phi_{j-1,\ell} \,|\, f \rangle \end{aligned} \tag{8.20}$$

これらの関係から次の定理を得る。

命題 8.11 (近似関数の分解と再構成) MRA の近似関数 $f_j \in V_j$ を係数 $\{c_k^j = 2^{j/2}\langle\phi_{j,k}\,|\,f\rangle\}$ を使って

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{j/2}\langle\phi_{j,k}\,|\,f\rangle\, 2^{-1/2}\phi_{j,k}(x) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^j \phi(2^j x - k) \end{aligned}$$

と展開すると、式 (8.17) は $\{d_k^{j-1} = 2^{(j-1)/2}\langle\psi_{j-1,k}\,|\,f\rangle\}$ を使って次のように展開される。

$$f_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{j-1}\phi(2^{j-1}x - k) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k^{j-1}\psi(2^{j-1}x - k).$$

このとき、次の関係が成立する。

$$\text{係数の分解}: \begin{cases} c_k^{j-1} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{k-2\ell}^* a_k^j \\ d_k^{j-1} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k p_{1-k+2\ell} a_k^j \end{cases} \tag{8.21}$$

$$\text{係数の再構成}: c_k^j = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} p_{k-2\ell} a_\ell^{j-1} + \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} (-1)^k p_{1-k+2\ell}^* b_\ell^{j-1} \tag{8.22}$$

8.6　分解と再構成法

第 8.5 節の MRA の分解および再構成公式から、信号 $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対するウェーブレット分解と再構成の実際をみてみよう。f を上手く近似するために、標本化率（第 3.5 章）と利用する MRA の選択がどの近似空間 V_j を使うかが決定される。f の V_j での最適近似は V_j への直交射影 $\hat{P}_j$ によって、V_j の基底を使って次のように表される。

$$\hat{P}_j f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^j \phi(2^j x - k), \qquad c_k^j = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*)2^j x - k) f(x)\,dx \tag{8.23}$$

ここで、信号 $f \in L^2(\mathbb{R})$ の展開係数 $\{c_k^j\}$ が問題になるが、正確には標本化情報からでなく、第 6.4 節での議論から、次のようにスケーリング関数から計算するとよい。

$$c_k^j \approx C f(k/2^j), \qquad C = \int \phi^*(x)\,dx$$

$\phi(x)$ がコンパクトであるとき、$|x| \leqq m$ で ϕ は値を持つため

$$c_k^j = \int_{-M}^{M} \phi^*(x') f(2^{-j}x' + 2^{-j}k)\, dx'$$

であるが、十分大きな j のとき、$x' \in [-M, M]$ について $2^{-j}x' + 2^{-j}k \sim +2^{-j}k$ であることから $f(2^{-j}x' + 2^{-j}k) \sim f(2^{-j})$ となって

$$c_k^j \approx f(k/2^j) \int_{-M}^{M} \phi^*(x'), dx'$$

となるからである。

これより式 (8.23) は

$$\hat{P}_j f(x) \approx f_j(x) = C \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k/2^j) \phi(2^j x - k) \tag{8.23$'$}$$

と近似的に与えられる。

8.6.1　分解アルゴリズム

式 (6.21) のように、f_j は次のように分解される。

$$\begin{array}{ccccccccccc} f \approx f_j & \to & f_{j-1} & \to & f_{j-2} & \to & \cdots & \to & f_1 & \to & f_0 \\ & \searrow & w_{j-1} & \searrow & w_{j-2} & \searrow & \cdots & \searrow & w_1 & \searrow & w_0 \end{array} \tag{8.24}$$

さて、離散信号の下降演算を次のように定めよう。

定義 8.12 離散信号 $s = (\ldots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \ldots)$ の下降化演算子 $\hat{D}$ を

$$\hat{D}s = (\ldots, s_{-2}, s_0, s_2, \dot{)} \tag{8.25}$$

定義 5.2(6) の離散信号 $x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots), y = (\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots)$ の畳み込み

$$(x * y)_i = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} x_\ell y_{i-\ell}$$

を思い起こそう。このとき、式 (8.19) に関係する離散信号 $h = (\ldots, h_{-1}, h_0, h_1, \ldots)$ および $\ell = (\ldots, \ell_{-1}, \ell_0, \ell_1, \ldots)$ を

$$h_k = \frac{1}{2}(-1)^k p_{k+1} \tag{8.26}$$

$$\ell_k = \frac{1}{2}p^*_{-k} \tag{8.27}$$

と定めると、展開係数からなる離散係数列 $c^j = (\dots, c^j_{-1}, c^j_0, c^j_1, \dots)$ と $d^{j-1} = (\dots, d^{j-1}_{-1}, d^{j-1}_0, d^{j-1}_1, \dots)$ に対する式 (8.21) の分解アルゴリズムは次のように表される。

$$c^{j-1} = D(\ell * c^j) \tag{8.21$'$}$$

$$d^{j-1} = D(h * c^j). \tag{8.22$'$}$$

8.6.2　再構成アルゴリズム

再構成スキームは次のようになる。

$$\begin{array}{ccccccccccc} f_0 & \to & f_1 & \to & f_2 & \to & \cdots & \to & f_{j-1} & \to & f_j \approx f \\ w_0 & \nearrow & w_1 & \nearrow & w_2 & \nearrow & \cdots & \nearrow & w_{j-1} & \nearrow & \end{array} \tag{8.28}$$

