

# 行列と行列式

(c) 角田 保 (大東文化大学経済学部)

2014 年 12 月 12 日

- 目次に\*がついている節は、 $n$  次正方行列の行列式への定義の準備なので、細部にこだわらず軽く読んでくれればよい。
- 目次に\*\*がついている節はさらに高度なので、飛ばしても構わない。
- 参考文献リストは先に書いておいた。
- 索引はない。というのも PDF ファイルなので、Acrobat Reader ならば Ctrl と Shift を押しながら Enter すれば、検索ができるためである。それを利用するのがとても楽である。

## 目次

0	まえがき (ここだけですます調)	4
	<b>第 I 部 数ベクトルと行列計算の定義</b>	<b>6</b>
1	数ベクトルと行列の定義, および四則演算	6
1.1	数ベクトルと行列の定義 . . . . .	6
1.2	ベクトルの演算の定義 . . . . .	7
1.3	2 項ベクトルの応用: 平面ベクトル (1) . . . . .	9
1.4	行列の四則演算の定義 . . . . .	13
2	いろいろな行列	15
	<b>第 II 部 主に <math>2 \times 2</math> の行列までの計算</b>	<b>20</b>
3	2 次正方行列の行列式と逆行列	20
4	2 次正方行列のクラメールの公式	22
5	2 次正方行列の行列式の性質	23
6	$2 \times 2$ までの行列の積を, 分割した行列で積で表す	26
7	2 次正方行列の固有値と固有ベクトル	27

8	実ベクトルの内積とベクトルの大きさ	30
9	内積までの 2 項ベクトルの応用:平面ベクトル (2)	33
9.1	法線ベクトルと点と直線の距離	33
9.2	平面全体を 2 つのベクトルの線形結合で表せる場合と、表せない場合	34
9.3	2 項ベクトルの左から 2 次正方行列を掛けることと、行列式の関係	36
9.4	回転変換と三角関数の加法定理	38
9.5	線対称の点に移す変換を表す行列	40
10	2 次実正方行列の直交行列と三角化・対角化	41
11	2 次実正方行列の対角化の応用例	45
12	2 次実対称行列の性質	46
13	$n$ 次実正方行列による、2 次形式の定義	47
14	2 次実正方行列と 2 次形式	48
15	第 II 部の Scilab 実習	50
15.1	[ ] を用いて行列とベクトルの作成. 和と積	51
15.2	実行列の転置行列を返す' と, sqrt 関数・norm 関数	51
15.3	行列式 det 関数と逆行列 inv 関数	52
15.4	固有値と固有ベクトルを返す spec 関数と 10 章の実習	53
15.5	行列の全成分を表す「:」の利用	54
15.6	spec 関数と 12 章の実習	54
15.7	よく使われる関数 (1): eye,zeros,ones	55
15.8	よく使われる関数 (2): sum,mean	55
15.9	成分ごとの掛け算・割り算・べき乗:「.*」「./」「.^」の利用	56
15.10	等差数列を返す行ベクトル:「:」の利用	56
第 III 部 主に $2 \times 2$ までの複素行列の計算		57
16	複素数入門	57
16.1	複素数の定義と四則	57
16.2	実数での数直線と複素数での複素平面	58
16.3	複素平面と複素数の絶対値の定義	59
16.4	* 複素数係数の 2 次方程式の解と係数の関係	60
17	複素ベクトルのエルミート内積: 第 I 部・第 II 部の拡張	62
18	** ユニタリー行列と $2 \times 2$ の複素行列の三角化・対角化	64

19	第 III 部の Scilab 実習	67
19.1	随伴行列 (実行列なら転置行列) を返す' と, sqrt 関数・norm 関数	67
19.2	複素数でも, 固有値と固有ベクトルを返す spec 関数	68
第 IV 部 3 × 3 の行列を中心に		69
20	* 3 × 3 の行列の行列式はどうあるべきか	69
21	* 3 × 3 の連立方程式のクラメールの公式	71
22	** 3 × 3 の逆行列の式	73
23	* 3 × 3 の行列と 2 次形式	74
第 V 部 一般の $n$ 次正方行列を中心に		76
24	* 4 × 4 の行列の行列式はどうあるべきか	76
25	$n$ 次正方行列の行列式の定義の準備	77
26	$n$ 次正方行列の行列式	80
27	行列式の性質	85
28	$n$ 次正方行列について, 積の行列式 = 行列式の積 の証明	87
29	正方行列の余因子展開	89
30	余因子展開から逆行列とクラメールの公式へ	91
31	分割された行列と, 行列式・逆行列の表記	93
32	第 V 部の Scilab 実習	98
第 VI 部 1 次独立と行列の階数		103
33	ベクトルの 1 次独立と 1 次従属	103
34	基本行列・基本変形と, 逆行列	103
35	$n \times n$ の連立方程式を行変形のみで解く・逆行列の PC 計算	109
36	トレースの定義	111
37	第 VI 部の Scilab 実習	112

37.1	find 関数と sum 関数についての注意	113
37.2	基本変形とランクの復習	114
37.3	$n \times n$ の逆行列の PC 計算の復習	116
第 VII 部 固有値・対角化・三角化・2次形式		118
38	固有値・固有ベクトルと、対角化・三角化	118
39	2次形式	124
40	第 VII 部の Scilab 実習	128

## 0 まえがき (ここだけですます調)

この資料は、

- 大東文化大学経済学部 3 年生開講科目 (PC 経済分析 I,II) の参考資料.
- 大東文化大学経済学部角田ゼミ生新 3 年用の、復習と予習.
- 将来、本経済学部大学院生に対する簡単な数学プリント (math camp) への使用.

を全て兼ねたものです。講義するなら 90 分× 5~6 回の分量を意識しています。ですから、線形代数の浅いところ (具体的には、行列と行列式の演算) に絞って、説明します。それ以外の、部分ベクトル空間、底の変換、次元、ジョルダン標準形などは、参考文献を参考にしてください。

この資料の 1 つの目的は、 $2 \times 2$  の行列までについて、大がかりな理論なしに、計算によっていろいろな結果を出すことです。そのため第 II 部の  $2 \times 2$  の部分が結構な分量になっていますが、2 次方程式までしっかり勉強している人にとっては、第 II 部までは比較的簡単に読めることでしょう。特に第 II 部までの 4 割弱は、

1985 年に私が高 2 で学んだ「代数・幾何」の、行列や 1 次変換の部分

にあたり、その記憶を思い出しながら書きました。具体的には、

(1) 第 1 部での  $2 \times 2$  までの場合. (2) 第 3 節・第 4 節・第 7 節. (3) 第 8 節を  $n = 2$  で考えた場合. (4) 第 9 節.

よって、第 II 部までは、2015 年度以降の大学入学生が、自習するのにちょうどいい資料だと思います。

この資料は、参考文献にある齋藤正彦先生のあとがきにならって、

### 日本の学生の数理能力を底上げすること

を目指して書きました。2015 年以降では、高校のカリキュラムの変更により、理系の線形代数の講義内容は、大幅な変更を余儀なくされます。個人的には、講義内容も学生の理解度も大幅に低下することは明白です。それを防ぐために、すでに免疫のある文系大学所属の私が、時間 (と根性) を投入して、このような資料を作りました。線形代数で全く何やっているか分からない学生さんがいましたら、第 II 部まででも十分なので、一度見てほしいと思います。

さらに Scilab5.4.1 を使った実習もふんだんに盛り込みました。そのあたりは他とかなり違う特色があるでしょうし、Scilab の部分だけを自習してもかなり楽しめると思います。Scilab は、

[www.scilab.org](http://www.scilab.org)

から無料でダウンロードできますので、必ずダウンロードしてください。

#### 参考文献

- 齋藤正彦 (1966) 「線形代数学」, 東京大学出版会
- 佐武一郎 (1974) 「線形代数学」, 裳華房
- 川久保勝夫 (2010) 「線形代数学 (新装版)」, 日本評論社
- 長谷川 浩司 (2004) 「線形代数」, 日本評論社
- 小山昭雄 (2010) 「[新装版] 経済数学教室 第 1 巻・第 2 巻」, 岩波書店

齋藤と佐武は、私の学生時代でも定番のものでした。2つそろって、日本における線形代数学の教科書の父母のようなものです。が、現代の文系の学生が独学で読むのは難しいでしょう。川久保の第1版は、私が大学に勤める少し前に出たものです。新装版は誤植もずいぶん減って、かなりわかりやすく書かれていると思います。長谷川は、私が大学に勤めてから出たものです。簡素ですが、定評のあるものです。小山は旧版はもっと前に出たものです。経済学でよく使うラグランジアンに関する行列への対処など、経済学への応用を考えたものとなっています。

どれをとっても、このレジユメのレベルをはるかに超えるものですから、このレジユメを軽く読むことが、上記参考文献への橋渡しとなることでしょう。

## 第 I 部

## 数ベクトルと行列計算の定義

$a, b$  が実数で,  $x$  に関する 1 次方程式

$$ax = b \quad (0.1)$$

は,  $a \neq 0$  のとき  $x = \frac{b}{a} = a^{-1}b$  という一意な解をもつことは, 中学校 1 年生で学んだ. また  $a^{-1}$  を  $a$  の逆数といった. そこで  $x, y$  に関する連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

も,

$$Ax = b$$

と表すことができたりすると便利であり, さらに (0.1) 式の 1 次方程式の解での  $a \neq 0$  のように,  $A$  に何らかの条件をつけるにしても,

$$x = A^{-1}b$$

と書けるととても便利であろう\*1.

そのような計算ができるように, 数ベクトルや行列を定義し, 計算も定義する.

またこのレジュメでは, 文字

$$l, m, n, k$$

は, 全て正の整数を表すとする.

## 1 数ベクトルと行列の定義, および四則演算

## 1.1 数ベクトルと行列の定義

数を縦に並べたものを, 列ベクトルという. 数を横に並べたものを, 行ベクトルという\*2.

$$(1). \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (2). (1 \ 0),$$

で, (1) は, 3 項列ベクトル・成分 3 個の列ベクトル・長さ 3 の列ベクトル, などという. 同様に, (2) は, 2 項行ベクトル・成分 2 個の行ベクトル・長さ 2 の行ベクトル, などという. ベクトルの中身の数字を, 成分とか要素などという. 例えば,

$$b = (0 \ -3)$$

のとき,  $b$  の第 1 成分は 0 で, 第 2 成分は  $-3$  である.

\*1 ところで今は太字  $x, b$  を使っているので, 細字の  $x, b$  とは違うことを認識しておいてほしい.

\*2 数と単に書いたのだが, この数とは, そして数ベクトルの理論とは複素数の範囲まで成り立つことであることがほとんどである. が, これは入門的なものなので, 固有値と固有ベクトルの章のみ複素数を扱うこととし, それ以外は全て, 実数を表すこととする.

次に行列について定義しよう。数を縦横に長方形になるように並べたものを行列という。

$$(3). \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad (4). \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) は 2 行 3 列の行列といい, (4) は 2 行 2 列の行列である。行数と列数が同じものを正方行列という。よって上記 (4) のことを, 2 次正方行列ともいう。

数ベクトルや行列は  $\mathbf{a}$  や  $\mathbf{B}$  のように, 太字で表すことが一般的である (そうでない本もあるが)。またベクトルは小文字で, 行列は大文字になっていることも多い。

行列の成分の表示方法については,  $\mathbf{A}$  が  $m$  行  $n$  列のとき,  $\mathbf{A}$  の  $i$  行  $j$  列の値を,  $\mathbf{A}$  の  $(i, j)$  成分といい,  $a_{ij}$  で表すことがほとんどである。あらわに書いてみると,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

である。  $a_{11}$  で  $\mathbf{A}$  の「じゅういち」成分とは読まないようにすること。十一ではなくて, (1,1) 成分である。発音では略語的に「いちいち」成分とも読む人もいる。あくまでも  $a$  行数列数 と, 行数と列数をそのまま並べたものである。

行列  $\mathbf{A}$  について, その行と列をひっくり返したものを  $\mathbf{A}$  の転置行列といい,  ${}^t\mathbf{A}, \mathbf{A}^T, \mathbf{A}'$  などで表す。つまり,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \implies {}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

である。日本の線形代数の本では  ${}^t\mathbf{A}$  を使うことが多く, 米国の計量経済学の本などでは  $\mathbf{A}'$  などを使うことが多い。このレジュメでは  ${}^t\mathbf{A}$  で表すことにする。

## 1.2 ベクトルの演算の定義

「数ベクトル」とわざわざベクトルというものに「数」という言葉を付けている。それは, ベクトルというものにはいろいろなものがあるが, 数ベクトルとは, その中の一部のものであることを意味している。そこで, ベクトル空間  $V$  というものがどういうものであるかと, それに合わせて数ベクトルの計算の定義をここで行う。ベクトル空間の満たす条件は以下の 8 つである。その条件を示した後, それぞれについて, 数ベクトル  $\mathbf{a}$  についての計算が, その条件を満たしていることを確認してほしい。

(i). (交換法則) 任意の  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  について,  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$  かつ  $\mathbf{v} + \mathbf{u} \in V$  が成り立ち, かつ

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

- 数ベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  を考えよう。この 2 つが同じサイズのベクトルのとき,  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  ということは, 各成分がそれぞれ等しいことを意味するように定義する。そして和  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  を計算可能とし, その計算方法は, 成分ごとの和と定義する。例えば, 2 つの  $n$  項列ベクトルの場合

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

等号については,

$$\begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_n = b_n \end{cases}$$

和の計算については,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

である.

$n$  項行ベクトルの場合も同様に定義できる. つまり,

$$\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n), \quad \mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n)$$

として, 等号については,

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \iff a_1 = b_1, \ a_2 = b_2, \ \cdots, \ a_n = b_n$$

であり, 和の計算については,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1 \ a_2 + b_2 \ \cdots \ a_n + b_n)$$

である. 同じサイズの数ベクトルについては, このようにそれぞれの成分の和として定義するので, 交換法則  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  も成り立っていることがわかる.

(ii). (結合法則) 任意の  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  について, 以下が成り立つ.

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

- 数ベクトルの場合, (i) のように和の計算を定義したので, この交換法則が成り立つ.

(iii). (加法のゼロ元) 任意の  $\mathbf{v} \in V$  について, 以下を満たす  $\mathbf{0} \in V$  が唯一存在する.

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

- 数ベクトルの場合, 定義した数ベクトル  $\mathbf{a}$  と同じサイズで, 成分が全て 0 であるベクトルをゼロベクトル  $\mathbf{0}$  と定義することにより, これが数ベクトルの場合の加法のゼロ元となる.

(iv). (加法の逆元) 任意の  $\mathbf{u} \in V$  について, 以下を満たす  $\mathbf{v} \in V$  が必ず唯一存在し, それを  $-\mathbf{u}$  と表す.

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

- 数ベクトルの場合,  $\mathbf{a}$  の成分を全て  $-1$  倍したものを  $-\mathbf{a}$  としている. すると上記の逆元の条件を満たす.

(v). (スカラー倍) スカラーというものがあその集合を  $K$  とする, 任意の  $\mathbf{v} \in V$ , 任意のスカラー  $c \in K$  について, 以下が成り立つ.

$$c\mathbf{v} \in V$$

- 数ベクトルの場合は、 $K$  としてスカラーは実数の集合  $\mathbf{R}$  や、複素数の集合  $\mathbf{C}$  にすることが多い。  
1.1 節で述べたように今は実数の集合  $\mathbf{R}$  で定義しておく。数ベクトル  $\mathbf{a}$  について、 $c\mathbf{a}$  を以下のよう  
にして、それぞれの成分に  $c$  を掛けることと定義する。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \implies c\mathbf{a} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_n \end{pmatrix}$$

これによって、スカラー倍の条件を満たすこととなる。

- (vi). (スカラーの交換法則) 任意の  $\mathbf{v} \in V$  と、2つの任意のスカラー  $c, d$  について、

$$(c + d)\mathbf{v} = c\mathbf{v} + d\mathbf{v}$$

- 数ベクトルの場合は、スカラー倍で定義した積の方法から、これが成り立つようになっている。

- (vii). (ベクトルの交換法則) 2つの任意の  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  と、任意のスカラー  $c$  について、

$$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$$

- 数ベクトルの場合は、スカラー倍で定義した積の方法から、これが成り立つようになっている。

- (viii). (積の単位元) 任意の  $\mathbf{v} \in V$  について、以下を満たすスカラー  $1$  が唯一存在する。

$$\mathbf{v} = 1\mathbf{v}$$

- 数ベクトルの場合は、実数の  $1$  を考えることによって、任意の数ベクトル  $\mathbf{a}$  について

$$\mathbf{a} = 1\mathbf{a}$$

が成り立つ。

以上から、ベクトル空間の満たすべき条件は 8 つあるが、現時点では特に覚えなくともよい。さらに言えば、数ベクトルの計算方法としては、

(i) の成分ごとの足し算と、(v) のスカラー倍の計算の 2 つをマスターすれば十分である。

それ以外は、(i)(v) の計算ができれば自由に得られる。とにかく、まずはこの 2 つをきちんと計算できるようにしておくことを目標にするとよい。そのために、中学や高校で学んだ  $xy$  平面上の点を、ベクトルで表すことを紹介しよう。

### 1.3 2 項ベクトルの応用: 平面ベクトル (1)

$xy$  平面上の座標を  $(x, y)$  とおく。点  $A(x_1, y_1)$  から点  $B(x_2, y_2)$  を結ぶ直線の傾きを、 $x_1 \neq x_2$  のとき

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1.2}$$

とあらわしたのは、中学校のときである。そしてこれを利用して、2点  $A, B$  を通る直線は、

$$\begin{cases} y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 & (x_2 \neq x_1 \text{ のとき}) \\ x = x_1 & (x_2 = x_1 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{1.3}$$

とあらわしたことも思い出してほしい。そしてこれをもう少し考えよう。

傾きを表す (1.2) 式の意味は、

$$\frac{A \text{ から } B \text{ への } y \text{ 軸方向への増分}}{A \text{ から } B \text{ への } x \text{ 軸方向への増分}}$$

である。よって分数にしないで、

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} A \text{ から } B \text{ への } x \text{ 軸方向への増分} \\ A \text{ から } B \text{ への } y \text{ 軸方向への増分} \end{pmatrix}$$

という 2 項実列ベクトルで表すと便利であろう。というのも

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} O \text{ から } A \text{ への } x \text{ 軸方向への増分} \\ O \text{ から } A \text{ への } y \text{ 軸方向への増分} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

と、座標を単純に列ベクトル化すればよいだけだからである。さらに言えば、数ベクトルの和を前節で定義したから、

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

が成り立つ。実際、

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

が成り立っていることがわかるであろう。いままで学んだことを簡単に定義すると以下である。

**定義 1.1**  $xy$  平面が与えられているとき、任意の点  $P(x_1, y_1)$  について、列ベクトル  $\overrightarrow{OP}$  を、座標を列ベクトル化したものとする。式で書くと、

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

である。またこれを  $P$  の位置ベクトルと呼ぶ。 」

位置ベクトルは小文字の太字でと表すことも多い。つまり、今の場合だと  $\overrightarrow{OP}$  を  $\mathbf{p}$  のように表す。さて座標を列ベクトルで表すと、ベクトルの和と定数倍という考え方から、任意の点  $(x, y)$  について、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表すことができる。右辺が  $x, y$  のままでは応用に欠けるので、実数  $s, t$  にしてみよう。

**命題 1.2**  $xy$  平面上の原点を  $O$  とする。任意の点  $P(x, y)$  の位置ベクトルは、

$$\overrightarrow{OP} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

によって、 $s, t$  によって一意に定められる。 」

**証明** 一意性だけは証明しておこう。

$$\overrightarrow{OP} = \begin{cases} s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ s' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

と  $s, t, s', t'$  によってあらわされたと仮定しよう。これが成り立つならば,

$$\begin{aligned} s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= s' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s' \\ t' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より,  $s' = s, t' = t$  が成り立つ。

□

命題 1.2 の形の  $s, t$  が実数上を自由に動くことによって,  $P$  が平面全体を表すのである。すると,  $s, t$  を制限すると,  $P$  の動く範囲も制限されるのは明らかであろう。

例題 1.3  $xy$  平面上の任意の点  $P(x, y)$  の位置ベクトルについて,

$$\overrightarrow{OP} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とあらわしたとき,  $s, t$  を以下に定めたときに,  $P$  がどのような範囲になるかを考えよ。

- (i).  $t = 0$
- (ii).  $s = 0$
- (iii).  $t = 0, s \geq 0$
- (iv).  $s = 0, t \geq 0$
- (v).  $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$
- (vi).  $0 \leq s \leq 1, t = 1 - s$

┘

(解答)

- (i).  $x$  軸上の点である。式で書くと,  $y = 0$ .
- (ii).  $y$  軸上の点となる。式で書くと,  $x = 0$ .
- (iii).  $x$  軸上の点で,  $O$  から  $x$  軸の正の方向への半直線となる。式で書くと,  $y = 0, x \geq 0$ .
- (iv).  $y$  軸上の点で,  $O$  から  $y$  軸の正の方向への半直線となる。式で書くと,  $x = 0, y \geq 0$ .
- (v).  $A(1, 0), B(0, 1), C(1, 1)$  とすると, 正方形  $OACB$  の内部と境界線を表す。
- (vi). (v) の  $A, B$  で, 線分  $AB$  上の点を表す。というのも  $t = 1 - s$  を代入すると  $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OB} + s \overrightarrow{BA}$  となる。  $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$  なので,  $\overrightarrow{BP} = s \overrightarrow{BA}$  となるため。

(解答終)

この (i) を考えてみよう。  $s$  が任意の時,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が, 直線  $y = 0$  を表すのである。  $0$  の代わりに  $a$  としよう。つまり

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

である ( $s$  は任意の実数).  $x = s, y = as$  だから,  $s$  を消去してなんと  $y = ax$  である. つまり上の式は, 原点  $O$  と点  $(1, a)$  を結ぶ直線となる. 傾き  $a$  で  $y$  切片が  $0$  の直線の式  $y = ax$  が (1.4) のように表されるのである.

