# 2013 年度　春休み第 1 週用　角田ゼミ 2 年宿題・復習プリント

- ここでしっかりと振り返って，習ったことを確かなものにしておきましょう．
- 各問題の (1) から (8) までは，計算中心の簡単なものにしています．**できたからといって安心しないで，その裏付けとなる理論や概念の理解に努めましょう．**
- 私のプリントには索引がありません．プリントの該当ページを知りたければ，(i) 目次を参考にするか，(ii)PC を横に置いて，私の HP の数学のページの PDF を開いておくとよいでしょう．後者については，Acrobat Reader の Ctrl+F や Ctrl+Shift+F　によって検索ができます．それを駆使して該当のページを参考にするとよいでしょう．

## 1　次の問に答えなさい

- 以下の実数列 $a_n (n = 1, 2, \cdots)$ について，その極限値が存在するならば，その値を求めてください．発散する場合は，(i)$\infty$ に発散する・(ii)$-\infty$ に発散する・(iii) それ以外，を表記してください．

$$(1).\ a_n = n,\quad (2).\ a_n = 1/n,\quad (3).\ a_n = n - n^2,\quad (4).\ \sqrt{n}$$

$$(5).\ a_n = (-1)^n,\quad (6).\ a_n = (-1)^n/n,\quad (7).\ a_n = n(-1/2)^n,\quad (8).\ a_n = (3n-2)^n$$

- (9).　「実数列 $a_n$ が実数 $\alpha$ に収束する」ことの定義を，$\varepsilon - \delta$ 論法で示してください．
- (10).　「実数列 $a_n$ が $\infty$ に発散する」ことの定義を，$\varepsilon - \delta$ 論法で示してください．

## 2　次の数列の問題に答えなさい

- $a_n, b_n, c_n, d_n, x_n$ は実数列，$\alpha, \beta, a, b, c$ は実数とします．今

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta,\quad \lim_{n\to\infty} c_n = \infty,\quad \lim_{n\to\infty} d_n = -\infty$$

  を仮定する．以下の (1) から (8) の記述について，それぞれ，正しいと思えば○を，間違っていると思えば×をつけなさい．

$$(1).\ \lim_{n\to\infty} ca_n = c\alpha,\quad (2).\ \lim_{n\to\infty}(a\cdot a_n + b\cdot b_n) = a\cdot\alpha + b\cdot\beta$$

$$(3).\ \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta,\quad (4).\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta},\quad (5).\ \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n} = -1$$

  (6).　任意の $n$ について $b_n > a_n$ ならば，$\beta > \alpha$
  (7).　ある自然数 $n_0$ があって，$n \geq n_0$ ならば $x_n \geq c_n$ であるとき，$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$
  (8).　ある自然数 $n_0$ があって，$n \geq n_0$ ならば $x_n \leq d_n$ であるとき，$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$
- (9).　上の (1) から (8) で×を付けたものについては，反例をあげることによって，×が正しいことを示してください．
- (10).　上の (1) から (8) で○を付けたものについては，それを証明しなさい．

## 3 次の数列の問題に答えなさい

- 以下の実数列 $a_n (n = 1, 2, \cdots)$ について，上極限と下極限をそれぞれ求めてください．

$$(1).\ a_n = \frac{1}{n^2},\quad (2).\ a_n = \frac{100n}{n^2+1},\quad (3).\ a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & (n\text{ が奇数}) \\ -n & (n\text{ が偶数}) \end{cases} (4).\ a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & (n\text{ が奇数}) \\ n^2 - n & (n\text{ が偶数}) \end{cases}$$

- 以下の正項級数について，収束するか発散するかを，教えてください．

$$(5).\ \sum_{n=1}^{\infty} n,\quad (6).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},\quad (7).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3},\quad (8).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^5+4n+3}$$

- (9). 実数列の上極限と下極限というものは，何ですか．説明してください．
- (10). 数列が収束するかどうかを判定するのに，コーシー列というものがありました．「実数列 $a_n$ がコーシー列である」とはどのような意味ですか．説明してください．
- (11). $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ とすると，$A_n$ はコーシー列では無いので，発散します．それを説明してください．

## 4 次の導関数に関する問に答えなさい

- 次の 1 変数実数値関数 $f(x)$ の導関数を求めてください．定義域はできるだけ広くとるものとします．

$$(1).\ f(x) = x^2,\quad (2).\ f(x) = x^2 + 3x,\quad (3).\ f(x) = 3x^5 + 2x + 1,\quad (4).\ f(x) = x^{1000}$$

$$(5).\ f(x) = \frac{1}{x},\quad (6).\ f(x) = \frac{1}{x^3},\quad (7).\ f(x) = 6 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x},\quad (8).\ f(x) = 9x^{10} + x^3 - 8$$