今度は離散列を

$$\tilde{h}_k = \frac{1}{2}(-1)^k p^*_{1-k} \tag{8.29}$$

$$\tilde{\ell}_k = \frac{1}{2}p_k \tag{8.30}$$

とすると、式 (8.22) は次のように書ける。

$$c^j_k = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \tilde{\ell}_{k-2\ell} c^{j-1}_\ell + \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \tilde{h}_{k-2\ell} d^{j-1}_\ell \tag{8.31}$$

ここで、離散信号の上昇演算を次のように定めよう。

定義 8.13 離散信号 $s = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots)$ の上昇化演算子 $\hat{U}$ を

$$\hat{U}s = (\dots, s_{-2}, 0, s_{-1}, 0, s_0, 0, s_1, 0s_2, 0\dot{)} \tag{8.32}$$

このとき、式 (8.31) の再構成アルゴリズムは次のように表される。

$$a^j = \tilde{\ell} * (Ua^{j-1}) + \tilde{h} * (Ud^{j-1}) \tag{8.33}$$

第 9 章

Daubechies の構成方法

9.1 スケーリング関数の Fourier 変換

定理 8.5 のスケーリング関数の 2-スケール関係 (8.10)

$$\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \phi(2x-k) \tag{8.10$'$}$$

を Fourier 変換してみる。

定理 9.1 2-スケーリング関係 $\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \phi(2x-k)$ の Fourier 変換は多項式

$$H(z) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k z^k \tag{9.1}$$

を使って次のように表示できる。

$$\widehat{\phi}(\lambda) = \widehat{\phi}(\lambda/2) H(\mathrm{e}^{-i\lambda/2}). \tag{9.2}$$

また、多項式 $G(z)$ を

$$G(z) = -zH^*(-z)$$

とおくと、定理 8.8 の

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k p^*_{1-k} \phi(2x-k) \tag{8.13$'$}$$

についても、同様な Fourier 変換した関係式を得る。

$$\widehat{\psi}(\lambda) = \widehat{\phi}(\lambda/2) G(\mathrm{e}^{-i\lambda/2}). \tag{9.3}$$

証明　定理 3.18 の Fourier 変換の性質 (1),(6),(7) から

$$\mathcal{F}[\phi(x)](\lambda) = \sum_k p_k \mathcal{F}[\phi(2(x-k/2))](\lambda) = \frac{1}{2}\sum_k p_k \widehat{\phi}(\lambda/2)\mathrm{e}^{-ik\lambda/2} = \widehat{\phi}(\lambda/2)H(\mathrm{e}^{-i\lambda/2}).$$

■

命題 8.1 で MRA においてスケーリング関数 ϕ の平行移動から構成された正規直交関数系が満たす式 (8.1) を使うと、定理 9.1 の 2-スケール関係の Fourier 変換で登場した多項式 $H(z)$ は次の特徴的な性質を持つことがわかる。

定理 9.2 関数 ϕ が正規直交 $\int \phi^*(x-k)\phi(x-\ell)dx = \delta_{k\ell}$ で、2-スケール条件 $\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x-k)$ を満たしているとする。このとき多項式 $H(z) = 1/2\sum_k p_k z^k$ は次を満たす。

$$|H(z)|^2 + |H(-z)|^2 = 1, \qquad z \in \mathbb{C}, |z| = 1. \tag{9.4}$$

証明　命題 8.1 の式

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\lambda + 2\pi k)|^2 = \frac{1}{2\pi}, \qquad \text{全ての } \lambda \in \mathbb{R} \text{ から} \tag{8.1$'$}$$

の総和を偶奇に分け、定理 9.1 の式

$$\widehat{\phi}(\lambda) = \widehat{\phi}(\lambda/2)H(\mathrm{e}^{-i\lambda/2}) \tag{9.2$'$}$$

を使う。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\lambda + 2\pi k)|^2 \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\lambda + (2\ell)\pi)|^2 + \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\lambda + (2\ell+1)\pi)|^2 \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \Big(|\widehat{\phi}(\lambda/2 + (2\ell)\pi)H(\mathrm{e}^{-i(\lambda/2+2\ell\pi)})|^2 + |\widehat{\phi}(\lambda/2 + (2\ell+1)\pi)H(\mathrm{e}^{-i(\lambda/2+(2\ell+1)\pi)})|^2 \\
&= |H(\mathrm{e}^{-i\lambda/2})|^2 \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\lambda/2 + 2\pi\ell)|^2 + |H(-\mathrm{e}^{-i\lambda/2})|^2 \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}((\lambda/2+\pi) + 2\pi\ell)|^2.
\end{aligned}$$

右辺の 2 つ総和は命題 8.1 よりそれぞれ $1/2\pi$。したがって、

$$1 = |H(\mathrm{e}^{-i\lambda/2})|^2 + |H(-\mathrm{e}^{-i\lambda/2})|^2.$$

■

演習 9.3 Haar 関数の 2-スケーリング関係は $p_0 = p_1 = 1$, $p_{k\neq 0,1} = 0$ で合った。定理 9.1 および定理 9.2 が成立することを確かめなさい。

このとき、定理 9.2 と同様にして、ψ についても次の類似定理が成り立つ。

定理 9.4 関数 ϕ が正規直交 $\int \phi^*(x-k)\phi(x-\ell)dx = \delta_{k\ell}$ で、2-スケール条件 $\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x-k)$ を満たしているとする。また、$\psi(x) = \sum_k q_k \phi(2x-k)$ であるとする。