ではさらに応用して,  $y = ax + b$  を考えてみよう. 上の式を  $y$  軸方向に  $b$  だけ進めればよいので,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

で表される. 和の順序を変えて, さらに傾き  $a$  だけでなく, 「 $x = \text{定数}$ 」という直線も含むような形で表すと, 以下がいえる.

**命題 1.4**  $xy$  平面上の異なる任意の 2 点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  について, 直線  $AB$  上の点  $P(x, y)$  は, 任意の実数  $t$  によって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

と表すことができる. 」

$s$  を  $t$  に変えたのは, 単に  $t$  を使う本が多いからである. このように表すことによって, (1.3) 式での  $x_1, x_2$  に関する条件を外すことができるのである.

さてこの節の最後に, 直線の方法ベクトルを定義しておこう. (1.3) 式のように, 場合分けするのは面倒である. そこで以下のように,  $xy$  平面上の直線は 1 つにまとめよう.

$$xy \text{ 平面上の直線は, } ax + by + c = 0 \quad (\text{ただし } a^2 + b^2 \neq 0) \quad (1.6)$$

実際  $b \neq 0$  ならば,  $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$  であり,  $b = 0$  ならば  $x = -\frac{c}{a}$  で表される. この直線の表現を用いて,

**定義 1.5** 実数  $a, b, c$  (ただし  $a^2 + b^2 \neq 0$ ) として,  $xy$  平面上の直線  $ax + by + c = 0$  が与えられたとき, この直線の方法ベクトルを,

$$s \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \quad (\text{ただし } s \neq 0)$$

とする. 」

実際この直線  $ax + by + c = 0$  が点  $A(x_1, y_1)$  を通るとき, 直線上の点を  $P(x, y)$  とすれば, 以下が成り立つ.

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \end{cases}$$

この式を辺々引いて移項すると,  $a(x - x_1) = -b(y - y_1)$  が成り立つ. よって任意の実数  $t, s$  (ただし  $s \neq 0$ ) によって,

$$\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} = ts \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

がいえるから,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} sb \\ -sa \end{pmatrix}$$

と書ける.

(1.5) 式の形から方向ベクトルは、あるベクトルの 0 以外の定数倍である。直線 (1.6) 式が与えられたとき、この直線の簡単な方向ベクトルの例としては、

$$\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

の 2 つがあげられる。これは単に、(1.5) 式に  $s = 1, -1$  を代入したものである。

さて平面上に直線が存在すれば、それと直交する直線も必ず存在する。その直交を考えるのみベクトルが非常に役立つのである。直交については、9.1 節で詳しく述べる。

#### 1.4 行列の四則演算の定義

行列が 1 行の場合は行ベクトルであり、行列が 1 列の場合は列ベクトルとなるので、それらの場合の計算も含むことを注意しておくこと。

- (i). (行列の加法)  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  が同じサイズ (行数・列数とも同じ場合) であるときのみ、各成分ごとに加えたものを  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  で表す。もちろん  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$  である。例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 30 \end{pmatrix}$$

である。異なるサイズの行列については、加法は計算不能である。

- (ii). (スカラー倍) 行列のスカラー倍の定義も、数ベクトルの場合と同様である。つまり、スカラーを行列の成分全てに掛けたものと定義する。任意の実数  $c$  について、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \implies c\mathbf{A} = \mathbf{A}c = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

- (iii). (行ベクトルと列ベクトルの積)  $n$  項行ベクトル  $\mathbf{a}$  と、 $n$  項列ベクトル  $\mathbf{b}$  の積は、対応する成分の積の和と定義する。つまり、

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^n a_ib_i$$

ここで、「行ベクトルと列ベクトルの積」というのがポイントである。和の場合と異なり、交換法則は成り立たない。

- (iv). (行列の積) この (iii) の「行ベクトルと列ベクトルの積」の計算方法を応用して、行列の積を定義しよう。 $\mathbf{A}$  は  $m$  行  $k$  列、 $\mathbf{B}$  は  $k$  行  $n$  列の行列とする。このとき、 $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  の積は計算可能で、 $\mathbf{AB}$  は  $m$  行  $n$  列の行列となる。そしてその各成分の計算方法については、 $\mathbf{AB}$  の  $(i, j)$  成分を

$$\mathbf{AB} \text{ の } (i, j) \text{ 成分} = (\mathbf{A} \text{ の第 } i \text{ 行}) \text{ と } (\mathbf{B} \text{ の第 } j \text{ 列}) \text{ の積}$$

とする。つまり  $\mathbf{AB}$  の計算については、 $\mathbf{A}$  は行ベクトルが縦に  $m$  個並んだもので、 $\mathbf{B}$  は列ベクトルが横に  $n$  個並んだものと考え、(iii) での行ベクトルと列ベクトルの積の計算を繰り返すのである。

ではそのように  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  をベクトルの塊とみて, 計算をみてみよう.  $\mathbf{a}_i (i = 1, 2, \dots, m)$  を  $k$  項行ベクトル,  $\mathbf{b}_j (j = 1, 2, \dots, n)$  を  $k$  項列ベクトルと考えて,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_j \ \cdots \ \mathbf{b}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_j & \cdots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_j & \cdots & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_i\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_i\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_i\mathbf{b}_j & \cdots & \mathbf{a}_i\mathbf{b}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_m\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_m\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m\mathbf{b}_j & \cdots & \mathbf{a}_m\mathbf{b}_n \end{pmatrix}$$

となるのである. また先に  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  の行数と列数についてそれぞれ,  $m$  行  $k$  列と  $k$  行  $n$  列と書いた. このように,  $\mathbf{A}$  の列数と  $\mathbf{B}$  の行数が一致するとき, そのときのみ  $\mathbf{AB}$  の計算が可能である.

上のように行列の積を一般形で書いたのだが, まずは 2 行 2 列までの計算に慣れることを目標としよう. ここで例示していこう.

(a) 行ベクトルと列ベクトルの積はもう定義した.

$$(a_1 \ a_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2$$

である.

(b) では,  $\mathbf{A}$  が 2 行 2 列で,  $\mathbf{b}$  が 2 行 1 列の列ベクトルのときを考えよう. この場合  $\mathbf{Ab}$  は計算可能で, 2 行 1 列の列ベクトルとなる. 成分で書くと,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \end{pmatrix}$$

である.

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{A} \text{ の第 1 行目} \text{ と } \mathbf{b} \text{ の積}) \\ (\mathbf{A} \text{ の第 2 行目} \text{ と } \mathbf{b} \text{ の積}) \end{pmatrix}$$

という 2 つの「行ベクトルと列ベクトルの積」の形になっていることがわかるであろう.

(c) 次に  $\mathbf{a}$  が 2 行 1 列の行ベクトルで,  $\mathbf{B}$  が 2 行 2 列の行列のとき考えよう. この場合  $\mathbf{aB}$  も計算可能で, 1 行 2 列の行ベクトルとなる. 成分で書くと,

$$(a_1 \ a_2) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = (a_1b_{11} + a_2b_{21} \quad a_1b_{12} + a_2b_{22})$$

である.

$$(\mathbf{a} \text{ と } \mathbf{B} \text{ の 1 列目} \text{ の積} \quad \mathbf{a} \text{ と } \mathbf{B} \text{ の 2 列目} \text{ の積})$$

という 2 つの「行ベクトル \* 列ベクトル」を計算していることがわかるであろう.

(d)  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  とも 2 次正方行列のときは  $\mathbf{AB}$  は計算可能で, やはり 2 次正方行列となる. 成分で表示すると,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

この 2 行 2 列の行列が,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \text{ の 1 行目と } \mathbf{B} \text{ の 1 列目の積} & \mathbf{A} \text{ の 1 行目と } \mathbf{B} \text{ の 2 列目の積} \\ \mathbf{A} \text{ の 2 行目と } \mathbf{B} \text{ の 1 列目の積} & \mathbf{A} \text{ の 2 行目と } \mathbf{B} \text{ の 2 列目の積} \end{pmatrix}$$

となっていることを, よく確認すること.

(e) 盲点になりやすいが,  $n$  項列ベクトルと  $n$  項行ベクトルの積も計算可能であり,  $n$  次正方行列となる.  $n = 2$  の場合で成分で書くと,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} (b_1 \ b_2) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

$A, B$  がともに  $n$  次正方行列であるならば,  $AB$  と  $BA$  の両方が計算可能である. このとき, 一般に,

$$AB \neq BA$$

であることに気を付けること. つまり一般に積の順序を入れ替えてはいけないのである. しかし次の場合のように, 順序を入れ替えなければ, 等号が成り立つ.

**定理 1.6** (行列の積の結合法則)  $A$  は  $m$  行  $n$  列,  $B$  は  $n$  行  $k$  列,  $C$  は  $k$  行  $l$  列とする. このとき以下が成り立つ.

$$(AB)C = A(BC)$$

┘

証明は簡単なのでしない. 行列の積の定義が, 面倒な形になっているのは, この定理が成り立つためでもある.

和と積を説明したので, それらを組み合わせた分配法則などを説明しよう.

**命題 1.7**  $A, A_1, A_2$  は  $m$  行  $k$  列,  $B, B_1, B_2$  は  $k$  行  $n$  列の行列とする. このとき以下が成り立つ.

- (i).  $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$
- (ii).  $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$
- (iii).  $B_1 = B_2 \implies AB_1 = AB_2$
- (iv).  $A_1 = A_2 \implies A_1B = A_2B$

┘

## 2 いろいろな行列

行列にもいろいろなものがあるので, それを紹介しよう. 以下の (i) から (viii) までの  $A$  は全て  $n$  次正方行列とする.

- (i). 全ての成分が 0 の行列をゼロ行列といい,  $O$  で表すことが一般的である.
- (ii).  $A$  の  $(i, i)$  成分 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) のことを, 対角成分という. それ以外の成分を, 非対角成分という.
- (iii). 対角成分が全て 1 で, 非対角成分が全て 0 の行列を  $n$  次単位行列という.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

などがその例である. (a) は 2 次の単位行列, (b) は 3 次の単位行列である. 単位行列は  $I$  や  $E$  で表すことが多い. このレジュメでは  $I$  と表す. また次数を明記したいときには, (a) では  $I_2$ , (b) では  $I_3$  のように  $I_n$  と書くこともある.

(iv).  ${}^t\mathbf{A} = \mathbf{A}$  となる行列  $\mathbf{A}$  を, 対称行列という.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 10 & -4 \end{pmatrix}$$

などがその一例である. 対角部分を境目にして線対称になっていることがわかるであろう.

(v).  $\mathbf{A}$  について,  $i > j$  となる  $(i, j)$  成分が全て 0 のとき,  $\mathbf{A}$  は上三角行列であるという.

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

などがその一例である. 対角部分より下側の成分が全て 0 であることに注目すること.

(vi).  $\mathbf{A}$  について,  $i < j$  となる  $(i, j)$  成分が全て 0 のとき,  $\mathbf{A}$  は下三角行列であるという.

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

などがその一例である. 対角部分の上側が全て 0 であることに注目すること.

(vii).  $\mathbf{A}\mathbf{A}$  を  $\mathbf{A}^2$  で表し, 一般に  $\mathbf{A}$  を  $n$  回掛けたものを  $\mathbf{A}^n$  で表す. そして

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$$

となる行列を, べき等行列という.  $\mathbf{A}$  がべき等行列ならば, 任意の正整数  $k$  について,  $\mathbf{A}^k = \mathbf{A}$  となる.

(viii). 各成分が全て 0 以上で, 各行の和がそれぞれ 1 になっているものを確率行列という.

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

などが一例である.

上三角行列では, 対角部分やその上方の数については, 何も条件は付けていないので, その中に 0 が含まれていても構わない. 下三角行列についても同様である.

練習 2.1  $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  が, 対称行列であり, 上三角行列であり, 下三角行列であり, べき等行列であり, 確率行列であることを確かめよ. 」

この練習問題から単位行列  $\mathbf{I}$  はかなり重要であることが示唆される. 実際次の命題が重要である.

命題 2.2  $\mathbf{I}$  が  $n$  次単位行列であるとする.  $\mathbf{A}$  は  $m$  行  $n$  列,  $\mathbf{B}$  は  $n$  行  $k$  列,  $\mathbf{C}$  は  $n$  次正方行列であるとす. このとき以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{I} &= \mathbf{A} \\ \mathbf{I}\mathbf{B} &= \mathbf{B} \\ \mathbf{C}\mathbf{I} &= \mathbf{I}\mathbf{C} = \mathbf{C} \end{aligned}$$

」

証明は簡単なのでしない。単位行列は積に関して、実数における  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$  のように、あたかも実数の 1 のような働きをする。ところで、実数  $a \neq 0$  のとき逆数を  $a^{-1}$  で表したから、それと同様に、逆行列というものを定義しよう。

定義 2.3  $A$  は  $n$  次正方行列とし、 $I$  は  $n$  次単位行列とする。このとき、

$$AB = BA = I$$

を満たす  $n$  次正方行列  $B$  が存在するならば、それを  $A$  の逆行列といい、 $A^{-1}$  で表す。 」

実数  $a$  について逆数は存在しない場合 ( $a = 0$ ) もあれば、存在する場合 ( $a \neq 0$ ) もあったが、存在する場合は必ず 1 つだった。逆行列も同様である。

命題 2.4  $n$  次正方行列  $A$  が逆行列を持つならば、それは 1 つのみである。 」

証明  $A$  の逆行列が  $B$  と  $C$  の 2 つあったと仮定する。

$$B = BI = BAC = (BA)C = IC = C$$

が成り立つので、 $B = C$  となる。 □

また逆行列をもつ行列を、正則行列 (regular matrix) といったり、可逆 (invertible) であるといったりする。逆行列は、実数  $x, y$  でいうところの、

$$xy = yx = 1 \implies y = x^{-1}$$

の類似である。一方で実数の性質で

$$「x = 0, \text{ または } y = 0」 \iff xy = 0$$

というものがあるが、この類似は、行列の積ではできない。

命題 2.5  $O_{m,n}$  は  $m$  行  $n$  列のゼロ行列とする。  $m$  行  $n$  列の行列  $A$  と、  $n$  行  $k$  列の行列  $B$  について、

(i).  $A = O_{m,n}$  または  $B = O_{n,k} \implies AB = O_{m,k}$

(ii).  $A = O_{m,n}$  または  $B = O_{n,k} \not\Leftarrow AB = O_{m,k}$

証明 (i) は明らかなので、省略する。(ii) については  $\Leftarrow$  が成り立たない例を挙げればよい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

とすると、 $AB = O_{2,2}$  が成り立つ。 □

特にこの (ii) は最初に学んだときには、すぐ忘れやすいので要注意である。さて逆行列に戻ろう。2 つの正則な行列の積も、正則である。

命題 2.6  $n$  次正方行列  $A, B$  がともに正則ならば,  $AB$  も正則であり,

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

証明 仮定より

$$\begin{aligned} (AB)B^{-1}A^{-1} &= A(BB^{-1})A \\ &= A^{-1}A \\ &= I \end{aligned}$$

が成り立つ. 同様に,  $ABB^{-1}A^{-1} = I$  も成り立つ. よって,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$$

なので, 逆行列の定義より,  $AB$  の逆行列は  $B^{-1}A^{-1}$  である. つまり

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

□

この式と似たようなものは, 行列の転置行列にもある. 単位行列以外であれば, 次の計算ができるようにしておいてほしい.

命題 2.7  $A$  は  $m$  行  $n$  列,  $B$  は  $n$  行  $k$  列とする. このとき以下が成り立つ.

$${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$$

」

転置行列と逆行列の関係では, 次のものが成り立つ.

命題 2.8  $n$  次正方行列  $A$  が正則であるとき, 以下が成り立つ.

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

」

証明 逆行列の定義より,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

これを全て転置させると, 前命題より

$${}^t(A^{-1}){}^tA = {}^tA{}^t(A^{-1}) = I$$

この式は,  ${}^tA$  の逆行列が  ${}^t(A^{-1})$  であることを表している. つまり,

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

□

逆行列と転置行列を組み合わせたようなものは, 以下の直交行列である.

定義 2.9  $n$  次実正方行列  $\mathbf{P}$  が以下を満たすとき,  $\mathbf{P}$  を直交行列という.

$${}^t\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{P}{}^t\mathbf{P} = \mathbf{I} \quad (2.1)$$

」

「実」とつけているので,  $\mathbf{P}$  の成分は実数のみを考えている. また逆関数の定義から, 直交行列の逆関数は必ず存在し,  $\mathbf{P}^{-1} = {}^t\mathbf{P}$  である.

では逆行列その他について, 具体的な計算を  $2 \times 2$  の場合について述べよう.