- (9). $f(x)$ の導関数の定義式は何ですか．説明してください．

## 5 次の導関数に関する問に答えなさい

- 次の 1 変数実数値関数 $f(x)$ の導関数を求めてください．定義域はできるだけ広くとるものとします．

$$(1).\ f(x) = (x+3)^6,\quad (2).\ f(x) = (3x-7)^6,\quad (3).\ f(x) = x^{10}(2x+1)^8,\quad (4).\ f(x) = (x+3)^2(x+4)^5$$

$$(5).\ f(x) = \frac{1}{x^2+1},\quad (6).\ f(x) = \frac{1}{x^3+1},\quad (7).\ f(x) = 6 + \frac{5x}{x^2+2},\quad (8).\ f(x) = \frac{x}{(x+7)^3}$$

- (9). $f(x), g(x)$ がそれぞれ導関数を持つとき，積の公式

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

というものがありますね．どうしてそんな式が得られるのか，説明してください．

- (10). $y = f(u), u = g(x)$ として，合成関数の微分の公式を，定義その他を省略して書くと

$$\frac{dy}{dx} = \left.\frac{dy}{du}\right|_{u=g(x)} \cdot \frac{du}{dx}$$

もしくは，同じ意味で $y, u$ を書かなければ，

$$\{f \circ g(x)\}' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

と表されるはずですね．どうしてこの式が得られるのか，説明してください．

## 6 次の問に答えなさい

- 以下の $x$ の整級数について，その収束半径を求めなさい．

$$(1).\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\quad (2).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n,\quad (3).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3} x^n,\quad (4).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2} x^n,\quad (5).\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$(6).\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},\quad (7).\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},\quad (8).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$$

- (9). 収束半径とは何ですか．説明してください．

## 7 次の問に答えなさい

- 次の 1 変数実数値関数 $f(x)$ の導関数を求めなさい．

$$(1).\ f(x) = e^x,\quad (2).\ f(x) = \sin x,\quad (3).\ f(x) = \cos x,\quad (4).\ f(x) = \tan x,$$

$$(5).\ f(x) = \sin(3x+7),\quad (6).\ f(x) = \cos(2x-1),\quad (7).\ f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\quad (8).\ f(x) = \sqrt{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

- (9). $e^x$ は $\exp(x)$ で定義しましたが，$\exp(x)$ とはどのような式ですか．説明してください．
- (10). $\sin x$ は，どのような式によって定義されましたか．説明してください．
- (11). なぜ (1) の $f(x)$ の導関数がそのようになるのですか．それを説明してください．

## 8 グラフについての問題に答えなさい

- 次の 1 変数関数について，2 回微分までして増減表も書いたうえで，実数全体について $xy$ 平面に $y = f(x)$ のグラフを書いてください．定義域は，問題に ( ) があるものはその範囲で，それ以外は実数全体です．

$$(1).\ f(x) = x^3,\quad (2).\ f(x) = x^4 - x^2,\quad (3).\ f(x) = \frac{1}{x^2},\quad (4).\ f(x) = x - \sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

$$(5).\ f(x) = \sqrt{x} - x \quad (x \geq 0),\quad (6).\ f(x) = e^x - 1 - x - x^2/2$$

$$(7).\ f(x) = \tan x - x \quad (-\pi/2 < x < \pi/2),\quad (8).\ f(x) = e^{\sin x} \quad (0 \leq x \leq \pi/2)$$

- (9). 平均値の定理とはどのようなものですか．答えなさい．
- (10). $[a, b]$ で定義された実数値関数 $f(x)$ が，$(a, b)$ で微分可能で，かつ，任意の $x \in (a, b)$ で $f'(x) > 0$ のとき，$f(a) < f(b)$ であることを示しなさい[*1]．

[*1] これが言えるから，増減表を用いてグラフが書けるのです．

## 9 べき乗の積分と積分可能性

- 次の値を求めなさい．ただし存在しない場合は存在しないと書くこと．

$$(1).\ \int_0^1 x^3 dx,\quad (2).\ \int_0^2 x^5 dx,\quad (3).\ \int_2^6 \frac{dx}{x^2},\quad (4).\ \int_1^2 \frac{dx}{x^3}$$

$$(5).\ \int_{-2}^2 x^4 dx,\quad (6).\ \int_{-1}^1 x^3 dx,\quad (7).\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}, (8).\ \int_0^1 x^{100} dx$$