多項式 $G(z) = \sum_k q_k z^k$ とするとき、直交性 $\int \psi^*(x-k)\phi(x-\ell)dx = 0, k\ell \in \mathbb{Z}$ は次のように表される。

$$H(z)G^*(z) + H(-z)G^*(-z) = 0, \qquad \text{すべての } |z| = 1.$$

定理 9.2 と定理 9.4 を次のようにまとめることもできる。

系 9.5 定理 9.2 と定理 9.4 の前提のもとに、行列 S を

$$S = \begin{bmatrix} H(z) & H(-z) \\ G(z) & G(-z) \end{bmatrix}$$

と定めると

$$SS^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

例 9.6 区間 $[0,1)$ 上で値 1 を持つ Haar スケーリング関数 $\phi(x)$ の場合に定理が成立していることを確かめよう。この Fourier 変換は

$$\widehat{\phi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \mathrm{e}^{-ix\lambda} dx = \frac{\mathrm{e}^{-i\lambda} - 1}{-i\sqrt{2\pi}\lambda}$$

であることに注意しておく。このとき、ϕ の 2-スケール関係 $p_0 = p_1 = 1$ より多項式 $H(z) = (1+z)/2$ となる。

$$\begin{aligned} H(e{-}i\lambda/2)\widehat{\phi}(\lambda/2) &= \frac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{-i\lambda/2}) \frac{\mathrm{e}^{-i\lambda/2} - 1}{-i\sqrt{2\pi}\lambda/2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-i\lambda} - 1}{-i\sqrt{2\pi}\lambda} = \widehat{\phi}(\lambda). \end{aligned}$$

これより、$\widehat{\phi}(\lambda) = H(e{-}i\lambda/2)\widehat{\phi}(\lambda/2)$ を得て、定理 9.1 の前半が成立していることが確かめられた。また

$$|H(z)|^2 + |H(-z)|^2 = \frac{|1+z|^2}{4} + \frac{|1-z|^2}{4} \qquad |z| = 1$$

より、定理 9.2 が成立していることがわかる。

さらに、Haar のウェーブレット関数 $\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1)$ の Fourier 変換を直接計算して

$$\widehat{\psi}(\lambda) = \frac{(\mathrm{e}^{-i\lambda/2} - 1)^2}{i\sqrt{2\pi}\lambda}.$$

を得る。$G(z) = (1-z)/2$ であることを使って

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}(\lambda/2)G(\mathrm{e}^{-i\lambda/2}) &= \frac{\mathrm{e}^{-i\lambda} - 1}{-i\sqrt{2\pi}\lambda} \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-i\lambda/2}}{2} \\ &= \widehat{\psi}(\lambda)\end{aligned}$$

これより、定理 9.1 の後半が成立していることが確かめられた。

9.2　スケーリング関数の反復構成

定理 9.1 と定理 9.2 から、MRA を構成する関数 ϕ の 2-スケーリング関係 (8.10) より定義される多項式 (9.1) が

$$|H(z)|^2 + |H(-z)|^2 = 1, \qquad |z| = 1 \tag{9.4$'$}$$

を満たしているとする。言い換えれば、式 9.4 を満たすような多項式と 2-スケーリング関係

$$\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \phi(2x-k) \tag{8.10$'$}$$

を満たすような関数 ϕ を構成すれば。このれば MRA のスケーリング関数になる。実際、Daubechies の正規直交連続ウェーブレット関数の発見はそのような多項式 H を構成することによってなされた [8]。

さて、ϕ が 2-スケーリング関係を満たしているとき、定理 9.1 を繰り返して適用しすると

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}(\lambda) &= H(\mathrm{e}^{-i\lambda/2})\widehat{\phi}(\lambda/2) \\ &= H(\mathrm{e}^{-i\lambda/2})H(\mathrm{e}^{-i\lambda}/2^2)\widehat{\phi}(\lambda/2^2) \\ &= \left(\prod_{m=1}^{n} H(\mathrm{e}^{-i\lambda/2^m})\right)\widehat{\phi}(\lambda/2^n)\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}(\lambda) &= \left(\prod_{m=1}^{\infty} H(\mathrm{e}^{-i\lambda/2^m})\right)\widehat{\phi}(0)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\prod_{m=1}^{\infty} H(\mathrm{e}^{-i\lambda/2^m})\right)\end{aligned}$$

が得られることに注意しよう（$\widehat{\phi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ を使った）。

このことから次のような反復法が考えられる。

定義 9.7 (スケーリング関数の反復構成) 定理 9.2 を満たす多項式 H が既に構成されており、$H(1) = 1$ とする。初期関数 $\phi_)$ として正規直交性を満たす Haar スケーリング関数をとる。

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x < 1, \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

これより、$\phi_1(x) = \sum_k p_k \phi_0(x), \ldots$ というように、以下のように関数 ϕ_n を反復定義する。

$$\phi_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \phi_{n-1}(2x-k) \tag{9.5}$$

このとき関数 $\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ を考えることができ、次の定理を得る。

定理 9.8 多項式 $H(z) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k z^k$ が次の性質を満たすとする。

(1) $H(1) = 1.$
(2) $|H(z)|^2 + |H(-z)|^2 = 1, \quad |z| = 1.$
(3) $|H(\mathrm{e}^{iw})| > 0, \quad |w| \leqq \pi/2.$

また、$\phi_0(x)$ を Haar スケーリング関数とし、$\phi_n(x) = \sum_k p_k \phi_{n-1}(2x-k), n \geqq 1$ とする。

このとき、関数列 $\{\phi_n(x)\}_{n\geqq 1}$ は L^2 で ϕ に各点収束し、ϕ は規格化性 $\widehat{\phi} = 1/\sqrt{2\pi}$ と正規直交性