## 第 II 部

主に  $2 \times 2$  の行列までの計算

第 1 部で、行列の積や逆行列について定義した。ここでは主に  $2 \times 2$  の行列までについて、いろいろなことを説明する。ただし、8 章と 13 章では、一般の  $n$  次正方行列について、いくつか定義している。

## 3 2 次正方行列の行列式と逆行列

まず中学校の学んだ  $x, y$  についての連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

を考えてみよう。第 1 式を  $d$  倍し、第 2 式を  $b$  倍すると、

$$\begin{cases} adx + bdy = de \\ bcx + bdy = bf \end{cases}$$

第 1 式から第 2 式を辺々引くと、

$$(ad - bc)x = de - bf$$

が得られる。ここで、 $ad - bc \neq 0$  であれば、

$$x = \frac{de - bf}{ad - bc}$$

となり、これを第 1 式に代入して計算すると、

$$y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

が得られる。つまり  $ad - bc \neq 0$  のときは、 $x, y$  が解を 1 組のみ持つことと言えるのである。この  $ad - bc$  に注目して、逆行列を考えることにしよう。

上で書いたことをまとめると、 $ad - bc \neq 0$  とするとき、

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} de - bf \\ af - ce \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

(3.1) 式での  $\iff$  は、 $ad - bc$  の値にはかかわらず成り立つ。2 番目の、(3.1) 式と (3.2) 式を結ぶ  $\iff$  は、 $ad - bc \neq 0$  という条件があるため、成り立っている。

さて、(3.1) 式の右側と、(3.2) 式の最後の項を見れば、以下が簡単に言える。

**命題 3.1** 2 次正方行列  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  について、 $ad - bc \neq 0$  のとき逆行列  $\mathbf{A}^{-1}$  が存在し、

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で表される。 J

証明 以下の 2 つの式,

$$\mathbf{A} \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \mathbf{A}$$

をそれぞれ計算すると、ともに  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  となる。よって逆行列の定義から命題が成り立つ。  $\square$

(3.1) 式や (3.2) 式をみてまとめておこう。実数  $a, b, c, d, e, f$  について,  $x, y$  に関する連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

については,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

とすれば, 連立方程式を,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

とおくことができ, さらに  $ad - bc \neq 0$  のときは, この式の両辺に  $\mathbf{A}^{-1}$  を左から掛けることによって,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

とできる。これで第 1 部の最初に書いたことが達成されるのである。

練習 3.2 次の連立方程式を, 逆行列を用いて求めよ。ただし  $a, b, \theta$  は実数とする。

$$(1) \begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 4x + 5y = 18 \end{cases}, \quad (2) \begin{cases} x + 2y = 12 \\ 3x + 5y = 28 \end{cases}, \quad (3) \begin{cases} (a+1)x + by = 1 \\ bx - (a+1)y = 2 \end{cases}, \quad (4) \begin{cases} (\cos \theta)x - (\sin \theta)y = a \\ (\sin \theta)x + (\cos \theta)y = b \end{cases}$$

この練習問題でわかるように, 係数が実数ではなくて, 文字のときに, 逆行列のありがたみがわかるのである。

さて  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  のときに,  $ad - bc \neq 0$  ならば,  $\mathbf{A}^{-1}$  を持つことを示したわけであるが, では  $ad - bc = 0$  のときはどうなるのであろうか。それを示すのが以下の命題である。

命題 3.3  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  で,  $ad - bc = 0$  の場合は,  $\mathbf{A}$  は逆行列を持たない。  $\square$

証明 (i) まず, ある実数  $s, t$  (ただし  $s^2 + t^2 \neq 0$ ) が存在して

$$s \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

が成り立つことを, 以下 (ア)(イ)(ウ) で場合分けして証明する。

(ア)  $b \neq 0$  の場合:  $s = -1, t = a/b$  とすると, (3.4) 式が成り立つ。

(イ)  $b = 0$  かつ  $a = 0$  の場合:  $sc + td = 0$  を満たす  $s, t$  (ただし  $s^2 + t^2 \neq 0$ ) が必ず存在する。このような  $s, t$  をとることによって, (3.4) 式が成り立つ。

(ウ)  $b = 0$  かつ  $d = 0$  の場合:  $s = 0, t = 1$  をとると, (3.4) 式が成り立つ。

(ii) (3.4) 式を行列で表すと,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

である. ここで仮に  $\mathbf{A}$  が逆行列を持つと仮定しよう. すると (3.5) 式の両辺に,  $\mathbf{A}^{-1}$  を左側から掛けることによって,

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる. これは  $s, t$  が  $s = t = 0$  以外に存在するという (i) の結果に矛盾する. よって,  $\mathbf{A}$  は逆行列を持たない.

□

このように  $ad - bc$  の値が非 0 か 0 かによって, 逆行列を持つか, 持たないかが判別される. ある意味判別式となっているのである. そこで, この  $ad - bc$  の値を  $2 \times 2$  の場合の行列式と定義する.

定義 3.4 2 次正方行列  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  において,  $ad - bc$  を  $\mathbf{A}$  の行列式といい,

$$\det(\mathbf{A}), \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

などで表す.

□

$\det$  は determinant の略である. 行列式の役割は, 逆行列を持つか否かの判別式であること以外にも存在する. どのようなものかは, いずれ説明することになるであろう.

## 4 2 次正方行列のクラメールの公式

さて (3.1) 式と (3.2) 式を見てみよう.  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  で  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  のとき,  $x, y$  は以下のような行列式の比で表すことができる.

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{A})}, \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{A})}$$

となっていることを確認してほしい. つまり連立方程式を行列化したもの

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

( $\mathbf{A}, \mathbf{x}, \mathbf{b}$  は (3.3) 式と同じとする) について,  $\det(\mathbf{A}) = ad - bc \neq 0$  ならば,  $i = 1, 2$  について

$$\mathbf{x} \text{ の第 } i \text{ 成分} = \frac{\det(\mathbf{A} \text{ の } i \text{ 列目を } \mathbf{b} \text{ に変えた行列})}{\det(\mathbf{A})}$$

であらわされる. これを  $2 \times 2$  の場合のクラメールの公式という.  $3 \times 3$  や,  $n \times n$  の場合も後に示す.

文字のある連立方程式や, あとは 0 や 1 が多い場合の連立方程式はこのクラメールの公式を使うと簡単に解くことができる.

練習 4.1 以下の  $x, y$  に関する連立方程式を解け. (1) の  $a, b$  は  $a^2 + b^2 > 0$  とする. (2) の  $a, b$  は  $a^2 \neq b^2$  とする.

$$(1). \begin{cases} ax + by = 1 \\ -b + ay = 0 \end{cases}, \quad (2). \begin{cases} ax + by = 0 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

」

## 5 2 次正方行列の行列式の性質

積の行列式は, 行列式の積で表される.

定理 5.1  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  ともに, 2 次正方行列とする. このとき以下が成り立つ.

- (i).  $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$
- (ii).  $\det({}^t \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$

」

この証明は直接計算しても得られるのだが, 以下の定理 5.2 を性質を用いて, 後に証明する.

さて, この章でのこれからの性質は, 行列式の一般的な性質を示すための準備である. よって, この章の残りは軽く読み飛ばして次の章を読んでも構わない.

以下の性質については, 定理 5.1 よりももっと簡単に計算できるので, 証明はしない.

定理 5.2 (2 次正方行列の場合の行列式の基本的な性質)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  とする.  $c$  はある数とする.

- (i). 列を入れ替えた行列式は, もとの行列の行列式の  $-1$  倍となる. 行を入れ替えた行列式は, もとの行列の行列式の  $-1$  倍となる. つまり,

$$\det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix} = (-1) \det(\mathbf{A})$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = (-1) \det(\mathbf{A})$$

- (ii). 1 列目と 2 列目が等しいとき, 行列式は 0 である. 1 行目と 2 行目が等しいとき, 行列式は 0 である.
- (iii). ある列を  $c$  倍した行列の行列式は, 元の行列の行列式の  $c$  倍となる. ある行を  $c$  倍した行列の行列式は, 元の行列の行列式の  $c$  倍となる. つまり,

$$\det \begin{pmatrix} ca_{11} & a_{12} \\ ca_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & ca_{22} \end{pmatrix} = c \det(\mathbf{A})$$

$$\det \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{pmatrix} = c \det(\mathbf{A})$$

- (iv).  $\mathbf{A}$  のある列が全て 0 ならば,  $\det(\mathbf{A}) = 0$  である. 同様に,  $\mathbf{A}$  のある行が全て 0 ならば,  $\det(\mathbf{A}) = 0$  である.
- (v).  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  を 2 項列ベクトルとする.  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$  と表した時,

$$\det(\mathbf{b} + \mathbf{c} \quad \mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{b} \quad \mathbf{a}_2) + \det(\mathbf{c} \quad \mathbf{a}_2), \quad \det(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{b}) + \det(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{c})$$

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}_1 \\ {}^t\mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$  と表した時,

$$\det \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{b} + {}^t\mathbf{c} \\ {}^t\mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{a}_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{c} \\ {}^t\mathbf{a}_2 \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}_1 \\ {}^t\mathbf{b} + {}^t\mathbf{c} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}_1 \\ {}^t\mathbf{b} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}_1 \\ {}^t\mathbf{c} \end{pmatrix}$$

(vi).  $\mathbf{A}$  のある列に, 別の列を加えた行列の行列式は,  $\det(\mathbf{A})$  のまま変わらない. 同様に, ある行に, 別を加えた行列の行列式は, もとの行列の行列式  $\det(\mathbf{A})$  とは変わらない. 式で書くと,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + a_{22} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + a_{11} \\ a_{21} & a_{22} + a_{21} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A})$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + a_{11} & a_{22} + a_{12} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A})$$

この定理 5.2 の (i)~(iv) より, または, 直接行列式を計算することによって, 以下は簡単に言える.

系 5.3  $\mathbf{A}$  は 2 次正方行列とする.

- (i).  $\mathbf{A}$  のある行が, 別の行の定数倍ならば,  $\det(\mathbf{A}) = 0$  である.
- (ii).  $\mathbf{A}$  のある列が, 別の列の定数倍ならば,  $\det(\mathbf{A}) = 0$  である.

定理 5.2 の (v) をもう少し一般化しよう.

定理 5.4  $\mathbf{A}$  は, 定理 5.2 の行列とする.

- (i).  $\mathbf{A}$  の  $i$  行 ( $i = 1, 2$ ) に, 行ベクトル  $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2)$  を加えたものの行列の行列式は, それぞれ以下のよ  
うに表される.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + b_1 & a_{12} + b_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A}) + \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_1 & a_{22} + b_2 \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A}) + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

- (ii).  $\mathbf{A}$  の  $i$  列 ( $i = 1, 2$ ) に, ある列ベクトル  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  を加えたものの行列の行列式は, それぞれ以下のよ  
うに表される.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + b_1 & a_{12} \\ a_{21} + b_2 & a_{22} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A}) + \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + b_1 \\ a_{21} & a_{22} + b_2 \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A}) + \det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

証明は, 単に計算するだけで得られるので, 省略する. この定理 5.4 と系 5.3 から, 以下がいえる.

系 5.5  $\mathbf{A}$  は 2 次正方行列とし,  $c$  はある数とする. このとき以下が成り立つ.

- (i). ある行に, 別の行を  $c$  倍したものを加えたものの行列式は, もとの行列の行列式と変わらない.  
(ii). ある列に, 別の列を  $c$  倍したものを加えたものの行列式は, もとの行列の行列式と変わらない.

┘

証明 (i) について考える. 定理 5.2 の  $\mathbf{A}$  について, その 1 行目に, 2 行目の  $c$  倍を加えた行列を考えると,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} + ca_{21} & a_{12} + ca_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} ca_{21} & ca_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \det(\mathbf{A}) + c \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

2 行目の場合も同様. (ii) の場合も同様に得られる. □

もちろん直接,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} + ca_{21} & a_{12} + ca_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= (a_{11} + ca_{21})a_{22} - (a_{12} + ca_{22})a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} + ca_{21}a_{22} - a_{22}a_{21} - ca_{22}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

と計算してもよい. しかし 3 次以上の正方行列の場合を考えて, 直接計算しないですむ方法をとった.

いよいよこの性質を使って, 定理 5.1 を証明しよう. 以下の証明での各行の式変形において, 定理 5.4 のどの性質を使ったかを, 確認するとよい.

定理 5.1 の証明:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = (b_{11}\mathbf{a}_1 + b_{21}\mathbf{a}_2 \quad b_{12}\mathbf{a}_1 + b_{22}\mathbf{a}_2)$$

と表すことができる (上の式の最後の等号が成り立つことは次章を参照). よって,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB}) &= \det(b_{11}\mathbf{a}_1 + b_{21}\mathbf{a}_2 \quad b_{12}\mathbf{a}_1 + b_{22}\mathbf{a}_2) \\ &= \det(b_{11}\mathbf{a}_1 \quad b_{12}\mathbf{a}_1 + b_{22}\mathbf{a}_2) + \det(b_{21}\mathbf{a}_2 \quad b_{12}\mathbf{a}_1 + b_{22}\mathbf{a}_2) \\ &= b_{11} \det(\mathbf{a}_1 \quad b_{12}\mathbf{a}_1 + b_{22}\mathbf{a}_2) + b_{21} \det(\mathbf{a}_2 \quad b_{12}\mathbf{a}_1 + b_{22}\mathbf{a}_2) \\ &= \{b_{11}b_{12} \det(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_1) + b_{11}b_{22} \det(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2)\} + \{b_{21}b_{12} \det(\mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_1) + b_{21}b_{22} \det(\mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_2)\} \\ &= b_{11}b_{22} \det(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2) + b_{21}b_{12} \det(\mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_1) \\ &= b_{11}b_{22} \det(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2) - b_{21}b_{12} \det(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2) \\ &= (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) \det(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2) \\ &= \det(\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

□

## 6 $2 \times 2$ までの行列の積を，分割した行列で積で表す

前頁の定理 5.1 の証明では，行列  $A$  を 2 つの列ベクトルに分割してして考えた．それを一般的によく考えるのがこの章である．ではまず 2 次正方行列の積

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

についてここで考えよう．この左辺を，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$$

とする．すると，(6.1) 式は，

$$A (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2) \quad (6.2)$$

と表すことができる．この式はあたかも 1 行 1 列の行列と，1 行 2 列の行列の積のように見える．1 行 1 列  $\times$  1 行 2 列だと，1 行 2 列の行列ができるので，上のように行列を分割した場合，

$$A (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2) = (A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2) \quad (6.3)$$

が成り立っていると便利である．そして実際に成り立っていることは，

$$A\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \end{pmatrix}, \quad A\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

を横に並べたものが，(6.1) 式の右辺と一致していることからわかる．

では次に (6.1) 式の行列の積を，それぞれ 2 つのベクトルで表してみよう．以下の 4 通りの積が考えられる．太字は 2 項列ベクトルである．

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2), \quad \text{(ii)} (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \\ & \text{(iii)} (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2) (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2), \quad \text{(iv)} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(i) は，2 行 1 列と 1 行 2 列の行列の積に見え，(ii) は，1 行 2 列と 2 行 1 列の行列の積に見え，それぞれ計算可能である．それぞれ 2 行 2 列と 1 行 1 列となる．それぞれ書気表すと，

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)} (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2$$

となり，計算すれば，(6.1) 式の右辺と一致する．

しかし (iii) は 1 行 2 列  $\times$  1 行 2 列，(iv) は 2 行 1 列  $\times$  2 行 1 列のように見え，すると行列の積の計算の定義から計算不可能である．このように行列を分割するならば，分割した後に，積が計算できるように分割しなければならないことがわかる．

(6.1) 式の左辺の計算について，他の分割方法としては，定理 5.1 の証明でも書いたように，

$$\text{(v)} (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1b_{11} + \mathbf{a}_2b_{21} \quad \mathbf{a}_1b_{12} + \mathbf{a}_2b_{22})$$

$$(vi) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{b}_1 \\ {}^t\mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}{}^t\mathbf{b}_1 + a_{12}{}^t\mathbf{b}_2 \\ a_{21}{}^t\mathbf{b}_1 + a_{22}{}^t\mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$$

があげられる。一応説明すると、(v) は 1 行 2 列 × 2 行 2 列で、1 行 2 列のものが得られる。(vi) は 2 行 2 列 × 2 行 1 列なので、2 行 1 列のものができる。実際にそれぞれの右辺を計算すれば、(6.1) 式の右辺と一致するので、この表記が正しいことがわかる。

また (v) で  $b_{11} = \lambda_1, b_{12} = b_{21} = 0, b_{22} = \lambda_2$  の場合で、左右逆にした表記

$$(\lambda_1 \mathbf{a}_1 \quad \lambda_2 \mathbf{a}_2) = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

が成り立つ。これは 10 章で多用する。

今までの 2 次正方行列の積の説明から、2 次正方行列と 2 行 1 列のベクトルの積は、

$$\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}_1 \\ {}^t\mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}_1 \mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{a}_2 \mathbf{b} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \mathbf{a}_1 b_1 + \mathbf{a}_2 b_2$$

などのように表せる。1 行 2 列と 2 次正方行列の積も、うまく分割して積が計算できる。

## 7 2 次正方行列の固有値と固有ベクトル

$y, x, a, t$  を実数とする。小学校以来で、 $xy$  平面に  $y = ax$  というグラフを何回も書いてきたことであろう。 $x, y$  の間に  $y = ax$  という関係があるとき、 $x$  を  $t$  倍すると、 $y$  が  $at$  倍となるのは明らかだろう。

さて行列も似たように、2 次正方行列  $\mathbf{A}$  が与えられた時に、

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

となる、2 項列ベクトル  $\mathbf{x}$  (ただし  $\mathbf{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ) と、実数  $\lambda$  が存在すれば、 $\mathbf{x}$  を  $t$  倍したものは、 $\mathbf{A}\mathbf{x}$  を  $\lambda t$  倍したものと一致する。このような  $\lambda$  と  $\mathbf{x}$  を計算することによって、 $\mathbf{A}$  の  $n$  乗の計算など、いろいろな計算をすることができる。

ところで、2 項ゼロベクトルを  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  と書くのは面倒なので、この章では、 $\mathbf{0}$  と書くことにしよう。

**定義 7.1**  $\mathbf{A}$  を 2 次正方行列とする。このとき、

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

を満たす実数  $\lambda$  と 2 項列ベクトル  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  が存在するとき、 $\lambda$  を  $\mathbf{A}$  の固有値といい、 $\mathbf{x}$  を  $\mathbf{A}$  の  $\lambda$  に関する固有ベクトルという。 ┘

$\mathbf{A}$  の各成分が全て実数であるときでも、 $\lambda$  が実数になるとは限らない。 $\lambda$  の範囲を実数までにするのか、複素数 (複素数は第 III 部に簡単に解説してある) まで含むのかによって、固有値を持つかどうかの判断が分かれる場合が存在する。それは複素数を使った行列の章で詳述するので、今は先に進むことにしよう。

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  とするとき、

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} &\iff (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ &\iff \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.1)$$

さて上の式を満たすような  $x_1, x_2$  (ただし  $x_1 = x_2 = 0$  以外のもの) が存在するためには,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (7.2)$$

が, 必要十分条件である. これを展開して  $\lambda$  の式にまとめた,

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \quad (7.3)$$

が重要なものである.

**定義 7.2**  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  のとき,

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

を固有多項式といい, (7.3) 式を,  $\mathbf{A}$  の固有方程式という. ┘

注意: 固有値を求めたい場合は,  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$  でも  $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$  でもどちらでもよい. 計算自体は  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$  の方が, (7.2) 式のように,  $\mathbf{A}$  の対角部分を  $\lambda$  で引くだけなので簡単に書けるし, 手計算のミスも少ない. 固有多項式の定義についても, 2 次の場合なら  $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$  でも  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$  でも同じである. しかし 2 次正方行列ではなくて,  $n$  次正方行列の固有多項式を考えたとき,  $\lambda$  の  $n$  乗の係数を正にしたいので, 固有多項式を上のように  $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$  で定義する.