- (9). $f(x)$ は有界閉区間 $[a,b]$ で定義された有界関数としたとき，$f(x)$ がリーマン積分可能であるという定義を，書いてください．
- (10). $[a,b]$ で定義された関数 $f(x)$ が，単調増加ならば，$\int_a^b f(x)dx$ が存在することを証明してください．

## 10 積分計算と置換積分の復習

- 次の値を求めなさい．ただし $a$ は正の定数とします．

$$(1).\ \int_0^1 e^x dx,\quad (2).\ \int_0^{\pi/2} \sin x dx,\quad (3).\ \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+x^2} dx,\quad (4).\ \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$$

$$(5).\ \int_1^2 e^{3x} dx,\quad (6).\ \int_0^a (10x+1)^{100} dx,\quad (7).\ \int_0^1 e^{-ax} dx,\quad (8).\ \int_0^{\pi/200} \cos(100x+\pi) dx$$

- (9). 有界閉区間 $[a,b]$ で定義された $f(x)$ が，連続関数であることは，任意の $c \in [a,b]$ で，

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x-c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon)$$

  が成り立つことでした．では $f(x)$ が $[a,b]$ で一様連続であることを $\varepsilon - \delta$ 論法で書いてください．
- (10). $f(x)$ が有界閉区間 $[a,b]$ で一様連続のとき，$\int_a^b f(x)dx$ が存在することを示してください．
- (11). $f(x)$ が有界閉区間 $[a,b]$ で連続ならば，一様連続であることを示してください．

## 11 部分積分と広義積分の練習

- 次の値を求めなさい．ただし $a, b$ は正の定数とする．またヒントとして (2) の問題は $1 \cdot \ln x$ と考えると部分積分しやすい．(7) の答えは $\alpha > 0$ として，ガンマ関数 $\Gamma(\alpha)$ を $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ で定義するので，そのガンマ関数を使って答えること．

$$(1).\ \int_0^a xe^x dx,\quad (2).\ \int_1^a \ln x dx,\quad (3).\ \int_0^1 x\cos x dx,\quad (4).\ \int_0^1 x\sin x dx$$

$$(5).\ \int_0^\infty e^{-x/a}dx,\quad (6).\ \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2},\quad (7).\ \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x/b}dx$$

- (8).　$\alpha \geq 1$ とする．広義積分 $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ が収束するのはなぜでしょう．説明してください．
- (9).　2 実数 $\alpha > 0, \beta > 0$ のときに積分

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

を考える．これはベータ関数 $B(\alpha, \beta)$ と定義されています．$\alpha \geq 1$ かつ $\beta \geq 1$ ならば，被積分関数は $x \in [0, 1]$ で有界連続関数であるので積分可能なのは明らかです．では，$\alpha \geq 1, 0 < \beta < 1$ としたとき，この積分が広義積分可能となることを証明してください．

## 12 多変数の偏微分に関する問題を解きなさい

- $\boldsymbol{R}^2$ で定義された，以下の 2 変数実数値関数 $f(x, y)$ について，ヘッセ行列まで求め，極小値や極大値を求めなさい．

$$(1).\ f(x,y) = x^2 - y^2,\ (2).\ f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 4y^2,\ (3).\ f(x,y) = e^x\ln(y^2+1)$$

- $\boldsymbol{R}^3$ で定義された，以下の 3 変数実数値関数 $f(x, y, z)$ について，ヘッセ行列まで求め，極小値や極大値を求めなさい．

$$(4).\ f(x,y,z) = 10x^2 + 6y^2 + 15z^2 + 2xy + 6xz - 4zx,\ (5).\ f(x,y,z) = \frac{1}{1+x^2} - y^2 + e^{-z^2}$$

- (6).　上の (1) から (5) の中で，定義域全体で狭義凸関数であるものを，番号で答えなさい．
- (7).　上の (1) から (5) の中で，定義域全体で狭義凹関数であるものを，番号で答えなさい．
- (8).　上の (1) から (5) の中で，最大値が存在するものを，番号で答えなさい．
- (9).　$\boldsymbol{R}^N \to \boldsymbol{R}$ となる $f(\boldsymbol{x})$ を考える．$f(\boldsymbol{x})$ が定義域 $\boldsymbol{R}^N$ で狭義凸関数であるということを，式で表すと，どのようになりますか．それを示しなさい．
- (10).　$\boldsymbol{R}^N \to \boldsymbol{R}$ となる $f(\boldsymbol{x})$ が $C^2$ 級であるとする．このとき $f(\boldsymbol{x})$ が定義域 $\boldsymbol{R}^N$ で狭義凸関数であることは，ヘッセ行列式が何であることと同値でしょうか．それを答えなさい．