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x-m)\phi(x-n)\,dx = \delta_{mn}$$

および、2-スケーリング関係 $\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x-k)$ を満たす。

証明　式 (9.5) の $n=1$ として Fourier 変換すると、式 (9.2) より

$$\widehat{\phi_1}(\lambda) = \widehat{\phi_0}(\lambda/2)H(\mathrm{e}^{-i\lambda/2}). \tag{9.2$'$}$$

$\widehat{\phi_0}(0) = 1/\sqrt{2\pi}, H(1) = 1$ から $\widehat{\phi_1}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ となり定理の条件を満たす。

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi_1}(\lambda+2\pi k)|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |H(\mathrm{e}^{-i\lambda/2+i\pi k)})|^2 |\widehat{\phi_0}(\lambda/2+\pi k)|^2 \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |H(\mathrm{e}^{-i\lambda/2+i2\pi\ell)})|^2 |\widehat{\phi_0}(\lambda/2+2\pi\ell)|^2 \\
&\qquad + \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |H(\mathrm{e}^{-i\lambda/2+i\pi(2\ell+1)})|^2 |\widehat{\phi_0}(\lambda/2+\pi(2\ell+1))|^2 \\
&= |H(\mathrm{e}^{-i\lambda/2})|^2 \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi_0}(\lambda/2+2\pi\ell)|^2 \\
&\qquad + |H(-\mathrm{e}^{-i\lambda/2})|^2 \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi_0}(\lambda/2+2\pi\ell)|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(|H(\mathrm{e}^{-i\lambda/2})|^2 + |H(-\mathrm{e}^{-i\lambda/2})|^2\right) \quad \text{命題 8.1 式 (8.1) より} \\
&= \frac{1}{2\pi} \quad \text{定理の仮定より}
\end{aligned}$$

命題 8.1 より、ϕ_1 は正規直交性を満たす。帰納法からすべての ϕ_n で条件を満たす。

収束性の証明は省略する（図 9.1 参照）。 ■

例 9.9 Haar スケーリング関数の 2-スケール関係が $p_0 = p_1 = 1$ であることから、多項式は $H(z) = (1+z)/2$ である。これより、直ちに定理 9.8 の仮定を満たすことが確かめられる。ϕ_1 は

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= p_0\phi(2x) + p_1\phi(2x-1) \\
&= \phi_0(x)
\end{aligned}$$

となり、$\phi_0 = \phi_1 = \phi_2 = \ldots$ であることがわかる。したがって、Haar 関数の場合、スケーリング関数は反復法によって ϕ_0 のままである。

例 9.10 多項式 $H(z) = \sum_k p_k z^k$ において、Daubechies[8] は 2-スケール係数として $p_0 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}, p_1 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{4}, p_2 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}, p_3 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$ を持つことを発見した（第 9.4 節）。この場合の反復法による関数 $\phi_n(x) = \sum_k p_k \phi_{n-1}(2x-k)$ の収束の様子 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6$ を図 9.1 に示した。

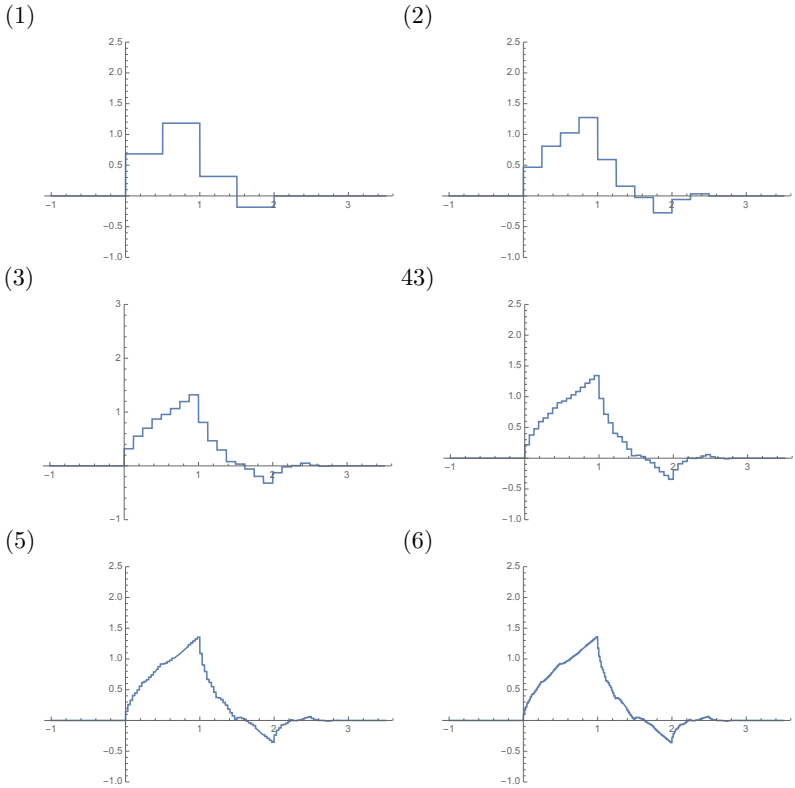


図 9.1　Daubechies の連続スケーリング関数 ϕ の構成。2-スケール関係 $p_0 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}, p_1 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{4}, p_2 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}, p_3 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$ と選んで Haar スケーリング関数 $\phi_0(x)(0)$ から $\phi_n(x) = \sum_l p_k \phi_{n-1}$ と反復して構成した $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5$. $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ がコンパクトサポートを持つ連続関数 $\phi(x)$ に急速に収束する様子が伺える。