(注意終)

(7.3) 式の固有方程式は 2 次方程式だから, 簡単に計算できるであろう. そこで  $\lambda$  が  $\lambda_1, \lambda_2$  という実数解を持つとしよう. もし重解 (以下重複解と書く) をもつ場合は, つまり  $(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$  の場合であるが, このときは  $\lambda_1 = \lambda_2$  と考える.

次に各  $\lambda_1, \lambda_2$  について, 固有ベクトルを求める方法を述べよう.  $\lambda_i$  に関する固有ベクトルの求め方は,  $\lambda_i$  をもとの (7.1) 式に代入した式

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす  $x_1, x_2$  (ただし  $x_1 = x_2 = 0$  以外のもの) を求めればよい. 連立方程式として考えれば

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_i)x_2 = 0 \end{cases}$$

の 2 本の式がある. 多くの場合には以下の (i) か (ii) の簡単な方によって,  $\lambda_i$  の固有ベクトルを求めることができる. 両方の条件に合わない場合は (iii) を行えばよい.

(i).  $(a_{11} - \lambda_i)$  と  $a_{12}$  のどちらかが非 0 であれば,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_i \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} a_{12} \\ -a_{11} + \lambda_i \end{pmatrix}$$

が  $\lambda_i$  の固有ベクトル (の 1 つ) となる.

(ii).  $a_{21}$  と  $(a_{22} - \lambda_i)$  のどちらかが非 0 であれば,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_i \\ -a_{21} \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} -a_{22} + \lambda_i \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

が,  $\lambda_i$  の固有ベクトル (の 1 つ) となる.

(iii). (i)(ii) のどちらでもないということは,  $\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i \end{pmatrix}$  がゼロ行列のときである. この場合は,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  や,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  が  $\lambda_i$  の固有ベクトル (の 1 つ) となる.

固有ベクトルの「1つ」と書いたのは, 固有ベクトルが1つあれば, その  $c$  倍 (ただし  $c \neq 0$ ) も固有ベクトルとなるためである. Scilab をはじめとして, PC ソフトに, ある行列の固有値と固有ベクトルを求めさせると, 固有ベクトルの大きさ (ベクトルの大きさは  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  のことで定義 8.1 参照のこと) を 1 にしたもの (これを「固有ベクトルの基準化」という) が返ってくる.

例題 7.3  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$  とするとき,  $A$  の固有値と固有ベクトルを求めよ. 」

(解答) まず固有方程式を解く.

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (2+4)\lambda + (2 \cdot 4 - 5 \cdot 3) &= 0 \\ \lambda^2 - 6\lambda - 7 &= 0 \\ (\lambda+1)(\lambda-7) &= 0 \\ \lambda &= -1, 7 \end{aligned}$$

(i).  $\lambda = -1$  のときの固有ベクトルを求める.

$$\begin{pmatrix} 2 - (-1) & 3 \\ 5 & 4 - (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

を考えると,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

が固有ベクトルの 1 つである.

(ii).  $\lambda = 7$  のときの固有ベクトルを求める.

$$\begin{pmatrix} 2 - 7 & 3 \\ 5 & 4 - 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

を考えると,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

が固有ベクトルの 1 つである.

(解答終)

この解き方は前頁の説明の (i) 番に書いた通りに忠実に解いたわけである. しかし例えば, (7.4) 式などは,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と同値であるから,  $\lambda = -1$  のときの固有ベクトルの 1 つを  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  としてもよい. ベクトルの大きさを 1 とするのであれば,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

としてもよい.

例題 7.4 この  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$  の固有値と固有ベクトルを, Scilab で求めたい. 関数 spec を用いて求めよ. 」

(解答)

以下のように打ち込むことによって得られる.

```
A=[2 3; 5 4]
```

```
[P,Lam]=spec(A)
```

A,P,Lam は私が決めた変数名なので, 別に何に変えても構わない. Lam とつけたのは, 固有値行列 (ラムダ) の頭文字 3 つである. P とつけたのも, 一般に固有ベクトルを結合したものを P とすることが多いためである.

spec 関数によって, Lam は 2 行 2 列の対角行列であり, 2 つの対角要素が A の固有値となる. そして Lam の (1,1) 成分の固有値に対応する固有ベクトルの 1 つが, P の 1 列目の列ベクトルとなる. 同様に Lam の (2,2) 成分の固有値に対応する固有ベクトルの 1 つが, P の 2 列目の列ベクトルとなる.

$1/\sqrt{2} = 0.7071068$  に気をつけて, Scilab で得られる  $\lambda = -1$  のときの固有ベクトルが,  $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$  になっているか,  $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$  になっていることを確かめよ.

(解答終)

## 8 実ベクトルの内積とベクトルの大きさ

題名に書いてある通り, ここではベクトルの成分を実数に限っている. ただし前章までの  $2 \times 2$  ではなくて,  $n$  項列ベクトルまでを扱う.

まず例として  $xy$  平面上の点  $A = (a_1, a_2)$  と  $B = (b_1, b_2)$  があるとする. 原点  $O$  と合わせて, 角  $AOB$  が直角の直角三角形  $OAB$  となる場合を考えよう. 線分  $AB$ , 線分  $OA$ , 線分  $OB$  の長さをそれぞれ  $|AB|, |OA|, |OB|$  で表すと, 三平方の定理から,

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2$$

が成り立つ. この式を成分ごとに計算すると,

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2)$$

であり, これを整理すると,

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

である.

今は座標で考えたが, 位置ベクトルで同じよう考えることによって, ベクトルでも同じことが言える. 今, 2 項列ベクトル  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  と,  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  を考える. そこで,  $x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$  のときこの列ベクトルは直交するという. さらにこれを  $n$  項列ベクトルまで, 拡張して以下のように定義しよう.

定義 8.1 2つの  $n$  項列ベクトル  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  について,

(i). 内積  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  を,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = {}^t \mathbf{y} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

で定義する.

(ii). ベクトル  $\mathbf{x}$  の大きさを

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

で定義する. これを  $\mathbf{x}$  のユークリッドノルムともいう.

」

内積の値は実数である. よく  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  と小かっこを使う場合もあるが, 初学の人は列ベクトルの結合と勘違いすることがあるので, 「 $\langle$  と  $\rangle$ 」を使った西洋式の表記を用いた. 内積の定義によって,

$$\mathbf{x} \text{ と } \mathbf{y} \text{ が直交する} \iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

を言いたいので, 順にこれを示していく. まずは内積の性質からである.

定理 8.2 (実ベクトルの内積の性質)  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$  がともに  $n$  項列ベクトルとする.  $c$  は実数とする. このとき,

- (交換)  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
- (結合)  $\begin{cases} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle \end{cases}$
- (定数倍)  $c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} \rangle$

」

ユークリッドノルムと内積の関係では, 以下は簡単に得られる.

命題 8.3  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  がともに  $n$  項列ベクトルで,  $a, b$  が実数のとき,

$$|a\mathbf{x} + b\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 a^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle ab + |\mathbf{y}|^2 b^2$$

」

ユークリッドノルムと内積の関係では, 三角不等式が重要な役割を果たすので, それを証明しよう.

定理 8.4 (三角不等式)  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  がともに  $n$  項列ベクトルとする. このとき,

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \tag{8.1}$$

が成り立つ。等号が成り立つ必要十分条件は、 $s\mathbf{y} = t\mathbf{x}$  となる実数  $s, t$  (ただし  $s^2 + t^2 \neq 0$ ) が存在する場合である。 ┘

証明 (i)  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  の場合は、(8.1) 式が等号として成り立ち、 $0\mathbf{y} = t\mathbf{x}$  となる  $t \neq 0$  が存在することから、命題が成り立つ。

(ii)  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  の場合は、 $t$  を実数とすると以下がいえる。

$$|t\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 \cdot t^2 - 2 \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle t + |\mathbf{y}|^2$$

ところで左辺は  $t$  にかかわらず 0 以上であるので、右辺の  $t$  の 2 次式の判別式を  $D$  とすると  $D/4 \leq 0$  が成り立つ。

$$D/4 = (\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)^2 - |\mathbf{x}|^2 \cdot |\mathbf{y}|^2 \leq 0$$

を変形すれば (8.1) 式が得られる。

(8.1) 式が等号で成り立つための必要十分条件は、 $\mathbf{y} = t\mathbf{x}$  である。よって命題の等号条件が得られる。 □

三角不等式から以下のように 1 つの不等式と、1 つの定義が導かれる。まず三角不等式の両辺を 2 乗すると、以下が言える。

系 8.5 (シュワルツの不等式)  $n$  個の実数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  と  $n$  個の実数  $y_1, y_2, \dots, y_n$  について、

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$
┘

次にベクトルのなす角を定義しよう。(8.1) 式から、 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  かつ  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  ならば、

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} \leq 1$$

がいえる。実数  $\theta$  を  $0 \leq \theta \leq \pi$  とすると\*3,  $\cos \theta$  は  $-1$  から  $1$  までの値をとり、 $\theta$  と  $\cos \theta$  の値は  $1:1$  で対応している。よって、ベクトルのなす角を以下のように定義する。

定義 8.6  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  がともに  $n$  項列ベクトルとする。

(i).  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  とともにゼロベクトルではないときは、

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} \tag{8.2}$$

を満たす  $\theta \in [0, \pi]$  を、 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  のなす角と定義する。

(ii).  $\mathbf{x}$  または  $\mathbf{y}$  が 0 ベクトルのときは、 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  のなす角は  $\pi/2$  と定義する。

(iii).  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  のなす角が  $\pi/2$  のとき、2 つのベクトルは直交するといひ  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$  で表す。 ┘

---

\*3 弧度法ではなくラジアンを用いている。 $x$  と  $y^\circ$  の関係は、「 $\frac{x}{\pi}$  ラジアン =  $\frac{y}{180}$  度」である。

## 9 内積までの 2 項ベクトルの応用:平面ベクトル (2)

この章も, ベクトルや行列の成分を実数に限っている

### 9.1 法線ベクトルと点と直線の距離

1.3 節で  $xy$  平面上の平面ベクトルについて学んだ. この節はその延長であり, 行列の積・行列式・内積についての平面ベクトルへの応用を考える.

まずは前節で直交ということを定義したので, 平面上の直線の法線ベクトルを定義しよう.

**定義 9.1** (直線の法線ベクトルの定義)  $xy$  平面上の直線  $ax + by + c = 0$  (ただし  $a^2 + b^2 \neq 0$ ) が与えられたとき, この直線の法線ベクトルは,  $s \neq 0$  の実数で,

$$s \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

と定義する. ┘

定義 1.5 では方向ベクトルを定義した. その時は, 主な方向ベクトルとして  $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$  のどちらにしてもよいと書いた. 今の法線ベクトルの場合も同様に

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$$

が主なものである. しかし普通はマイナスを 2 つ使うことはしないので,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

を考えるとよい.

法線というのは, 直交する線という意味がある. 実際に定義 (9.1) での直線の方向ベクトルが  $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$  であり, 法線ベクトル  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  との内積が 0 になることを確認してほしい.

次に, 高校の学習参考書に公式としては載ってはいるが, あまりきちんと証明されていないことを証明しよう.

**命題 9.2** (点と直線の距離)  $xy$  平面上で, 直線  $ax + by + c = 0$  と, 点  $P(x_0, y_0)$  の距離は,

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
┘

これは次の命題を先に示した後に簡単に言える.

**命題 9.3**  $xy$  平面上で, 点  $P(x_0, y_0)$  から直線  $ax + by + c = 0$  に下した垂線の脚を  $H$  とする. このとき以下が成り立つ.

$$\overrightarrow{PH} = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

┘

証明  $\overrightarrow{PH}$  は  $ax + by + c = 0$  と直交する。よって  $\overrightarrow{PH}$  は、この直線の法線ベクトルの定数倍で表される。つまり実数  $t$  として、

$$\overrightarrow{PH} = t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

と、表すことができる。これを利用して、

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PH} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

であり、 $H$  が直線  $ax + by + c = 0$  上にあることから、この式に  $x = x_0 + ta, y = y_0 + tb$  を代入して

$$\begin{aligned} a(x_0 + ta) + b(y_0 + tb) + c &= 0 \\ (a^2 + b^2)t &= -(ax_0 + by_0 + c) \\ t &= -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

が成り立つ。これを (9.1) 式に代入して、命題が成り立つ。  $\square$

命題 9.2 の証明 : 命題 9.3 の結果より、

$$\overrightarrow{PH} = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

が成り立つ。列ベクトル  $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  の大きさは 1 なので、上の式の  $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  に掛かっている実数の絶対値、つまり、

$$\left| -\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

が、 $P$  と直線  $ax + by + c = 0$  との距離である。  $\square$

## 9.2 平面全体を 2 つのベクトルの線形結合で表せる場合と、表せない場合

命題 1.2 で、平面全体を  $s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  によって一意に表した。まずはこれの応用である。

命題 9.4  $xy$  平面上の原点を  $O$  とする。2 点  $A, B$  の列ベクトルを

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

とする。  $s, t$  は実数として、以下の (i)(ii)(iii) は同値である。

(i). 任意の点  $P$  の位置ベクトル  $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  は、  $s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$  によって一意に表される。成分で書くと以下である。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

(ii).  $s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \mathbf{0}$  となる  $s, t$  が  $s = t = 0$  のみである. 成分で書くと以下である.

$$s \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff s = t = 0 \quad (9.3)$$

(iii).  $\det \begin{pmatrix} \overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OB} \end{pmatrix} \neq 0$  である. 成分で書くと以下が成り立つ.

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

証明 (ii) $\implies$ (iii) の証明: (9.3) 式は,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

と表される.  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$  の場合は, (9.4) 式の  $\implies$  が成り立たない. よって,  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$

(iii) $\implies$ (i) の証明: 任意の  $x, y$  について, (ii) が成り立つので (iii) が成り立つことから, 任意の  $x, y$  について,

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と  $s, t$  を定めることができる. この  $s, t$  を用いて,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

と表すことができる. 次に一意性について証明しよう. 実数  $s, t, u, v$  によって  $\overrightarrow{OP}$  が

$$\overrightarrow{OP} = s \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

のように2通りで示されたと仮定しよう. すると, この式の右側の等式より,

$$\begin{aligned} (s-u) \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + (t-v) \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s-u \\ t-v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られる. (iii) の仮定より  $\begin{pmatrix} s-u \\ t-v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  であり, これは  $s = u, t = v$  を意味している.

(i) $\implies$ (ii) の証明. 対偶で証明する. (ii) が成り立たないと仮定する. つまり,

が成り立つような実数  $u, v (u^2 + v^2 \neq 0)$  が存在することを意味する. 今  $u \neq 0$  としても一般性を失わないので, そのように仮定する. すると上の式は,

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = -\frac{v}{u} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

となるので, これを (9.2) 式に代入すると,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(-\frac{v}{u}s + t\right) \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

である.  $(-\frac{v}{u}s + t)$  は実数なので,  $s, t$  を任意に動かしても, 点  $P$  は直線  $OB$  上にしか存在しない. つまり  $s, t$  によって  $xy$  平面全体を表すことはできない.

□

従ってこの節の題名の答えの 1 つとして, 以下がいえる.

「2 つの非ゼロベクトル  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  が,

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

を満たすとき, そしてそのときのみ, 線形結合

$$s \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

によって, 平面全体を表すことができる。」

### 9.3 2 項列ベクトルの左から 2 次正方行列を掛けることと, 行列式の関係

行列  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が与えられて,  $xy$  上の点  $P(x, y)$  から,  $uv$  平面上の点  $P'(u, v)$  へと,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

によって写されることを考えよう\*4. 行列  $\mathbf{A}$  によって,  $xy$  平面上の点は,  $uv$  平面上のある 1 点に写るのだが, 前節の結果から, 以下がいえる.

**命題 9.5**  $xy$  平面から  $uv$  平面への写りかた\*5が, (9.6) 式で表されるとする.

- (i).  $\mathbf{A}$  が正則のときは,  $xy$  平面上の点とそれに対応する  $uv$  平面上の点は 1 対 1 に対応する.
- (ii).  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  のときは,  $xy$  平面上の任意の点は,  $uv$  平面上の原点に写される.
- (iii). それ以外の場合は,  $xy$  平面上の任意の点は,  $uv$  上での原点を通るある直線上に写される.

」

**証明**  $xy$  平面上の任意の点  $(x, y)$  は, ある実数  $s, t$  によって,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\*4 これを「 $(u, v)$  は  $(x, y)$  の  $\mathbf{A}$  による写像である」というのだが, 写像の定義や, 線形写像と線形写像と行列の関係などの細かい話は, 参考文献を参照のこと.

\*5 写像という数学用語がある. ある点について写す, とかある集合を写すという意味のイメージで写像という. 正しい定義については, 詳しくは参考文献を参照のこと

と一意にあらわされる。この式の両辺に左から  $\mathbf{A}$  を掛けると、

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

となる。これに前節の命題 9.4 の結果を合わせると、命題の (i)(ii)(iii) が全て成り立つ。

□

次にこの写像と、 $\mathbf{A}$  の行列式の関係を示そう。まず三角形の面積からである。

命題 9.6 原点を  $O$  とする座標平面上に、2 点  $A, B$  があり、2 つの位置ベクトルをそれぞれ

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

とする。このとき三角形  $OAB$  の面積は

$$\frac{1}{2}|ad - bc|$$

であらわされる。

□

証明  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  のなす角を  $\theta$  とすると、求める面積  $S$  は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \sin \theta = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{b^2 + d^2} \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)(1 - \cos^2 \theta)} \\ &\quad \text{一方内積の定義 8.6 から,} \\ &\quad (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \cos^2 \theta = (ab + cd)^2 \text{ なので} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (ab + cd)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(ad - bc)^2} \\ &= \frac{1}{2} |ad - bc| \end{aligned}$$

□

この三角形の面積の結果によって、以下がいえる。

命題 9.7  $xy$  平面から  $uv$  平面への  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  による写像を

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とする。 $xy$  平面上の任意の 2 点  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$  の  $\mathbf{A}$  による写像をそれぞれ  $P', Q'$  とする。このとき  $uv$  平面上の三角形  $O'P'Q'$  の ( $O'$  は  $uv$  平面上の原点とする) 面積は、 $xy$  平面上の三角形  $OPQ$  の、 $|\det(\mathbf{A})|$  倍となる。

□

注意:  $\det(\mathbf{A}) = 0$  の場合は、 $O'P'Q'$  が一直線上に並ぶこととなるので、三角形  $O'P'Q'$  の面積は 0 と考える。

(注意終)

証明 前命題より, 三角形  $OPQ$  の面積は,  $\frac{1}{2}|x_1y_2 - y_1x_2|$  である.  $uv$  平面上での,  $P'$  の位置ベクトルと,  $Q'$  の位置ベクトルはそれぞれ

$$\begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ax_2 + by_2 \\ cx_2 + dy_2 \end{pmatrix}$$

である. よって, 三角形  $O'P'Q'$  の面積は,

$$\frac{1}{2}|(ax_1 + by_1)(cx_2 + dy_2) - (cx_1 + dy_1)(ax_2 + by_2)|$$

である. これを展開して整理すると,  $\frac{1}{2}|x_1y_2 - y_1x_2|$  の  $|ad - bc|$  倍と一致する.

□

ということで, 写像された三角形の面積は, もとの三角形の面積の「行列式の絶対値」倍となるのである. 行列式には, 逆行列を持つか否かの判別式という意味以外にも, このような意味を持っているのである.

#### 9.4 回転変換と三角関数の加法定理

前節では  $xy$  平面から  $uv$  平面への写像を考えた. この写像の中でも, 反時計回りに  $\theta$  だけ回転する写像を考えよう. 写像の場合は,  $uv$  平面に写したが, この節では同じ  $xy$  平面上を動くことを考える. つまり,  $xy$  平面上にある 2 点  $P(x, y)$  と点  $P'(x', y')$  があって,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

というように, 点  $P$  から点  $P'$  のように動くことを考えている. このような場合は写像というよりも, 変換という言葉がよく使われる.

では  $\theta$  だけ反時計回りに回転する変換を考えてみよう. これは  $x$  軸を  $\theta$  だけ反時計回りに回し,  $y$  軸を  $\theta$  だけ反時計回りに回せばよいのである.

まず最初に  $90^\circ$  つまり  $\frac{\pi}{2}$  ラジアンを反時計回りに動かす変換を考える. それは

- (i).  $x$  軸の正の向きを,  $y$  軸の正の向きに動かす.
- (ii).  $y$  軸の正の向きを,  $x$  軸の負の向きに動かす.

ということである.  $xy$  平面の任意の点の位置ベクトルは

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であらわされるのだから, 上の (i)(ii) をもう少し考えれば,

- (i).  $(1, 0)$  を,  $(0, 1)$  に移動する.
- (ii).  $(0, 1)$  を,  $(-1, 0)$  に移動する.

とすればよい. ということは,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とすればよいので、行列

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が、反時計回りに  $\pi/2$  ラジアン回転する変換を表す。

次に、反時計回りに (以下「反時計回り」を省略して書く)  $\theta$  ラジアン回転する変換を考えよう。

$xy$  平面上の点で、

(i).  $(1, 0)$  を  $(\cos \theta, \sin \theta)$  に移動させる。

(ii).  $(0, 1)$  を  $(-\sin \theta, \cos \theta)$  に移動させる。

この (ii) の意味が分からなかったら (私も高校のとき最初はわからなかった), 次のように考えるとよい (私が高校の時はこう考えた)。

(i) によって元の  $x$  軸が  $(\cos \theta, \sin \theta)$  方向に写った。そして元の  $y$  軸は元の  $x$  軸を反時計回りに  $\pi/2$  ラジアン回したものである。ということは (ii) については、

$(0, 1)$  を反時計回りに  $\theta$  ラジアン回す  $\iff (\cos \theta, \sin \theta)$  を、反時計回りに  $\pi/2$  ラジアン回す

と考えればよい。上の式の  $\iff$  の右側について、先の行列を用いて、 $(\cos \theta, \sin \theta)$  を、半時計回りに  $\pi/2$  ラジアン回した座標は、

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

で得られる。計算して、点  $(-\sin \theta, \cos \theta)$  が得られるのである。

ということで、(i)(ii) を考え合わせれば、

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \tag{9.7}$$

という行列が、 $\theta$  ラジアン回転させる回転変換を表す行列となる。

この行列を  $R(\theta)$  と表すことにしよう。ところで点  $(1, 0)$  を、 $(\alpha + \beta)$  だけ回転変換するという事は、点  $(1, 0)$  を  $\alpha$  回転したあと、さらに  $\beta$  回転することなので、

$$R(\alpha + \beta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = R(\beta)R(\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ\*6。これをそれぞれ成分で書くと、

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

それぞれ計算して、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

という  $\sin(\alpha + \beta)$  と  $\cos(\alpha + \beta)$  の加法定理が簡単に得られる。加法定理からは特に倍角の公式

\*6 この式の  $R(\alpha + \beta) = R(\beta)R(\alpha)$  が成り立つことについて、細かい部分を省略している。気になる場合は、例えば [川久保] や [長谷川] の該当部分を参照するとよい。

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad (9.8)$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad (9.9)$$

が簡単に得られる。

## 9.5 線対称の点に移す変換を表す行列

この節では  $xy$  平面上の任意の点を、原点を通る直線

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

に対して、線対称に移す変換を考える。この表現では直線がイメージにくいかもしれないが、具体的には、 $\cos \frac{\theta}{2} \neq 0$  ならば、直線  $y = (\tan \frac{\theta}{2})x$  を表す。つまり、 $\cos \frac{\theta}{2} \neq 0$  のときは、この直線は、傾き  $\tan \frac{\theta}{2}$  で原点を通る直線である。この線対称による変換によって、

- (i). 点  $(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2})$  は、そのまま変わらない。
- (ii). 点  $(-\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2})$  は、点  $(\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2})$  に写される。

となる。するとこの変換を表す行列  $\mathbf{A}$  は、

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

とあらわされる\*7。まとめると、

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

左辺の右側の逆行列を右から掛けて、

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} & 2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ 2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{倍角の公式 (9.8) 式} \cdot \text{(9.9) 式より} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

例えば、直線  $y = x$  に関して線対称に移動することを表す行列を求めよう。 $\theta/2 = \pi/4$  ラジアンなので、 $\theta = \pi/2$  ラジアンである。(9.9) 式に代入して、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

\*7 この2点の座標の移動だけを考えれば十分であることも、多少の説明や証明が必要なのだが、ここでは省略する。興味のある人は参考文献を参照するとよい。

である。つまり,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

となる。

## 10 2次実正方行列の直交行列と三角化・対角化

8章で直交を学んだ。さらに行列まで考えることによって、直交行列の意味を探り、さらにそれを用いて行列を変形していくのが、この章での目的である。この章も、ベクトルや行列の成分を実数に限っている。

**命題 10.1** 2次正方行列  $\mathbf{P}$  の直交行列については、 $p_1^2 + p_2^2 = 1$  を満たす  $p_1, p_2$  によって,

$$\begin{pmatrix} p_1 & -p_2 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & -p_1 \end{pmatrix} \quad (10.1)$$

のどちらかの形で表される。 $\sin \theta, \cos \theta$  の形で表すと,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

注意: (10.2) 式の左は、9.4節の回転変換、右は9.5節の線対称を表す変換の形である。

(注意終)

**証明**  $2 \times 2$  の直交行列なので、 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & x_1 \\ p_2 & x_2 \end{pmatrix}$  として、 $p_1, p_2$  を所与として

$$p_1^2 + p_2^2 = 1, x_1^2 + x_2^2 = 1, p_1 x_1 + p_2 x_2 = 0$$

を満たす  $x_1, x_2$  を求めるとよい。 $p_1 x_1 + p_2 x_2 = 0$  かつ  $p_1^2 + p_2^2 \neq 0$  より、実数  $t$  によって、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

とあらわされる。これを  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  に代入して計算すると、 $(p_1^2 + p_2^2)t^2 = 1$ 。よって、

$$t = \pm 1$$

が得られる。これを (10.3) 式に代入して、

$$(x_1, x_2) = (-p_2, p_1), (p_2, -p_1)$$

の2通りのみの答えが出てくる。

□

(10.1) 式のどちらの行列についても、1列目の列ベクトルも2列目の列ベクトルも、大きさは1であり、そして、その2つの列ベクトルは直交しているのであることを確認してほしい。 $n$ 次直交行列についても同様のことがなりたつが、とりあえず2次の直交行列には、以下のような性質がある。

**命題 10.2** 2次正方行列  $\mathbf{P}$  が直交行列ならば、以下が成り立つ。

- (i).  $P^{-1} = {}^t P$   
(ii).  $\det(P)$  は  $\pm 1$  のいずれかである.

証明 (i) は直交行列の定義より明らかである. (ii) は, 直交行列の定義と定理 5.1 より得られる.  $\square$

定義 10.3  $A, P, \Lambda, U$  は 2 次正方行列とする.  $\Lambda$  は対角行列で,  $U$  は上三角行列とする.  $A$  が与えられたときに, 適当な正則行列  $P$  が存在して

- (i).  $P^{-1}AP = \Lambda$  となるとき,  $A$  は  $P$  で対角化可能である, という.  
(ii).  $P^{-1}AP = U$  となるとき,  $A$  は  $P$  で三角化可能である, という.

わざわざ三角化と対角化を分けているのは, 全ての 2 次正方行列が, 対角化できるわけではないためである. 三角化はその代理であり, より広いものである. まずは対角化できるものから求めてみよう.

定理 10.4  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  とする.  $A$  の固有方程式が異なる 2 つの実数解  $\lambda_1, \lambda_2$  を持つならば,  $A$  は, 適当な  $P$  を選ぶことによって,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

のように対角化可能である.

証明 固有方程式の異なる 2 つの実数解を  $\lambda_1, \lambda_2$  とし,  $\lambda_1$  の固有ベクトルの 1 つを  $\mathbf{x}$ ,  $\lambda_2$  の固有ベクトルの 1 つを  $\mathbf{y}$  とする. さて,

$$A\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}, \quad A\mathbf{y} = \lambda_2\mathbf{y},$$

が成り立つことから,  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  を横に並べた行列  $\begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{pmatrix}$  を用いて,

$$A \begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

がいえる. あとは, 2 次正方行列  $\begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{pmatrix}$  が正則であることを示せばよい. というのもこの行列を  $P$  とすれば,  $P^{-1}$  を上の式の両辺の左側から掛けることによって, 証明が完成するのである. そこで  $\begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{pmatrix}$  が正則であることを背理法で示そう.

$\begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{pmatrix}$  が正則ではないと仮定する. それは

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

となる  $s, t$  (ただし  $s = t = 0$  以外) が存在する. 上の式を簡単にすると,

$$s\mathbf{x} + t\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (10.5)$$

である. 左から  $A$  を掛けると,  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  がそれぞれ  $A$  の固有ベクトルであることから,

$$s\lambda_1\mathbf{x} + t\lambda_2\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

がなりたつ。(10.5)式の両辺を $\lambda_1$ 倍して、上の式から引くと、

$$(\lambda_2 - \lambda_1)t\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$  かつ  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  なので、これより  $t = 0$  である。 $t = 0$  を (10.5) 式に代入すると、

$$s\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

であるが、 $s, t$  の仮定より  $s \neq 0$  であるから  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  となる。これは  $\mathbf{x}$  が固有ベクトルであることに矛盾する。よって、 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  を横に並べた行列

$$(\mathbf{x} \ \mathbf{y})$$

は正則である。

□

**例題 10.5** 練習 7.3 の行列  $\mathbf{A}$  について、その固有値と固有ベクトルの結果を用いることによって、 $\mathbf{A}$  を対角化せよ。

(解答) 解答の結果から、固有値と固有ベクトルの関係から以下が成り立つ。

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

これを一つにまとめると、

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$  は逆行列を持つので(行列式が非0となることを確かめよ)、この逆行列を、両辺の左側から掛けて

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(解答終)

この対角化でのポイントを書いてみよう。 $\mathbf{A}$  が2次正方行列としたときに、 $\lambda_1, \lambda_2$  (ただし  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) が実数の固有値で、 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  がそれぞれの固有ベクトルとする。このとき、

$$\begin{cases} \mathbf{Ax} = \lambda_1 \mathbf{x} \\ \mathbf{Ay} = \lambda_2 \mathbf{y} \end{cases} \iff \mathbf{A} (\mathbf{x} \ \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \ \mathbf{y}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

となることが、ポイントなのである\*8。

なお重複解を持つ場合については、対角化可能な場合も対角化不可能な場合もある。これ以上細かくは書かないが、固有方程式が重複解を持つ場合には、対角化可能か否かについて、よく考えなければならないということを押さえておくとよいだろう。

これに対して三角化は、実数解で重複解があつたとしても、三角化できる。しかも直交行列によって三角化できる点が素晴らしいのである。

\*8 以外と盲点であり、慣れるためには手計算を何度も繰り返した覚えがある。

定理 10.6  $\mathbf{A}$  は任意の 2 次正方行列とする.  $\mathbf{A}$  の固有方程式が実数解を持ちそれを  $\lambda_1, \lambda_2$  とするとき (重複解の場合は  $\lambda_1 = \lambda_2$  とする), ある直交行列  $\mathbf{P}$  が存在して,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & u \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

のように,  $\mathbf{A}$  を三角化することができる. ┘

注意: 実数  $u$  はどのような数字になってもよい. とにかく上三角行列になればよい. そこで, 証明の方針として,  $\mathbf{A}$  の固有値の一つを  $\lambda_1$  とし, その固有ベクトルを  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とする ( $x^2 + y^2 = 1$  と基準化しておく). よって, この固有ベクトルを用いて, (10.1) 式の直交行列の形を参考にして,

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{A} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & u \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つようにすればよい.

(注意終)

証明  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  とし, この固有値を  $\lambda_1, \lambda_2$  とする. また  $\lambda_1$  の固有ベクトルを  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とし, すでに基準化しているものとする. 以上より,

$$ax + by = \lambda_1 x \tag{10.6}$$

$$cx + dy = \lambda_1 y \tag{10.7}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{10.8}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d \tag{10.9}$$

が成り立つ. (10.9) 式が成り立つのは,  $\mathbf{A}$  の固有方程式の解と係数の関係からである. さて,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \tag{10.10}$$

とすると,  $\mathbf{P}$  は明らかに直交行列である. この  $\mathbf{P}$  を用いて,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} &= \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \\ \text{(10.6) 式と (10.7) 式より} &= \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 x & -ay + bx \\ \lambda_1 y & -cy + dx \end{pmatrix} \\ \text{(10.8) 式より} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & bx^2 + (-a + d)xy - cy^2 \\ 0 & dx^2 + (-b - c)xy + ay^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10.11}$$

ここで (10.6) 式の両辺に  $x$  を, (10.7) 式の両辺に  $y$  を, それぞれ掛けて移項することによって,

$$bxy = \lambda_1 x^2 - ax^2, \quad cxy = \lambda_1 y^2 - dy^2 \tag{10.12}$$

が成り立つので, (10.11) 式の (2, 2) 成分に代入して,

$$\begin{aligned} \text{(10.11) 式の (2, 2) 成分} &= dx^2 - bxy - cxy + ay^2 \\ &= dx^2 + (-\lambda_1 x^2 + ax^2) + (-\lambda_1 y^2 + dy^2) + ay^2 \\ \text{(10.8) 式より} &= a + d - \lambda_1 \\ \text{(10.9) 式より} &= \lambda_2 \end{aligned}$$

これと (10.11) 式から、命題が成り立つ。

□

なお証明には直接は関係ないので示さなかったが、(10.11) 式の (1,2) 成分も  $b-c$  となることが、(10.6) 式・(10.7) 式から、(10.12) 式と似たようなものを作ることによっていえる。

三角化は理論上では極めて重要であるが、実際に数字が与えられて直交行列によって三角化することはあまりない。

## 11 2次実正方行列の対角化の応用例

固有値と固有ベクトルと対角化については、いろいろと応用ができる。この章では  $A^n$  について述べよう。この章も、ベクトルや行列の成分を実数に限っている。

命題 11.1 2次正方行列  $A$  が  $P$  によって、 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  と対角化できた場合 ( $\lambda_1, \lambda_2$  は実数),

$$P^{-1}A^nP = \Lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

┘

注意: この  $P$  は直交行列である必要はない。  $A$  を対角化できればよい。

(注意終)

証明 右の等号は明らかなので、左の等号について証明する。  $\Lambda = (P^{-1}AP)$  の両辺を  $n$  回掛けることにより、

$$\begin{aligned} \Lambda^n &= (P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}A[(PP^{-1})A(PP^{-1})A\cdots(PP^{-1})A]P \\ &= P^{-1}(AA\cdots A)P \\ &= P^{-1}A^nP \end{aligned}$$

□

系 11.2  $A, P, \Lambda, \lambda_1, \lambda_2$  を命題 11.1 と同様としたとき、任意の  $n$  について、

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

┘

微分積分の本などで、実数列の収束について、 $|a| < 1$  ならば  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$  などを学んでいるだろう。それを用いると、以下がいえる。

系 11.3  $A, P, \Lambda, \lambda_1, \lambda_2$  を命題 11.1 と同様としたとき、

(i).  $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$  ならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = O$$

(ii).  $\lambda_1 = 1, |\lambda_2| < 1$  ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

」

練習 11.4 (2 状態マルコフ過程の基礎)  $0 < p_1 < 1, 0 < p_2 < 1$  として,  $q_1 = 1 - p_1, q_2 = 1 - p_2$  とする. 全ての成分が正である確率行列  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ q_2 & p_2 \end{pmatrix}$  を考える. このとき,

(i).  $\mathbf{A}$  の固有値が 1 と  $p_1 + p_2 - 1$  であることをし,  $|p_1 + p_2 - 1| < 1$  を確かめよ.

(ii). それぞれの固有ベクトルを求めた後, 以下を示せ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n = \frac{1}{q_1 + q_2} \begin{pmatrix} q_2 & q_1 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix}$$

」

## 12 2 次実対称行列の性質

この章も, ベクトルや行列の成分を実数に限っている.

実対称行列は,  $C^2$  級の多変数の微分の場合にも出てくるので, 以下の 2 つは非常に重要な性質である.

定理 12.1  $\mathbf{A}$  が 2 次対称行列とする. このとき,

- (i). 固有値は全て実数である.
- (ii).  $\mathbf{A}$  は直交行列で対角化できる.

」

注意:  $\mathbf{A}$  が  $n$  次対称行列でもなりたつ.

(注意終)

証明 (i) の証明: 対称行列なので, 実数  $a, b, d$  で  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$  とすると, 固有方程式は

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - b^2) = 0$$

この  $\lambda$  の 2 次方程式の判別式は

$$\begin{aligned} D &= (a + d)^2 - 4(ad - b^2) \\ &= (a^2 + 2ad + d^2) - 4ad + 4b^2 \\ &= (a^2 - 2ad + d^2) + 4b^2 \\ &= (a - d)^2 + 4b^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

より,  $\lambda$  は実数解のみをもつ.

(ii) の証明: 定理 10.6 と今の (i) から,  $\mathbf{A}$  は, ある直交行列  $\mathbf{P}$  によって,

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{U} \tag{12.1}$$

と三角化できる ( $U$  は上三角行列). 直交行列なので  $P^{-1} = {}^tP$  を代入して

$${}^tPAP = U \quad (12.2)$$

この左辺の転置行列は,

$${}^t({}^tPAP) = {}^tP^t A^t ({}^tP) = {}^tPAP$$

であるので, (12.2) 式の両辺を転置すると,

$${}^tPAP = {}^tU \quad (12.3)$$

(12.2) 式と, (12.3) 式から,

$$U = {}^tU$$

が成り立つ. この左辺は上三角行列で, 右辺は下三角行列である. 上三角行列と下三角行列が等しいということは, それは非対角成分が 0 であることとなる. つまり  $U$  は対角行列である. よって (12.1) 式と合わせて, 命題がいえる.

□

### 13 $n$ 次実正方行列による, 2 次形式の定義

この章も, ベクトルや行列の成分を実数に限っている.  $x$  についての 2 次式は, 実定数  $a, b, c$  を用いて, 高校の時は  $ax^2 + bx + c$  と書いた. この  $b$  の代わりに  $2b$  と書いて

$$ax^2 + 2bx^2 + c \quad (13.1)$$

としても一般性は失わない. これをさらに一般化して  $x_1$  と  $x_2$  の 2 次式

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

を考えてみよう. この式を,  $x_1, x_2$  の 2 元 2 次形式という. さらに対称行列を使って, 以下のように表すことができる.

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (13.2)$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  とすると,  ${}^txAx$  で表される.

$n$  変数の場合でも同様なので, ここで  $x_1, x_2, \dots, x_n$  について定義しておこう.