9.3　ウェーブレット関数のゼロモーメント条件

定理 8.8 でスケーリング関係

$$\phi(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} p_k \phi(2x-\ell) \tag{8.10$'$}$$

を持つスケーリング関数 ϕ の Fourier 変換から導かれる式 (9.1) の多項式 H を改めて

$$m_0(\xi) = H(\mathrm{e}^{-i\xi}) = \frac{1}{2}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} p_\ell \mathrm{e}^{-i\ell\xi} \tag{9.6}$$

と書くことにする。$m_0(\xi)$ は、定理 9.2 の式 (9.4) から、次の性質

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1 \tag{9.7}$$

を持つ。式 (9.2) は次のように表される。

$$\widehat{\phi}(\xi) = m_0(\xi/2)\widehat{\phi}(\xi/2). \tag{9.2$'$}$$

また、スケーリング関数 ϕ から導かれるウェーブレット

$$\psi(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} (-1)^\ell p^*_{1-\ell}\phi(2x-\ell) \tag{8.13$'$}$$

の Fourier 変換式 (9.3) は改めて次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(\xi) &= -\widehat{\phi}(\xi/2)\left(-\mathrm{e}^{-i\xi/2}H^*(-\mathrm{e}^{-i\xi/2})\right)\\ &= -\mathrm{e}^{-i\xi/2}m_0^*(\xi/2+\pi)\widehat{\phi}(\xi/2).\end{aligned} \tag{9.8}$$

このとき、次の定理が成立する。

定理 9.11 (ゼロモーメント条件) $\phi(x)$ をコンパクトサポートな有限列 $\{p_k\}$ を持つ MRA のスケーリング関数とする。$\psi(x)$ を式 (8.13) で与えられるウェーブレット関数とする。このとき、各 $N\in\mathbb{N}$ に対して、次は同値である。

(1) ψ の k モーメントがゼロである。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k\psi(x)\,dx = 0 \qquad 0 \leqq k \leqq N-1. \tag{9.9}$$

(2) m_0 の π での k 階微分がゼロである。

$$m_0^{(k)}(\pi) = 0 \qquad 0 \leqq k \leqq N-1. \tag{9.10}$$

(3) $m_0(\xi)$ が周期 2π を持つ三角関数の多項式 $\mathcal{L}$ との積に因子できる。

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1+\mathrm{e}^{-i\xi}}{2}\right)^N \mathcal{L}(\xi) \tag{9.11}$$

(4)

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} p_\ell (-1)^\ell \ell^k = 0 \tag{9.12}$$

証明　(1) $\leftrightarrow$ (2)
式 (9.8) と $\widehat{\phi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ を使うと

$$\widehat{\psi}(0) = -m_0^*(\pi)\widehat{\phi}(0)$$

であるためには

$$m_0(\pi) = 0$$

であることが必要十分。また、Fourier 変換の導関数の性質（式 (3.11)）を使うと

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{\psi}(0) = m_)^*(\pi)\left(\frac{i}{2}\widehat{\phi}(0) - \frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\widehat{\phi}(0)\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}m_0^*(\pi)\cdot\widehat{\phi}(0) = 0$$

であるためには

$$\frac{d}{d\xi}m_0(\pi) = 0$$

であることが必要十分。同様にして、帰納的から $0 \leqq k \leqq N-1$ に対して $\widehat{\psi}^{(k)}(0) = 0$ であることと $m_0^{(k)}(\pi) = 0$ は同値である。
(2) $\leftrightarrow$ (3)
スケーリング関係の係数 $\{p_k\}$ に関する Z-変換を

$$\mathcal{H}(z) = \sum_k p_k z^{-k}$$

とすると、$m_0(\xi) = \mathcal{H}(\mathrm{e}^{i\xi})$ である。$\mathcal{H}(z)$ は非ゼロ係数をもつ z^{-1} に関する多項式と仮定することができる（そうでなければ、適当な J を選んで $z^{-J}\mathcal{H}(z)$ がそうであ

るようにできて、それを改めて $\mathcal{H}(z)$ とする)。$\mathcal{H}(-1) = \mathcal{H}(\mathrm{e}^{i\pi}) = m_0(\pi)$ である。(2) が成立しているとき、

$$\mathcal{H}^{(k)}(-1) = 0 \qquad 0 \leqq k \leqq N-1$$

に注意すると、Taylor 展開は次のようになる。

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\mathcal{H}^{(k)}(-1)}{k!}(z^{-1}+1)^k + \frac{1}{N!}(z^{-1}+1)R_N(z) \\ &= \frac{1}{N!}(z^{-1}+1)R_N(z)\end{aligned}$$

これより、次を得る。

$$m_0(\xi) = \mathcal{H}\mathrm{e}^{i\xi} = \left(\frac{1+\mathrm{e}^{-i\xi}}{2}\right)^N \mathcal{L}(\xi)$$

ここで

$$\mathcal{L}(\xi) = \frac{2^N}{N!}R_N(\mathrm{e}^{i\xi})$$

において、$R_N(z)$ は z^{-1} の多項式である。このことから $\mathcal{L}(\xi)$ は周期 2π の三角関数の多項式となり、(3) を得る。一方、(3) であれば、z^{-1} に関するある多項式 $a(z)$ をつかって

$$\mathcal{H}(z) = (z^{-1}+1)^N a(z)$$

と因子化でき、$\mathcal{H}(z)$ は $z=-1$ で N 位のゼロ点を持つ。z_0 が $\mathcal{H}(z)$ の r 位のゼロ点であるとに、$z_0 = \mathrm{e}^{i\xi_0}$ なる ξ_0 は $m_0(\xi)$ の r 位のゼロ点である。したがって、$z=-1$ が $\mathcal{H}(z)$ の N 位のゼロ点であるとき π は $m_0(\xi)$ の N 位のゼロ点となり (2) を得る。

(2) $\leftrightarrow$ (4)

$m_0(\xi)$ の定義と $\{p_k\}$ が有限列であることから

$$m_0^{(k)}(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{\ell} p_\ell(-i\ell)^k \mathrm{e}^{-i\ell\xi}.$$

これより、

$$m_0^{(k)}(\pi) = \frac{(-i)^k}{2}\sum_{\ell} p_\ell \ell^k (\mathrm{e}^{-i\pi})^\ell. = \frac{(-i)^k}{2}\sum_{\ell} p_\ell \ell^k (-1)^\ell$$

■

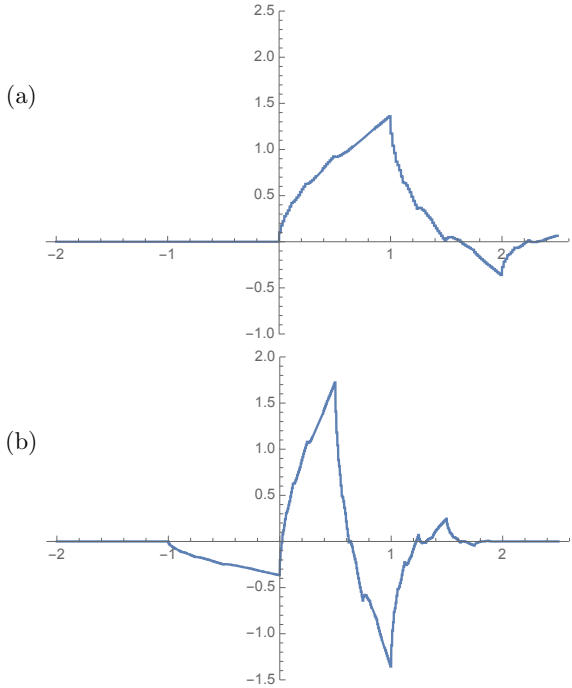


図 9.2 Daubechies が発見した関数（$N = 2$）. 2-スケール係数が $p_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, p_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}, p_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}, p_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$ の場合: (a) スケーリング関数 $\phi(x)$（図 9.1）, (b) ウェーブレット関数 $\psi(x) = \sum_k (-1)^k p^*_{1-k}\phi(2x-k)$. いずれもコンパクトサポートを持つ連続関数になっている。

9.4 Daubechies の方法

Daubechies は不連続な Haar 関数系を特別な場合として含むようなスケーリング関数 ϕ およびそれから導かれる正規直交基底をなすコンパクトサポートを持つウェーブレット関数 ψ を組織的に構成することに成功した [8][9]。

定理 9.11(3) から、次の実数値関数を考える。

$$\begin{aligned} M_0(\xi) &= |m_0(\xi)|^2 = \left|\frac{1+\mathrm{e}^{-ixi}}{2}\right|^{2N} |\mathcal{L}(\xi)|^2 \\ &= \cos^{2N}(\xi/2)L(\xi) \end{aligned} \tag{9.13}$$

ここで、$L(\xi) = |\mathcal{L}(\xi)|^2$ である。$L(\xi)$ は実係数を持つ三角多項式であることから、次のように書ける。

$$L(\xi) = \ell_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\ell_n \mathrm{e}^{-i\xi}) + \ell_{-n}\mathrm{e}^{i\xi}) = \ell_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\ell_n \cos\xi$$

$\cos\xi = 1 - 2\sin^2\xi/2$ から、結局、多項式 $L(\xi)$ は $\sin^2/xi/2$ の多項式 $P(\sin^2\xi/2)$ として表されることがわかる。これより、

$$M_0(\xi) = \left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^{2N} P\left(\sin^2\frac{\xi}{2}\right)$$

条件 (9.7) を次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} 1 &= M_0(\xi) + M_0(\xi+\pi) \\ &= \left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^{2N} P\left(\sin^2\frac{\xi}{2}\right) + \left(\cos\frac{\xi+\pi}{2}\right)^{2N} P\left(\sin^2\frac{\xi+\pi}{2}\right) \\ &= \left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^{2N} P\left(\sin^2\frac{\xi}{2}\right) + \left(\sin\frac{\xi}{2}\right)^{2N} P\left(\cos^2\frac{\xi}{2}\right). \end{aligned}$$

$y = \sin^2\xi/2$ とおいて書き換えると、次の **Daubechies の多項式関係**を得る。

$$(1-y)^N P(y) + y^N P(1-y) = 1. \tag{9.14}$$

この関係式は $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1$（式 (9.7)）に相当する。すべての ξ について $0 \leqq \sin^2\xi/2 \leqq 1$ であることから多項式 P は次の条件を満たしている。

$$P(y) \geqq 0, \qquad 0 \leqq y \leqq 1. \tag{9.15}$$

こうして、多重解像度解析をもたらすスケーリング関数 ϕ とそれから導かれるウェーブレット関数 ψ の構成は式 (9.14) および式 (9.15) を満たす多項式 $P(y)$ を解く問題に帰着することができた[*1]。これが Daubechies の発見である [8]。