**定義 13.1**  $a_{ij}$  ( $i, j$  は  $1 \leq i \leq j \leq n$ ) を実定数とする.  $n$  個の実数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の関数

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j \quad (13.3)$$

を  $x_1, \dots, x_n$  に関する  $n$  元 2 次形式, または単に 2 次形式と呼ぶ. このとき  $n$  次対称行列  $A$  と  $n$  項列ベクトル  $x$  を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とすると,  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = {}^t \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x}$  と表される. よってこの対称行列  $\mathbf{A}$  を, 2次形式  $Q(x_1, \dots, x_n)$  の係数行列という. ┘

$a, x$  を実数とすると, 中学や高校で学んだことから,

- (i).  $a > 0$  とする. このとき任意の  $x \neq 0$  について  $ax^2 > 0$  が成り立つ.
- (ii).  $a < 0$  とする. このとき任意の  $x \neq 0$  について  $ax^2 < 0$  が成り立つ.
- (iii).  $a \geq 0$  とする. このとき任意の  $x \neq 0$  について  $ax^2 \geq 0$  が成り立つ.
- (iv).  $a \leq 0$  とする. このとき任意の  $x \neq 0$  について  $ax^2 \leq 0$  が成り立つ.

は簡単にわかるであろう. 2次形式についても, 同じようにして, 以下のように定義する.

**定義 13.2**  $n$  次対称行列  $\mathbf{A}$  と  $n$  項列ベクトル  $\mathbf{x}$  を考える.

- (i). 任意の  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  について  ${}^t \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$  が成り立つとき,  $\mathbf{A}$  を正値定符号行列という. 正値定符号, または正定値ともいう.
- (ii). 任意の  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  について  ${}^t \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$  が成り立つとき,  $\mathbf{A}$  を半正値定符号行列という. 半正値定符号, または半正定値ともいう.
- (iii). 任意の  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  について  ${}^t \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$  が成り立つとき,  $\mathbf{A}$  を負値定符号行列という. 負値定符号, または負定値ともいう.
- (iv). 任意の  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  について  ${}^t \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0$  が成り立つとき,  $\mathbf{A}$  を半負値定符号行列という. 半負値定符号, または半負定値ともいう. ┘

このように2次形式と定符号というものを定義したので, 次章では2次正方行列を中心に説明していく.

## 14 2次実正方行列と2次形式

この章も, ベクトルや行列の成分を実数に限っている.

2元2次形式についてこの章で学ぶことによって,  $C^2$  級の2変数実数値関数  $f(x, y)$  についての極大・極小についての議論が, 十分に理解できるようになる.

さて(13.1)式の正負については,  $ax^2 + 2bx + c = 0$  の判別式を  $D$  として,  $D/4 = b^2 - ac$  を用いて高校の時以下のように学んだことであろう.  $x$  は実数全体を考える.

- (i).  $a > 0$  かつ  $D/4 < 0$  ならば, 任意の  $x$  について  $ax^2 + 2bx + c > 0$ .
- (ii).  $a > 0$  かつ  $D/4 \leq 0$  ならば, 任意の  $x$  について  $ax^2 + 2bx + c \geq 0$ .
- (iii).  $a < 0$  かつ  $D/4 < 0$  ならば, 任意の  $x$  について  $ax^2 + 2bx + c < 0$ .
- (iv).  $a < 0$  かつ  $D/4 \leq 0$  ならば, 任意の  $x$  について  $ax^2 + 2bx + c \leq 0$ .
- (v).  $a \neq 0$  かつ  $D/4 > 0$  のときは,  $x$  の値によって,  $ax^2 + 2bx + c$  は, 正, 負, 0 のいずれの値もとりうる.

2次形式の場合も同様のことが言える. ただし,  $x_1, x_2$  と添字が面倒なので,  $x, y$  の2次形式

$$Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

として ( $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  である), 以下考えてみよう. 上で判別式  $D$  を用いたが, それをよく見ると実は,  $D/4 = -\det(\mathbf{A})$  である. また,  $x = y = 0$  のときは常に  $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$  だから,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  の場合を考える. 以下は高校のときの平方完成の復習である.

- $a \neq 0$  ならば,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a \left( x + \frac{b}{a}y \right)^2 + \frac{-b^2 + ac}{a}y^2 = a \left( x + \frac{b}{a}y \right)^2 - \frac{\det(\mathbf{A})}{a}y^2 \quad (14.1)$$

- $c \neq 0$  ならば,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = c \left( y + \frac{b}{c}x \right)^2 + \frac{-b^2 + ac}{c}x^2 = c \left( y + \frac{b}{c}x \right)^2 - \frac{\det(\mathbf{A})}{c}x^2$$

- $a = c = 0$  の場合だと,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 2bxy$$

さてこれらと,  $\det(\mathbf{A}) > 0 \iff b^2 < ac$  であることと合わせて, 以下がいえる.

**命題 14.1**  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  とし,  $\mathbf{x}$  は 2 項列ベクトルであるとする.

- $a > 0$  かつ  $\det(\mathbf{A}) > 0$  であることは, 任意の  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  について  ${}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$  であることと, 同値である.
- $a \geq 0$  かつ  $c \geq 0$  かつ  $\det(\mathbf{A}) \geq 0$  であることは, 任意の  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  について  ${}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$  であることと, 同値である.

」

**証明** (i) の

$$\lceil a > 0 \text{ かつ } \det(\mathbf{A}) > 0 \implies \text{任意の } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ について } {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \rceil$$

は (14.1) 式から簡単に言える. よって  $\Leftarrow$  を対偶で証明しよう.

(1)  $a \leq 0$  を仮定する. このときある  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  が存在して,  ${}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = a \leq 0$  となる.

(2)  $a > 0$  かつ  $\det(\mathbf{A}) \leq 0$  を仮定する. (14.1) 式を見ると, ある  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  が存在して,  ${}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = \frac{\det(\mathbf{A})}{a}a^2 \leq 0$  がいえる.

(1)(2) より,  $a \leq 0$  または  $\det(\mathbf{A}) \leq 0$  ならば, ある  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  があって,  ${}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$  となる. よって対偶が証明された.

(ii) については自力で挑戦してみるとよい.

□

以下は簡単である.

**命題 14.2** 2 次対称行列  $\mathbf{A}$  について,

- (i).  $-\mathbf{A}$  が正値定符号であることは,  $\mathbf{A}$  が負値定符号であることと同値である.  
(ii).  $-\mathbf{A}$  が半正値定符号であることは,  $\mathbf{A}$  が半負値定符号であることと同値である.

さて命題 14.1 から, 正値定符号と負値定符号についての, 必要十分条件を簡単に示すことができる.

定理 14.3 2 次対称行列  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  について,

- (i).  $a > 0$  かつ  $\det(\mathbf{A}) > 0$  であることは,  $\mathbf{A}$  が正値定符号であることと, 同値である.  
(ii).  $a < 0$  かつ  $\det(\mathbf{A}) > 0$  であることは,  $\mathbf{A}$  が負値定符号であることと, 同値である.

それに比べると, 半正値定符号と半負値定符号はやや面倒である.

定理 14.4 2 次対称行列  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  について,

- (i).  $a \geq 0$  かつ  $c \geq 0$  かつ  $\det(\mathbf{A}) \geq 0$  であることは,  $\mathbf{A}$  が半正値定符号であることと, 同値である.  
(ii).  $a \leq 0$  かつ  $c \leq 0$  かつ  $\det(\mathbf{A}) \geq 0$  であることは,  $\mathbf{A}$  が半負値定符号であることと, 同値である.

よって以下は簡単に言える.

系 14.5 2 次対称行列  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  について,  $ac < 0$  ならば,  $\mathbf{A}$  は, 半正値定符号でもなければ, 半負値定符号でもない.

定理 14.4 のときに,  $c$  の条件を明示しているが, 定理 14.3 のときには明示していない. それは, 定理 14.3 の (i) の場合で考えると,  $a > 0, \det(\mathbf{A}) = ac - b^2 > 0$  より,  $c > 0$  が自動的にいえるためである. 定理 14.3 については,  $a$  の代わりに  $c$  を代入しても成り立つ.

練習 14.6 以下の行列を, 正値定符号・負値定符号・半正値定符号・半負値定符号・いずれでもない, の 5 通りで区分せよ.

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, (ii) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, (iii) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, (iv) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, (v) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

## 15 第 II 部の Scilab 実習

ここでは II 部の復習として Scilab の実習をまとめて行う. Scilab でいろいろなことができるが, このレジュメでは,

- (i). メイン画面に直接コマンドを打ち込むという, 対話形式.

- (ii). 自作関数 (ユーザー定義関数) を作っておき, .sce ファイルで保存した後, それを実行して関数を読み込ませる. その後でメイン画面で, 関数を用いる.
- (iii). .sce ファイルで保存して, 実行するバッチ形式.

の 3 つを主に行う. この章では (i) のみである.

## 15.1 [ ] を用いて行列とベクトルの作成. 和と積

例題 15.1 次のコマンドを, メイン画面に順に打ち込め. もちろん行末ごとに Enter キーを押すこと (Enter キーについては以下の実習でも同様).

```
a=[1 2]
b=[3;4]
c=10
A=[50 60;70 80]
B=[-1 -2;-3 -4]
c*a
a*b
A+B
A*B
A+c
a+b
D=[b 10*b]
```

ここでは, 以下に気づいてほしい.

- (i). 変数の大文字と小文字は区別される.
- (ii). 行列やベクトルを作るときには [ ] でくくる.
- (iii). 行ベクトルの区切りは空白で, 列ベクトルの区切りは:である.
- (iv). 2次正方行列  $A, B$  を作るときには, 行ベクトルを 2 つ並べて作るイメージである.
- (v). 答えは `ans` であらわされる.
- (vi).  $A+c$  では行列とスカラーの計算もしている.
- (vii).  $a+b$  ではエラーメッセージがでてくる.
- (viii).  $D=[b \ 10*b]$  のように, 2 行 1 列の行列を, 横に結合して, 新しい行列を作ることができる.

(v) の `ans` は, もちろん `answer` の略である. (vi) は, 要注意である. 行列  $A$  とスカラー  $c$  の和は, 行列  $A$  の各成分すべてに  $c$  を加えることと, Scilab では定義している. ただし慣れると, この表現はとても楽である. (vii) は, 行列のサイズが異なるので計算不能のためである.

## 15.2 実行列の転置行列を返す' と, sqrt 関数・norm 関数

例題 15.2 次のコマンドを打ち込め. `clear`

```

a=[1;2]
b=[1;%pi]
c=a'
d=b'
a'*a
b'*b
sqrt(a'*a)
norm(a)

```

ここでは、まず表題の転置行列について理解してほしい\*9。この「'」はよく使う。また「'」以外では、以下に気づいてほしい。

- (i). `clear` というものがある。
- (ii). `%pi` で、定数  $\pi$  を表している。
- (iii). `sqrt` 関数と `norm` 関数というものがある。

`clear` は、Scilab 内にある変数や読み込んだ自作関数を、全て消去するというコマンドである。

`sqrt` 関数は、普通の PC ソフトでは平方根を表す。実数の場合も同様にして  $a \geq 0$  のときに、 $\sqrt{a}$  を返される。 $a$  の代わりに行列を入れると、成分ごとに計算した値が返ってくる。

次に `norm` 関数を見てみよう。実数の列ベクトルの大きさを、ユークリッドノルムで定義した。 $\mathbf{a}$  が実ベクトルのとき、 $\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{a}}$  が、 $\mathbf{a}$  のユークリッドノルムである。そこで上の実習で `norm(a)` の値と、 $\mathbf{a}' * \mathbf{a}$  の平方根が等しいことから、`norm(a)` のノルムを返すことがわかるであろう。

例題 15.3 次のコマンドを順に打ち込み、`sqrt` 関数について理解せよ。

```

clear
A=[1 2;0 25]
sqrt(A)

```

### 15.3 行列式 det 関数と逆行列 inv 関数

Scilab では、行列式や逆行列を返す組み込み関数が用意されている。

例題 15.4 次のコマンドを打ち込め。

```

clear
A=[1 2;3 4];
B=[1 3;2 6];
C=[10^12 2;3 4]

```

\*9 次の第 III 部で複素数まで習った場合には、「'」は随伴行列を返すコマンドであることがわかる。今は実数の場合であり、その場合だと転置行列を返すこととなる。

```
det(A)
det(B)
det(C)
inv(A)
inv(B)
inv(C)
```

ここでは、まず表題の `det` 関数と `inv` 関数について理解してほしい。行列式は英語で `determinant` であり、逆行列は英語で `inverse` だから、それぞれその略語である。これ以外では、以下を気づいてほしい。

- (i). 行末に ; を付けると、画面で表示されない。
- (ii). 逆行列が存在しない場合には、エラーメッセージが表示される。
- (iii).  $10^{-12}$  は、10 の 12 乗を表している。つまり「^」は累乗を表す。
- (iv). メイン画面で `D+12` とか `D-12` などが出ている。
- (v). `C` の逆行列は存在しているが、何か警告が発されている。

(iv) の `D+12` の `D` は、10 を表す。そして、 $D+12 = 10^{12}$  を意味し、`D-12` は  $10^{-12}$  を表す。(v) 理論と数値計算との違いである。行列式が 0 に近い時には、逆行列の数値計算は誤差が大きくなっていくことに気をつけること。

#### 15.4 固有値と固有ベクトルを返す `spec` 関数と 10 章の実習

Scilab では、固有値と固有ベクトルを返す組み込み関数 `spec` が用意されている。

例題 15.5 次のコマンドを打ち込め。

```
clear
A=[2 3;5 4]
[Lvec,L]=spec(A)
inv(Lvec)*A*Lvec
```

この例題は、実習 7.3 の場合そのものである。さて `spec` 関数は値が 2 つ返ってくる。A が 2 次正方行列のときに、3 行目のように

$$[Lvec, L] = spec(A)$$

とすると、`L` は  $2 \times 2$  の対角行列で、対角部分には固有値が返ってくる。`Lvec` も  $2 \times 2$  の行列が返ってくる。`Lvec` の 1 列目は、A の固有値が `L` の (1,1) 成分であるときの、基準化された固有ベクトルである。`Lvec` の 2 列目は、A の固有値が `L` の (2,2) 成分のときの、基準化された固有ベクトルである。

よって、上の実習のように A が実行列でかつ、固有値も 2 つの異なる実数の場合だと、A は `Lvec` という行列によって、`L` に対角化される (定理 10.4 参照のこと)。それを表したのが、上の 4 行目である。`D-15` は 10 の  $-15$  乗である。それは計算誤差であり、実際は 0 であるから、4 行目が `L` と同じになっていることが理解

できるであろう。

では以下の実習で、 $\mathbf{A}$  の固有値が、実数の重複解を持つ場合の固有ベクトルを求めてみよ。

練習 15.6 以下の 2 つの  $\mathbf{A}$  について、その固有値と固有ベクトルを、Scilab の Spec 関数で求めよ。

$$(i). \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad (ii). \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) の場合の 2 つの固有ベクトルを横に並べた行列は、正則であるが、(ii) の場合は非正則である。非正則の場合は、上の例題のような対角化はできない。しかし直交行列による三角化はできる (定理 10.6 参照)。

練習 15.7 上の練習の (ii) の  $\mathbf{A}$  について、直交行列  $\mathbf{P}$  を、以下のように求めて、三角化せよ。

```
clear
A=[0 0;2 0];
[V,L]=spec(A)
P=[V(:,1) [-V(2,1);V(1,1)]]
inv(P)*A*P
```

$V(:,1)$  という表現については、次の節を参照すること。

## 15.5 行列の全成分を表す「:」の利用

Scilab で行列  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$  としたときに、 $\mathbf{A}$  で、(2,3) 成分を  $b$  に代入したいときは、

$$b=A(2,3)$$

などと入力すればよい。また  $i$  ( $i$  は数字) 行目全体のベクトルを  $b$  としたいときは、

$$b=A(i,:)$$

でよい。同様に  $j$  ( $j$  は数字) 列目全体のベクトルを  $b$  としたいときは、

$$b=A(:,j)$$

とすればよい。似たように  $\mathbf{A}$  の最初の 2 行 2 列の行列がほしいときは、

$$b=A(1:2,1:2)$$

とすれば得られる。

## 15.6 spec 関数と 12 章の実習

$\mathbf{A}$  が 2 次実対称行列であれば、直交行列  $\mathbf{P}$  で対角化されることを、数値例で、簡単に見てみよう。

例題 15.8 次のコマンドを打ち込め.

```
clear
A=[10 3;3 2];
[P,L]=spec(A)
P'-inv(P)
inv(P)*L*P-A
```

4行目から  $P$  の転置行列  $P'$  が,  $P$  の逆行列と等しいことがわかり, 5行目から,  $P$  によって  $A$  が,  $L$  に対角化されることがわかるであろう.

### 15.7 よく使われる関数 (1): eye,zeros,ones

単位行列  $I$  や, ゼロ  $O$  は今までの説明でもよく使った.

例題 15.9 次のコマンドを打ち込め.

```
clear
A=eye(4,4)
B=zeros(3,2)
C=ones(1,5)
```

このレジュメで, 単位行列を  $I$  で表した理由は, 実はこのコマンド `eye` を使いたいためだったのである. 先に書いたように日本の教科書では  $E$  を用いることが多い.

### 15.8 よく使われる関数 (2): sum,mean

行列の成分の和や平均を表すこの2つの関数は, 統計計算その他でよく使われるので, ここで紹介しておこう.

例題 15.10 次のコマンドを打ち込め.

```
clear
A=[1 2 3;4 5 0]
sum(A)
sum(A,1)
sum(A,2)
mean(A)
mean(A,1)
mean(A,2)
```

`sum(A)`, `mean(A)` のように第 1 引数のみであれば, 全体の和や平均を返す. 第 2 引数が 1 のときは, 列ごとの和や平均を返す. 第 2 引数が 2 のときは, 行ごとの和や平均を返す.

### 15.9 成分ごとの掛け算・割り算・べき乗: 「.\*」 「./」 「.^」 の利用

行列の掛け算は `*` であった. しかし, 行列の掛け算ではなく, 同じ成分で行列のごとに掛け算をしたい場合もある. そのときには題名のように, 「.」 を利用する.

例題 15.11 次のコマンドを打ち込め.

```
clear
A=[1 0; 3 4]
B=[1 2; 10 100]
A.*B
A./B
A.^2
A.^B
```

4 行目は  $A * B$  と, 6 行目は  $A^2$  と間違えないように.

### 15.10 等差数列を返す行ベクトル: 「:」 の利用

Scilab で  $a = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)$  がほしい時に,

```
a=[1 2 3 4 5 6]
```

と打ち込むのは手間がかかる. 6 ぐらいならまだしも, 1 から 100 までなどは到底無理である. そこで表題のようなコマンドが用意されており, 上の  $a$  の式は

```
a=[1:6]
```

で簡単に書ける. また, 差分が 1 ではないときには,

最初の値:差分:最後の値

の形式で書けばよい.  $b = (-2 \ 0 \ 2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10)$  がほしい時には,

```
b=[-2:2:10]
```

で得られる. 列ベクトルにしたいときは, 最後に 「`'`」 を付ければよい.

## 第 III 部

主に  $2 \times 2$  までの複素行列の計算

## 16 複素数入門

## 16.1 複素数の定義と四則

$a, b, c$  を実数とする以下の  $x$  の 2 次方程式 (ただし  $a \neq 0$ )

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (16.1)$$

については,

- (i).  $b^2 - 4ac > 0$  ならば,  $x$  は 2 つの異なる実数解  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  を持つ.
- (ii).  $b^2 - 4ac = 0$  ならば,  $x$  は実数の重複解  $x = -\frac{b}{2a}$  を持つ.
- (iii).  $b^2 - 4ac < 0$  ならば,  $x$  は実数解を持たない.

としてきたことであろう. もちろんこれら (i)(ii)(iii) は正しいことを言っている. が, (iii) の「実数解を持たない」ではなくて, 実数を少し拡張したいと考えるのは自然なことであろう.

数というものはかつては正の整数・正の有理数あたりまでしか定義されなかった. やがて 0, 負の数, 無理数という概念を獲得して, 少しずつ数というものが拡張されて来たのである. そこで, さらに実数を以下のように拡張することとなったのである.

まず上の 2 次方程式の基本的な形で,  $a = 1, b = 0, c = -1$  にすると,

$$x^2 = -1 \quad (16.2)$$

である. これを満たす (実数ではない) 解の一方を

$i$

で表す<sup>\*10\*11</sup>. その結果 (16.2) 式のもう一方の解は  $-i$  である. そして, 数の集合

$$\{a + bi | a, b \text{ は実数}\} \quad (16.3)$$

を, 複素数と呼び, その集合を  $C$  で表すのである. 実数の集合は  $R$  と表す.  $R$  は (16.3) 式の  $b = 0$  の場合だから,

$$R \subset C$$

つまり, 実数の集合は複素数の集合に含まれる.

四則演算などについては, 以下のように定義する.

**定義 16.1**  $a, b, c, d$  は実数とする. 2 つの複素数  $z = a + bi, w = c + di$  について, 以下の計算が成り立つ.

$$(i). \quad z + w = w + z = (a + c) + (b + d)i$$

<sup>\*10</sup> 文字としての  $i$  を多用する場合は,  $\sqrt{-1}$  と使う場合もある. 数論などの分野などでも  $\sqrt{-5}$  のように使うことが多い.

<sup>\*11</sup> 行列での添字で  $i$  をよく用いている. そこで混乱を防ぐためにこのレジュメでは,  $\sqrt{-1}$  を太字の  $\mathbf{i}$  で表している.  $i$  と  $\mathbf{i}$  が違うことに注意せよ.

(ii).  $zw = wz = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

(iii).  $w \neq 0$  のとき,

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (-ad + bc)i}{c^2 + d^2}$$

(iv).  $b > 0$  のとき,  $\sqrt{-b} = \sqrt{b} i$

この計算の定義より, 複素数  $z_1, z_2, z_3, z, w$  について, 以下のことがいえる.

(i). 以下の分配法則が成り立つ.

$$(z_1 + z_2)z_3 = z_3(z_1 + z_2) = z_1z_3 + z_2z_3$$

(ii).  $z$  が与えられたとき,  $z + w = w + z = 0$  を満たす  $w$  が唯一存在する.(iii).  $1 \cdot z = z \cdot 1 = z$ (iv).  $z \neq 0$  が与えられたとき,  $zw = wz = 1$  を満たす  $w$  が唯一存在する. そのような  $w$  を  $z^{-1}$  で表す.

複素数  $a + bi$  で  $b = 0$  のものを, 実数であることはすでに示した. 複素数の中で特別なものである. よって他にも,

- 複素数  $a + bi$  で  $b \neq 0$  のものを, 虚数という.
- 複素数  $a + bi$  で  $a = 0, b \neq 0$  のものを, 純虚数という.

と定義する. もちろん「純虚数の集合  $\subset$  虚数の集合  $\subset \mathbf{C}$ 」がいえる.

## 16.2 実数での数直線と複素数での複素平面

小学校以来, 実数では数直線を用いて, その 1 点と実数を対応させてきた. しかし複素数で  $a + bi$  ( $b \neq 0$ ) という形のは, その直線上にはもちろん存在しない. そこで普通は「直線がだめなら平面で考えればよい」と考えるだろうし, 実際そのように平面上の 1 点と複素数の値を対応させることをここで説明しよう.

複素数  $a + bi$  を考えるときには, 実数の部分  $a$  を表すものを横軸 (これを実軸という) に,  $i$  の係数の実数  $b$  を表すものを縦軸 (これを虚軸という) にとった複素平面というものを定義する. 数直線に右端と同様に, 横軸の右端は  $\rightarrow$ , 縦軸の上端は  $\uparrow$  のように, 方向の矢印は書いておく. しかし  $xy$  平面で書くような,  $x$  や  $y$  といったものは書かない. 実際, 小学生の時に書いた数直線にも, 数字は書いたとしても文字などは何も書かなかったことであろう.

そうしてできた平面の座標で, 横軸が  $a$  で縦軸が  $b$  の点  $(a, b)$  と, 複素数  $a + bi$  を対応させるのである. こうすることにより, 複素平面上の 1 点と, 1 つの複素数が対応する のである. また実数の数直線も, この平面の横軸と一致するので, 実数は複素数の一部として表現される.

数直線上の点と, 実数全体が 1 対 1 に対応していたのと同様に, 複素平面上の点と, 複素数全体とが 1 対 1 に対応するのである.

ところで  $xy$  平面上で,  $r > 0$  の定数としたとき,  $x^2 + y^2 = r^2$  というのは, 半径  $r$  の円を表した. また単位円  $x^2 + y^2 = 1$  上の任意の 1 点は,  $0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲で,  $(\cos \theta, \sin \theta)$  と表された.

この 2 つから, 0 以外の複素数は  $a + bi$  という形以外の形式で書ける. 0 以外の複素数は, 複素平面上の 1

点と考えると,  $r > 0$  と実数  $\theta$  で

$$a + bi = r \cos \theta + i \sin \theta \quad (16.4)$$

と表現できる. このように複素数を 2 つの実数  $r$  と  $\theta$  で表す形式を極形式という.  $\theta$  も範囲を例えば  $0 \leq \theta < 2\pi$  や,  $-\pi < \theta \leq \pi$  のように決めておけば, 原点以外の複素平面上の点と  $r, \theta$  の組は, 1 対 1 に対応する. 当然このとき,  $(a, b)$  と  $(r, \theta)$  は 1 対 1 の関係である.

極形式は, 複素数の掛け算に有用である. 例えば  $z = (a + bi)$  とするとき ( $z \neq 0$  とする), 三角関数の倍角の公式より,

$$z^2 = (a + bi)^2 = r^2(\cos \theta + i \sin \theta)^2 \quad (16.5)$$

$$= r^2(\cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta) \quad (16.6)$$

$$= r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \quad (16.7)$$

が言える. これより  $r = 1$  として, 数学的帰納法から以下が簡単に言える.

**定理 16.2** (ド・モアブルの公式)  $n$  は整数,  $\theta$  は実数とすると, 以下が成り立つ.

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

」

また  $z = a + bi$  が与えられたとき,  $a - bi$  を  $z$  の共役複素数 (きょうやくふくそすう) といい,  $\bar{z}$  で表す. よって, 複素数  $z$  について

$$z = \bar{z} \iff z \text{ は実数}$$

である. 共役複素数については, 次のように, 和と積についての計算が成り立つ.

$$(i). \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$(ii). \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$$

実数と複素数の違いに関しては, 特に複素数の大小は定義されないことが大きな違いである. 実数については, 2 つの実数  $a, b$  が存在すると,

$$a < b, a = b, a > b$$

の 3 つのうち 1 つのみが必ず成り立った. しかし複素数ではそのようなことはできないのである. それでは多少困ることがあるので, 次節で複素数  $z$  の絶対値  $|z|$  を定義したい.

### 16.3 複素平面と複素数の絶対値の定義

複素平面で  $z = a + bi$  を考えよう.  $z$  の表す点と原点の距離は  $\sqrt{a^2 + b^2}$  となる. これを  $z$  の絶対値とするのは自然であろう. さらに実数  $a$  があつた時,  $|a| = \sqrt{a^2 + 0^2}$  となり, 実数の絶対値の場合も含まれるのである. ところで  $z = a + bi$  ならば,  $\bar{z} = a - bi$  であり,

$$a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi) = z\bar{z}$$

が成り立つから,

定義 16.3 複素数  $z$  が与えられたとき, 絶対値  $|z|$  を

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

と定義する. 実数  $a, b$  によって, 複素数  $z = a + bi$  が与えられたとき, 以下が成り立つ.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$|z|$  は (0 以上の) 実数なので, 大小関係が計算される.

定理 16.4 複素数  $z, w$  について, 以下が成り立つ.

- (i). (非負性)  $|z| \geq 0$
- (ii).  $|z - w| = 0 \iff z = w$
- (iii). (対称性)  $|z - w| = |w - z|$
- (iv). (三角不等式)  $|z + w| \leq |z| + |w|$

#### 16.4 \* 複素数係数の 2 次方程式の解と係数の関係

ここでは, 複素数係数の 2 次方程式の解と係数の関係が, 実数係数の場合とまったく同じになることを示す.

(16.1) 式で,  $b^2 - 4ac < 0$  の場合の一方の解は,

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{4ac - b^2}i}{2a}$$

とあらわされ, もう一方の解は,

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{4ac - b^2}i}{2a}$$

で表される. つまり (16.1) 式で,  $b^2 - 4ac < 0$  の場合は,  $x$  は 2 つの異なる虚数解

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}i}{2a}$$

を持つといえる. 2 つの和と積はそれぞれ,  $-b/a, c/a$  となるので, 実数の場合も含めると, 2 次方程式の解と係数の関係が, 複素数の場合も成り立つ

命題 16.5 (解と係数の関係)  $a, b, c$  が実数である  $x$  の 2 次方程式 (ただし  $a \neq 0$ )

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の 2 解を  $\alpha, \beta$  とすると,

$$\alpha + \beta = -b/a, \quad \alpha\beta = c/a$$

この 2 次方程式は、複素数解の範囲では、重複も含めて解が 2 個存在することがいえる。証明はしないが、一般には

**定理 16.6** (代数学の基本定理) 複素数係数  $c_0, c_1, \dots, c_n$  の複素数  $z$  の  $n$  次方程式 (ただし  $c_0 \neq 0$ )

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z + c_n = 0$$

の解の個数は、重複も含めて  $n$  個である。 ┘

が成り立つ。この定理より、上の方程式の解を (重複も含めて)  $z_1, z_2, \dots, z_n$  とすると、左辺は

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z + c_n = c_0 (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

と  $z$  の 1 次式によって因数分解できるのである。当然 2 次式にもいえるので、

**命題 16.7** (複素係数の解と係数の関係)  $a, b, c$  (ただし  $a \neq 0$ ) が複素数である  $z$  の 2 次方程式

$$az^2 + bz + c = 0$$

の 2 解を  $z_1, z_2$  とすると、

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

注意: この証明は代数学の基本定理から、簡単に言える。しかしこのレジュメでは、 $2 \times 2$  の行列までは、計算によっていろんな結果を出すことを目的としているので、証明 2 として、計算中心の証明を載せておく。

(注意終)

**証明 1**(代数学の基本定理を用いる証明): 解は必ず 2 解  $\alpha, \beta$  存在する。上でのベタ因数分解によって、

$$az^2 + bz + c = a(z - \alpha)(z - \beta)$$

がいえる。展開して  $z$  の係数を比較することにより、命題がいえる。 □

**証明 2**(代数学の基本定理を用いない証明): 解が 2 個存在することと、解と係数の関係の両方を示す。平方完成を用いると、 $az^2 + bz + c = 0$  は

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{16.8}$$

と同値である。

(1)  $b^2 - 4ac = 0$  の場合は、解は  $z = -\frac{b}{2a}$  の重複解となる。この時、2 解の和は  $-b/a$  である。2 解の積は、 $\frac{b^2}{4a^2}$  となる。 $b^2 = 4ac$  を代入して、 $\frac{c}{a}$  となり、命題が成り立つ。

(2)  $b^2 - 4ac \neq 0$  の場合を考える。複素平面での極形式を考えると、ある実数  $r > 0$  と、ある実数  $\alpha$  (ただし  $0 \leq \alpha < 2\pi$ ) によって、

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = r(\cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha)$$

と表される。またこの  $r, \alpha$  以外は存在しない。

次に,  $z + \frac{b}{2a}$  は, ある実数  $t > 0$  と, ある実数  $\theta$  によって極形式で,

$$z + \frac{b}{2a} = t(\cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta) \quad (16.9)$$

で表される. (16.8) 式にこの 2 式を代入すると,

$$t^2(\cos 2\theta + \mathbf{i} \sin 2\theta) = r(\cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha) \quad (16.10)$$

である. よって,  $t = \sqrt{r}$  かつ,  $2\theta - \alpha = s \cdot 2\pi$  ( $s$  は任意の整数) がいえる.

$s$  が整数が全整数を渡ったとしても, 周期性より  $\theta = \alpha/2$  と  $\theta = \alpha/2 + \pi$  の 2 通りのみを考えればよい.

$\theta = \alpha/2 + \pi$  のときは,  $\cos \theta = \cos(\frac{\alpha}{2} + \pi) = -\cos \frac{\alpha}{2}$ ,  $\sin \theta = \sin(\frac{\alpha}{2} + \pi) = -\sin \frac{\alpha}{2}$  なので,  $\theta = \alpha/2$  の場合と合わせて, (16.9) より,  $az^2 + bz + c = 0$  の 2 解は

$$-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{r} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

と書ける. 2 つの解の和は明らかに  $-\frac{b}{2a} \cdot 2$ , つまり  $-\frac{b}{a}$  である. 2 つの解の積は,

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{b}{2a} + \sqrt{r} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \right] \left[ -\frac{b}{2a} - \sqrt{r} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \right] \\ &= \frac{b^2}{4a^2} - \left[ \sqrt{r} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \right]^2 \\ &= \frac{b^2}{4a^2} - r(\cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha) \\ &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

□

## 17 複素ベクトルのエルミート内積: 第 I 部・第 II 部の拡張

成分が複素数のベクトルを複素ベクトルといい, 同様に, 成分が複素数の行列を複素ベクトルという.

復習もかねて, 第 1 部・第 2 部で成り立ったことが, 「複素ベクトル・複素行列・スカラーも複素数」, という場合についても成り立つかどうかを, 考えてみよう.

- 1 章の計算については, 平面座標の 1.3 章以外は, 全く同様に計算できる.
- 2 章では, 一番最後の直交行列の定義 2.9 以外は, 全て同様に成り立つ. 直交行列というのは, 実行列についてのものである. 複素行列の場合には, それを拡張したユニタリー行列というものを定義する(後述).
- 3 章 (2 次正方行列の逆行列) から 6 章 (2 × 2 までの行列の積を, 分割した行列で表す) までは, 複素行列や複素数でも同様に成り立つ.
- 7 章 (2 × 2 の行列の固有値と固有ベクトル) についても計算は全く同様である. また定義 7.1 の下の説明については, 2 次正方行列の固有値は, 重複も含めて必ず 2 つ存在する. 「必ず 2 つ存在する」という点は実行列とは異なる点である.

- 8 章 (実ベクトルの内積とベクトルの大きさ) は, 題名を見た通り実数での話である. 複素数ではこのままでは成り立たない. 複素数のベクトルの場合では, この章で説明するエルミート内積を用いる.
- 9 章は 実数の平面のことなので, この章ではこれ以上のことはしない.
- 10 章 (2 次実正方行列の直交行列と三角化・対角化) から, 12 章 (2 次実正方行列の対称行列の性質) も, 実数で成り立つことである. 複素数については次の 18 章で説明する.
- このレジュメでは, 2 次形式は実数の場合のみを取扱うので, 13 章 ( $n$  次実正方行列による, 2 次形式の定義) と, 14 章 (2 次正方行列と 2 次形式) については, 複素数の場合への拡張は考えない.

この章では 8 章の拡張を考える. つまり実ベクトルの内積を拡張した複素ベクトルの内積を定義する. まず転置行列と共役複素数を組み合わせた, 随伴行列を定義する.

定義 17.1 成分が複素数の  $m$  行  $n$  列の行列  $A$  について,

- $A$  の全ての成分を共役複素数にした行列を,  $\bar{A}$  で表す.
- $\bar{A}$  を転置した  $n$  行  $m$  列の行列を  $A$  の随伴行列と定義し,  $A^*$  で表す. 式で書くと,

$$A^* = {}^t(\bar{A})$$

- から言えることで,  $m$  行  $n$  列の行列  $A$  について

$$A = \bar{A} \iff A \text{ の成分が全て実数}$$

は簡単であろう.

(ii) については, まず  $*$  が  $A$  の右上についていることに注意してほしい. 右横ではない. また, 随伴行列は転置行列の計算と, 共役複素数の計算の両方をするものなので, 以下も簡単に理解できるであろう.

- 行列の積  $AB$  が存在するとき,  $(AB)^* = B^*A^*$
- 複素数  $c$  と行列  $A$  について,  $(cA)^* = \bar{c}A^*$
- $(A^*)^* = A$

さて, このバーをとって転置するという随伴行列を使うと, 内積が行列の計算によって, きれいに定義できる.

定義 17.2 複素数成分の, 2 つの  $n$  項列ベクトル  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  について,

- エルミート内積  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  を,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^* \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$$

で定義する.

(ii). 複素ベクトル  $\mathbf{x}$  の大きさを

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \cdots + x_n \bar{x}_n} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i}$$

で定義する.

$\mathbf{x}$  の成分が 1 のとき, つまり  $\mathbf{x} = z$  という複素数のときは, (ii) から  $|\mathbf{x}| = \sqrt{z \bar{z}} = |z|$  となっている. また, このエルミート内積について  $\mathbf{x}$  や  $\mathbf{y}$  が実数の場合を考えると, それは定義 8.1 で定義した実数の内積と一致することもいえる. つまり実数の内積を複素数に拡張したものであるといえる.

エルミート内積の主な性質は, 以下である.

定義 17.3  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$  は複素数とし,  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  は複素数成分の  $n$  項列ベクトルとする. エルミート内積について, 以下が成り立つ.

- (i).  $\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
- (ii).  $\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
- (iii).  $\langle (\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \lambda_1 \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \lambda_2 \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
- (iv).  $\langle \mathbf{x}, (\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda_1 \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \lambda_2 \mathbf{y} \rangle$

特に (ii) が重要である. この (ii) の性質が, このプリントの最後の方に出てくる, 「実対称行列の固有値が実数のみである」という証明のキーとなる.

定義 17.4 (複素列ベクトルの基準化)  $n$  項複素列ベクトル  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  について, ベクトル

$$\frac{1}{|\mathbf{x}|} \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^* \mathbf{x}}} \mathbf{x}$$

は大きさ 1 のベクトルとなる. これを  $\mathbf{x}$  を基準化したベクトルという.

## 18 \*\* ユニタリ行列と $2 \times 2$ の複素行列の三角化・対角化

実行列の直交行列を拡張するものとして, ユニタリ行列が定義される.

定義 18.1 複素数成分の  $n$  次正方行列  $\mathbf{U}$  が以下をみたすとき,  $\mathbf{U}$  をユニタリ行列という.

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^* = \mathbf{U}^* \mathbf{U} = \mathbf{I} \tag{18.1}$$

英語では unit は 1 単位という意味がある. 行列だと単位といえば 1 ではなく単位行列  $\mathbf{I}$  なので, 「unitary matrix」だと, 「単位行列になる行列」とか, 「単位行列を作る行列」などのような意味あいがある.

逆行列の定義より,  $\mathbf{U}$  がユニタリ行列ならば,  $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^*$  であり, 正則行列である.

対称行列の拡張として, エルミート行列などが定義されている.

定義 18.2 複素数成分の  $n$  次正方行列  $\mathbf{A}$  について,

- (i).  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$  を満たすとき,  $\mathbf{A}$  をエルミート行列と呼ぶ.
- (ii).  $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$  を満たすとき,  $\mathbf{A}$  を歪エルミート行列と呼ぶ.
- (iii).  $\mathbf{A}^* \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^*$  を満たすとき,  $\mathbf{A}$  を正規行列と呼ぶ.