[*1] 厳密には $P(y)$ は $|m_0(\xi)|^2$ を特徴づけているのであるあるが、スケーリング関係を導く m_0 が構成できる [9, 定理 6.3.6]。

9.5 Daubechies の多項式

2 項展開を利用して Daubechies の多項式が満たす関係式を確認しておこう。

補題 9.12 $N \geqq 1$ に対し $(N-1)$ 次の **Daubechies 多項式**を次で定義する。

$$P_{N-1}(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N-1}{k} y^k (1-y)^{N-1-k} \tag{9.16}$$

このとき、Daubechies 多項式は式 (9.14) の Daubechies の多項式関係を満たす。

$$1 = y^N P_{N-1}(1-y) + (1-y)^N P_{N-1}(y)$$

証明　$N \in \mathbb{N}$ を決めておいて次の等式に注意する。

$$\begin{aligned}
1 &= \Big((-y)+y\Big)^{2N-1} = \sum_{k=0}^{2N-1} \binom{2N-1}{k} (1-y)^k y^{2N-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N-1}{k} (1-y)^k y^{2N-1-k} + \sum_{k=N}^{2N-1} \binom{2N-1}{k} (1-y)^k y^{2N-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N-1}{k} (1-y)^k y^{2N-1-k} + \sum_{m=0}^{N-1} \binom{2N-1}{m} (1-y)^{2N-1-m} y^m \\
&= y^N \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N-1}{k} (1-y)^k y^{2N-1-k} + (1-y)^N \sum_{m=0}^{N-1} \binom{2N-1}{m} (1-y)^{N-1-m} y^m.
\end{aligned}$$

■

例 9.13

$$\begin{aligned}
N &= 1 \qquad P_0(y) = 1 \\
N &= 2 \qquad P_1(y) = 1 + 2y \\
N &= 3 \qquad P_2(y) = 1 + 3y + 6y^2 \\
N &= 4 \qquad P_3(y) = 1 + 4y + 10y^2 + 20y^3.
\end{aligned}$$

以下、第 9.5.1 節、第 9.5.2 節および第 9.5.3 節で見るように N を定めて Daubechies の多項式 $P_{N-1}(y)$ を求めておいて、定理 9.11 ゼロモーメント条件 (3) の式 (9.11)

$$\begin{aligned} m_0(\xi) &= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \mathrm{e}^{-ik\xi} \\ &= \left(\frac{1+\mathrm{e}^{-i\xi}}{2}\right)^N \mathcal{L}(\xi) \end{aligned} \tag{9.11$'$}$$

に返って、スケーリング係数 $\{p_k\}$ を求めることができる。式 (9.13)

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\xi)|^2 &= L(\xi) \\ &= P_{N-1}\left(\sin^2\frac{\xi}{2}\right) \end{aligned}$$

にあるように、$m_0(\xi)$ を求めるには因子化することが必要である。

こうして求めたスケーリング係数 $\{p_k\}$ からスケーリング関数 ϕ が決まり、さらにコンパクトサポートな連続関数としてそのウェーブレット ψ が

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k p^*_{1-k}\phi(2x-k)$$

と定めることができるというのが Daubechies の構成理論である。$P_{N-1}(y)$ のままで高次の N についてのスケーリング係数を直接求めることは難しくなる。このために $2N-1$ 次の多項式

$$P_{2N-1}(y)(1-y)^N P_{N-1}(y) \tag{9.17}$$

を使ってスペクトル因子法を使ってスケーリング係数を求める方法があるが、ここではこれ以上立ち入らない。

9.5.1　$N=1$

$P_0(y)=1$ より

$$|\mathcal{L}(\xi)|^2 = P_0\left(\sin^2\frac{\xi}{2}\right) = 1$$

から明らかなように

$$\mathcal{L}(\xi) = 1$$

である。したがって、

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1+\mathrm{e}^{-i\xi}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \mathrm{e}^{-ik\xi}$$

であるように $\{p_k\}$ を決めればよい。

$$p_k = \begin{cases} 1 & k = 0, 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

となって、例 9.9 で確認した Haar スケーリング関係が得られる。

9.5.2 $N = 2$

$P_1(y) = 1 + 2y$ から

$$|\mathcal{L}(\xi)|^2 = P_1\left(\sin^2\frac{\xi}{2}\right) = 1 + 2\sin^2\frac{\xi}{2} = 2 - \cos\xi.$$

三角多項式 $\mathcal{L}(\xi)$ を

$$\mathcal{L}(\xi) = a + b\mathrm{e}^{-i\xi}$$

の形で探してみる。

$$|\mathcal{L}(\xi)|^2 = (a^2 + b^2) + 2ab\cos\xi$$

であることより、

$$a^2 + b^2 = 2, \quad 2ab = -1$$

となる a, b を求めればよいことがわかる。$m_0(0) = \mathcal{L}(0) = 1$ から $a + b = 1$ となり、関係

$$\begin{aligned} &a + b = 1, \\ &a - b = \sqrt{3} \end{aligned}$$

が得られる。これより

$$a = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad b = \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

以上から、次を得る。

$$
\begin{aligned}
m_0(\xi) &= \left(\frac{1+\mathrm{e}^{-i\xi}}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} e^{-i\xi}\right) \\
&= \frac{1-\sqrt{3}}{8} + \frac{3-\sqrt{3}}{8}\mathrm{e}^{-i\xi} + \frac{3+\sqrt{3}}{8}\mathrm{e}^{-2i\xi} + \frac{1+\sqrt{3}}{8}\mathrm{e}^{-3i\xi} \\
&= \frac{1}{2}\sum p_k \mathrm{e}^{-ik\xi},
\end{aligned}
$$

係数を比較して

$$
p_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, p_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}, p_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}, p_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}
$$

が得られる。この結果は例 9.10 で取り上げたスケーリング関係である（図 9.1）。

9.5.3　$N = 3$

$P_2(y) = 1 + 3y + 6y^2$ から

$$
|\mathcal{L}(\xi)|^2 = P_2\left(\sin^2\frac{\xi}{2}\right) = 1 + 3\sin^2\frac{\xi}{2} + 6\sin^4\frac{\xi}{2} = \frac{19}{4} - \frac{9}{2}\cos\xi + \frac{3}{4}\cos 2\xi.
$$

三角多項式 $\mathcal{L}(\xi)$ を

$$
\mathcal{L}(\xi) = a + b\mathrm{e}^{-i\xi} + c\mathrm{e}^{-2i\xi}
$$

の形で探してみる。

$$
|\mathcal{L}(\xi)|^2 = (a^2+b^2+c^2) + (2ab+2bc)\cos\xi + 2ac\cos 2\xi
$$

であることより、

$$
a^2+b^2+c^2 = \frac{19}{4}, \quad 2ab+2bc = -\frac{9}{2}, \quad 2ac = \frac{3}{4}.
$$

となる $a, b.c$ を求めればよいことがわかる。

$$
(a-b+c)^2 = (a^2+b^2+c^2) - (2ab+2bc) = 2ac = 10
$$

さらに、$a+b+c=1$ および

$$
(a-b+c)^2 = (a-b+c-2b)^2 = (1-2b)^2
$$

から

$$b = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{10})$$

を得る。$b = (1 - \sqrt{10})/2$ を選ぶと

$$a + c = 1 - b = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{10}), \quad ac = \frac{3}{8}.$$

これを解いて

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{10} \pm \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right) \\
b &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{10}) \\
c &= \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{10} \mp \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right).
\end{aligned}$$

したがって

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + \mathrm{e}^{-i\xi}}{2}\right)^3 \left(a + b\mathrm{e}^{-i\xi} + c\mathrm{e}^{-i3\xi}\right)$$

の係数を比較して、次のスケーリング係数を得る。

$$\begin{aligned}
p_0 &= \frac{1}{16}\left(1 + \sqrt{10} \pm \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right) \\
p_1 &= \frac{1}{32}\left(5 + \sqrt{10} \pm 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right) \\
p_2 &= \frac{1}{8}\left(5 - \sqrt{10} \pm \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right) \\
p_3 &= \frac{1}{8}\left(5 - \sqrt{10} \mp \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right) \\
p_4 &= \frac{1}{16}\left(5 + \sqrt{10} \mp 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right) \\
p_5 &= \frac{1}{16}\left(1 + \sqrt{10} \mp \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right).
\end{aligned}$$

参考文献

[1] 新井 仁之『ウェーブレット』 (共立叢書 現代数学の潮流) 、 共立出版 (2010).

[2] イヴェス・ニイベルゲルト『ウェーブレット変換の基礎』、 森北出版 (2004).

[3] G.G. ウォルター『ウェーヴレットと直交関数系』(数理科学セミナー)、東京電機大学出版局 (2001)

[4] 猪狩惺 『フーリエ級数』、岩波全書 (1975).

[5] クーラン=ヒルベルト『物理数学の方法』、丸善出版 (2013)、東京図書 (1985)

[6] 齊藤正彦,『線形代数入門』, 東大出版会 (1966). 佐武一郎,『線形代数』, 裳華房 (1974).

[7] L. シュワルツ 『物理数学の方法』、岩波書店（1966）.

[8] I.Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl.Math. 41(1988) pp.909–996.

[9] I. ドブシー『ウェーブレット 10 講』、丸善出版 (2012).

[10] 中村郁,『線形代数学』、数学書房 (2007). 滝口孝志, 「CT と線型代数」、『数学のたのしみ フォーラム 逆問題の広がり』、日本評論社 (2007).

[11] ディラック,『量子力学』（朝永・玉木・木庭・大塚訳）、岩波書店（1968）

[12] 並木美喜雄,『デルタ関数と微分方程式』、岩波書店 (1982, オンデマンド 2016)

[13] ヘルナンデス・ワイス,『ウェーブレットの基礎』、科学技術出版 (1999).

[14] F.W.Byron,Jr. and R.W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, Dover(1992).

[15] A. Boggess and F. J. Narcowich, *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*(2nd edt), Wiley(2009).

[16] Michael W. Frazier, *An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra*, Springer(1999).

[17] Christopher Heil and David F. Walnut(eds), *Fundamental Papers in Wavelet Theory*, Princeton University Press(2006).

[18] M.J. Lighthill, *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge Monographs on Mechanics(1958).

[19] Stéphane Mallat, *A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation*, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence **11**(1989) pp.674–693.

[20] Stéphane Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing, The Sparse Way* (3rd ed.), Academic Press(2008).

[21] Amir-Homayoon Najmi, *Wavelets, A Concise Guide*, John Hopkikins Univ. Press(2012).

[22] Athanasios Papoulis, *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw-Hill(1962).

[23] James S. Walker, *A Primer on Wavelets and Their Scientific Applications*(2nd edt), Chapman and Hall(2008).

[24] David F. Walnut, *An Introduction to Wavelet Analysis*, Birkhaeuser(2001).