」

エルミートは人名である. 正規行列は, エルミート行列を含む. よって実直交行列も含む. また歪エルミート行列やユニタリ行列も含むので, 後者からは直交行列も含んでいることがいえる. 当然単位行列も含んでいる. わかりにくいだろうから, 包含関係を  $\implies$  を用いたイメージで書くと,

- 単位行列  $\implies$  直交行列  $\implies$  ユニタリ行列  $\implies$  正規行列
- 単位行列  $\implies$  実対角行列  $\implies$  実対称行列  $\implies$  エルミート行列  $\implies$  正規行列

何回か述べているように, 直交行列は, 実行列であることに注意すること. このように, 正規行列とは, 今までにいろいろと学んできた特別な行列を含む行列である. 重要な証明はこの章の最後に出てくる.

さて, この  $n$  次までの定義を用いて, 以下では具体的に  $2 \times 2$  の行列の 10 章 ( $2 \times 2$  の行列の直交行列と三角化・対角化) から, 12 章 ( $2 \times 2$  の行列での実対称行列の性質) までの, 複素数への拡張を述べよう. 次の証明は,  $2 \times 2$  の直交行列の三角化の証明 (定理 10.6 の証明) とほとんど同じである. 比較するとよい.

定理 18.3 任意の 2 次行列  $\mathbf{A}$  は, 2 次の適当なユニタリ行列  $\mathbf{U}$  によって, 対角成分が固有値となる三角行列に三角化できる. 式で書くと,

$$\mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & u \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

であり,  $\lambda_1, \lambda_2$  は  $\mathbf{A}$  の固有値である.  $u$  は適当な複素数である. 」

証明  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  とし, この固有値を  $\lambda_1, \lambda_2$  とする. また  $\lambda_1$  の固有ベクトルを  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とし, すでに基準化しているものとする.  $a, b, c, d, \lambda_1, \lambda_2, x, y$  は複素数である. 以上より,

$$ax + by = \lambda_1 x \quad (18.2)$$

$$cx + dy = \lambda_1 y \quad (18.3)$$

$$x\bar{x} + y\bar{y} = 1 \quad (18.4)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d \quad (18.5)$$

が成り立つ. ただし (18.5) 式が成り立つのは,  $\mathbf{A}$  の固有方程式の解と係数の関係からである.

さて, この  $x, y$  を用いて

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix} \quad (18.6)$$

とする. この  $\mathbf{U}$  はユニタリ行列である (計算してみよ). この  $\mathbf{U}$  を用いて,

$$\begin{aligned}
U^{-1}AU &= \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix} \\
(18.2) \text{ 式と } (18.3) \text{ 式より} &= \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 x & -a\bar{y} + b\bar{x} \\ \lambda_1 y & -c\bar{y} + d\bar{x} \end{pmatrix} \\
(18.4) \text{ 式より} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & b\bar{x}\bar{x} + (-a+d)\bar{x}\bar{y} - c\bar{y}\bar{y} \\ 0 & dx\bar{x} - b\bar{x}y - cx\bar{y} + ay\bar{y} \end{pmatrix} \quad (18.7)
\end{aligned}$$

ここで (18.2) 式の両辺に  $\bar{x}$  を, そして (18.3) 式の両辺に  $\bar{y}$  を, それぞれ掛けて移項することによって,

$$bx\bar{y} = \lambda_1 x\bar{x} - ax\bar{x}, \quad cx\bar{y} = \lambda_1 y\bar{y} - dy\bar{y}, \quad (18.8)$$

が成り立つので, これを (18.7) 式の (2, 2) 成分に代入すると,

$$\begin{aligned}
(18.7) \text{ 式の } (2, 2) \text{ 成分} &= dx\bar{x} - b\bar{x}y - cx\bar{y} + ay\bar{y} \\
&= dx\bar{x} - (\lambda_1 x\bar{x} - ax\bar{x}) - (\lambda_1 y\bar{y} - dy\bar{y}) + ay\bar{y} \\
(18.4) \text{ 式より} &= a + d - \lambda_1 \\
(18.5) \text{ 式より} &= \lambda_2
\end{aligned}$$

これと (18.7) 式から, 命題が成り立つ.

□

この章の最後として, 正規行列の対角化について証明しよう.

**定理 18.4**  $2 \times 2$  の正規行列  $A$  は,  $2 \times 2$  の適当なユニタリ行列  $U$  によって, 対角成分が  $A$  の固有値である対角行列に, 対角化される. 式で書くと,

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

であり,  $\lambda_1, \lambda_2$  は  $A$  の固有値である. ┘

**証明** 定理 18.3 により,  $2 \times 2$  の適当なユニタリ行列  $U$  と, 適当な複素数  $u$  で

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & u \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (18.9)$$

と三角化される. ここから  $u = 0$  となることを証明すればよい.

(18.9) 式の左から  $U$  を, 右から  $U^{-1}$  を掛け,  $U^{-1} = U^*$  であることから, 以下がいえる.

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & u \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U^* \quad (18.10)$$

この両辺の随伴行列をとると,

$$A^* = U \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ \bar{u} & \bar{\lambda}_2 \end{pmatrix} U^* \quad (18.11)$$

正規行列の定義式の  $AA^* = A^*A$  に, (18.10) 式と, (18.11) 式を代入すると,

$$U \begin{pmatrix} \lambda_1 & u \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U^* U \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ \bar{u} & \bar{\lambda}_2 \end{pmatrix} U^* = U \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ \bar{u} & \bar{\lambda}_2 \end{pmatrix} U^* U \begin{pmatrix} \lambda_1 & u \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U^*$$

上の式で  $U^*U = I$  である。さらに、両辺の左から  $U^*$  掛けて、右から  $U$  を掛けると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_1 & u \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ \bar{u} & \bar{\lambda}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ \bar{u} & \bar{\lambda}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & u \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \bar{\lambda}_1 + u \bar{u} & u \bar{\lambda}_2 \\ \lambda_2 \bar{u} & \lambda_2 \bar{\lambda}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 \lambda_1 & \bar{\lambda}_1 u \\ \bar{u} \lambda_1 & u \bar{u} + \bar{\lambda}_2 \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (18.12)$$

この両辺の成分を比較すると、この式は  $u = 0$  と同値である。 $u = 0$  を (18.9) 式に代入して、命題が成り立つ。

□

この証明でもわかるように、複素数  $z$  では、大小比較はできなくとも、 $|z|^2 = z\bar{z} \geq 0$  であることや、

$$z\bar{z} = 0 \iff z = 0$$

のように、 $z\bar{z}$  による比較ができるのである。

2 次の正規行列は、適当なユニタリ行列によって対角化できることを、ここで証明した。 $n$  次正規行列についての証明は、参考文献をみるとよい。

## 19 第 III 部の Scilab 実習

ここでは III 部の復習として Scilab の実習をまとめて行う。

### 19.1 随伴行列 (実行列なら転置行列) を返す' と, sqrt 関数・norm 関数

ここでは 15.2 節の複素数への応用である。

練習 19.1 次のコマンドを打ち込め。

```
clear
b=[1+%i;2-%i]
b'
b'*b
sqrt(b'*b)
norm(b)
sqrt(b(1,1))
sqrt(b)
```

」

ここでは、まず表題の随伴行列理解してほしい。3 行目で  $b'$  が  $b$  の随伴行列となっていることを確認してほしい。それ以外では、

- (i). `%i` で、虚数単位  $i$  を表している。
- (ii). `sqrt` 関数と `norm` 関数があり、引数が複素数の場合でもともに値を返している。

`clear` は、Scilab 内にある変数および、読み込んだ自作関数を、全て消去するというコマンドである。

`sqrt` 関数は、15.2 節でも説明したのだが、Scilab ではさらに拡張して、 $a$  が複素数でも以下の値を返す仕様となっているようである (ヘルプにはきちんと書いてない)。

- $a = 0$  のときは、`sqrt(a)` は当然 0 を返す。
- 0 以外の複素数については  $r > 0$ ,  $-\pi < \theta \leq \pi$  として、 $a$  を  $a = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  と極形式で表したときに、`sqrt(a)` は、 $\sqrt{r}(\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2))$  を返す。  $0 \leq \theta < 2\pi$  ではないことに気を付けること。

従って  $a < 0$  のときに `sqrt(a)` と打ち込むと、 $\sqrt{|a|}i$  が返ってくる。  $a$  の代わりに行列を入れると、成分ごとに計算した値が返ってくる。

$a \neq 0$  の複素数の場合  $x^2 = a$  を満たす複素数  $x$  は 2 つあるのだが、Scilab の関数 `sqrt(a)` は、その片方のみを返すのである。最後の `sqrt(b)` からわかるように、 $b$  がベクトルの場合は、それぞれの成分について計算した値が返ってくる。

次に `norm` 関数を見てみよう。実数の列ベクトルの大きさを表すのが、ユークリッドノルムと定義した。実数からさらに拡張して、 $\mathbf{b}$  が複素数の列ベクトルの場合は、エルミート内積を用いて、 $\sqrt{\mathbf{b}^* \mathbf{b}}$  を  $\mathbf{b}$  のノルムと定義した (定義 17.2 を参照のこと)。そこで上の実習で、`norm(b)` の値と、 $\mathbf{b}' * \mathbf{b}$  の平方根が等しいことから、`norm(b)` は複素列ベクトルのノルムを返すことがわかるであろう。

練習 19.2 次のコマンドを順に打ち込み、`sqrt` 関数について理解せよ。

```
clear
A=[1 2;0 -25]
sqrt(A)
```

」

## 19.2 複素数でも、固有値と固有ベクトルを返す `spec` 関数

複素数の範囲でも、`spec` を使うことができる。

練習 19.3 次のコマンドを打ち込め。

```
clear
A=[0 -2;8 0]
[U,L]=spec(A)
inv(U)*A*U
```

」

この  $A$  は  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$  と実 2 次正方行列であるが、固有値は  $\pm 4i$  の 2 つである。15.4 節で説明したように、 $A$  の固有値が  $L(1,1)$  のときの、(基準化された) 固有ベクトルが  $U$  の 1 列目である。  $A$  の固有値が  $L(2,2)$  のときの、(基準化された) 固有ベクトルが  $U$  の 2 列目である。

今の場合固有値の値が異なるので、複素行列  $U$  によって、 $A$  が  $L$  に対角化されることが 4 行目からわかるであろう。

## 第IV部

## 3 × 3 の行列を中心に

## 20 \* 3 × 3 の行列の行列式はどうあるべきか

普通の工学系テキストでは、先を急がなければならないので行列式を先に定義してそこから論じているものが多い。が、我々は文系なので、ゆっくりと進めることにする。そういうわけで、行列式はどうあるべきかを考えた後に、行列式を定義することにしよう。この章の数は全て実数とする。

さて、2 × 2 の行列  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の行列式は、 $\det(\mathbf{A}) = ad - bc$  と定義した。では

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (20.1)$$

という 3 × 3 の行列については、 $\mathbf{A}$  の行列式  $\det(\mathbf{A})$  はどうあるべきか。やはり 2 × 2 の場合と同様に、逆行列を持つか否かの判別式となるべきであろう。そこでそのような判別式を探していこう。まず以下の  $x_1, x_2, x_3$  についての方程式を行列にしたものを考える。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20.2)$$

2次正方行列の結果から、「この解が  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  のみのとき、 $\mathbf{A}$  は逆行列を持ち、そうでない場合は、 $\mathbf{A}$  は逆行列を持たない」というように、したい。

では最初に  $\mathbf{A}$  の 2 列目までを見ておこう。

[手順 1] ある数  $s, t$  ( $s, t$  の少なくとも一方は非 0) が存在して、

$$s \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \quad (20.3)$$

が成り立つとき、

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} s \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} s \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つので、 $\mathbf{A}$  は逆行列を持たない。

[手順 2] では次に (20.3) 式が成り立たない場合を考えよう。2次正方行列の結果から、(20.3) 式が成り立つことは、

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = 0 \quad (20.4)$$

が全て成り立つことと同値である。よって、(20.4) 式が成り立たない場合を考える。つまり 3 つの行列式のうちの、少なくとも 1 つは非 0 である場合を考えるのである。ところで、 $\mathbf{A}$  の行の入れ替えについては、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

がいえるので, (20.4) の 3 つの行列式のうちの, 少なくとも 1 つは非 0 であるということは,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (20.5)$$

を仮定しても一般性は失わないことを意味する. よってこれを仮定しよう. (20.2) 式を書き直せば,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20.6)$$

$$(a_{31} \ a_{32}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a_{33}x_3 = 0 \quad (20.7)$$

の 2 つの式である. (20.6) 式の左辺第 2 項を右辺に移項して, 左から  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  の逆行列を書けると,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} x_3 \quad (20.8)$$

となる. これを, (20.7) 式に代入することによって,

$$\left[ - (a_{31} \ a_{32}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} + a_{33} \right] x_3 = 0$$

逆行列を成分で表示して, さらに両辺を  $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$  倍すると,

$$\left[ - (a_{31} \ a_{32}) \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \right] x_3 = 0 \quad (20.9)$$

この左辺の [ ] 内が非 0 ならば, この式を満たす解は  $x_3 = 0$  のみであるが, そうでないならば,  $x_3 = 0$  以外の解をもつ. (20.8) 式と考え合わせれば, (20.9) 式の左辺の [ ] 内が非 0 であるとき, そのときのみ, ((20.5) 式の仮定の下で) (20.2) 式の解は  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  のみとなる. つまり  $\mathbf{A}$  は逆行列を持つ.

よって, (20.9) 式の左辺の [ ] 内を  $3 \times 3$  の行列式にすればよさそうである. 展開して,

$$a_{11}a_{12}a_{13} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \quad (20.10)$$

[手順 3] あとは, (20.3) 式が成り立つ場合, (20.10) 式が 0 になることを示さなければならないが, 代入して計算すれば, 0 になることは簡単に示すことができる.

よって, ようやく以下の定義と定理がいえる.

定義 20.1  $3 \times 3$  の行列  $\mathbf{A}$  を,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

とするとき, その行列式  $\det(\mathbf{A})$  を

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

とする. J

定理 20.2  $3 \times 3$  の行列  $\mathbf{A}$  について, 以下は同値である.

- (i).  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$   
(ii).  $\mathbf{A}$  は逆行列を持つ.

┘

$2 \times 2$  の行列のときの行列式の性質 (定理 5.2) が, 今の場合も同様に成り立つのだが, 1 つ 1 つ確かめるのは大変である.. ここでは 1 つだけ取り上げておこう.

定理 20.3  $3 \times 3$  の行列  $\mathbf{A}$  について,

- (i). ある行と別の行を入れ替えた行列の行列式は,  $-\det(\mathbf{A})$  である.  
(ii). ある列と別の列を入れ替えた行列の行列式は,  $-\det(\mathbf{A})$  である.

┘

証明 1 行目と 2 行目を入れ替えてみよう.  $\mathbf{A}$  は定義 20.1 の通りとする.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{21}a_{12}a_{33} + a_{22}a_{13}a_{31} + a_{23}a_{11}a_{32} - a_{23}a_{12}a_{31} - a_{22}a_{11}a_{33} - a_{21}a_{13}a_{32} \\ &= -(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) \\ &= -\det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

他の場合も同様である. □

## 21 \* $3 \times 3$ の連立方程式のクラメールの公式

(20.1) 式が与えられたときに  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  の場合の逆行列を求めたいのだが, それは次章に回す. まず次の連立 1 次方程式を考えて, その解の公式にあたるものを求めよう.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (21.1)$$

前章と同様に  $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$  を仮定しても一般性は失わないので, そのように仮定する. これを解いていくことにしよう.

すると (20.6) 式・(20.7) 式と同様にして, (21.1) 式は以下の 2 式と同値となる.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (21.2)$$

$$\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a_{33}x_3 = b_3 \quad (21.3)$$

前章と同様に変形する. (21.2) 式を変形すると,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} x_3 \quad (21.4)$$

であり, (21.3) 式に代入すれば, 以下が得られる.

$$(a_{31} \ a_{32}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - (a_{31} \ a_{32}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} x_3 + a_{33}x_3 = b_3$$

逆行列を計算したあと, 両辺に  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  をかけて, 左辺第 1 項を右辺に移項すると,

$$\det(\mathbf{A})x_3 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})b_3 - (a_{31} \ a_{32}) \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (21.5)$$

右辺を続けて計算していくと,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A})x_3 &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})b_3 + (-a_{31}a_{22} + a_{32}a_{21} \quad a_{31}a_{12} - a_{32}a_{11}) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})b_3 - a_{31}a_{22}b_1 + a_{32}a_{21}b_1 + a_{31}a_{12}b_2 - a_{32}a_{11}b_2 \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって,

$$x_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{A})} \quad (21.6)$$

(21.1) 式から, (21.6) 式が導かれた. よって, (21.1) 式を,

$$\begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

と書き換えると, それぞれ,

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & b_1 \\ a_{23} & a_{22} & b_2 \\ a_{33} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{32} \\ a_{31} & a_{33} & a_{22} \end{pmatrix}}$$

が導かれる.  $x_1$  の分子の行列式については, 定理 20.3 より, 1 列目と 3 列目を入れ替えた行列の行列式の  $-1$  倍と等しくなる. つまり,

$$-\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

と等しくなる. 分母の行列も同様の入れ替えをすると, 分母は  $-\det(\mathbf{A})$  となる.

$x_2$  の分子の行列式については, 2 列目と 3 列目を入れ替えた行列式の  $-1$  倍となる. 分母も同様にすると,  $-\det(\mathbf{A})$  となる. 以上を (21.6) 式も含めてまとめると,

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{A})}, \quad x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{A})}, \quad x_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{A})} \quad (21.7)$$

が得られる。2 × 2 と同様に、3 × 3 の場合のクラメールの公式が得られた。

2 × 2 のときも説明したが、クラメールの公式は、 $\mathbf{A}$  が文字の時や、0 や 1 が多い時に役に立つ。また規則的な配列をしているときにも計算しやすい。

## 22 \*\* 3 × 3 の逆行列の式

理論上以下のように計算できるということを示す。逆行列の第  $i$  行  $j$  列だけ知りたいというときには、手計算することもある。が、逆行列全体をこのように実際に計算することはほぼない。とにかくまずは、

$$\det(\mathbf{A}) \neq 0 \text{ ならば逆行列が存在する。}$$

ということを確認してくればよい。

$\mathbf{A}^{-1}$  が存在するならば、 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$  である。(21.1) 式の形から、 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$  について計算するほうが楽なので、これを解く。つまり、 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  として、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる 3 行 3 列の行列  $\mathbf{A}^{-1}$  を求める。

まず  $\mathbf{A}^{-1}$  の 1 列目を  $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}$  とすると、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

クラメールの公式では、(21.1) 式の解が (21.7) 式なのだから、(21.7) 式に  $b_1 = 1, b_2 = 0, b_3 = 0$  を代入して得られた  $x_1, x_2, x_3$  が、それぞれ  $x_{11}, x_{21}, x_{31}$  である。よって、

$$x_{11} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{A})}, \quad x_{21} = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{A})}, \quad x_{31} = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{A})}$$

これらの分子を計算した後に、2 × 2 の行列式の形で書くことができ、

$$x_{11} = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{A})}, \quad x_{21} = \frac{-\det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{A})}, \quad x_{31} = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{A})},$$

と表される。同様に、 $\mathbf{A}^{-1}$  の 2 列目と 3 列目については、それぞれ以下を解けばよい。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

左の式の解は、(21.7) 式に  $b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 0$  を代入すれば得られる。右の式の解は、(21.7) 式に  $b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 1$  を代入すれば得られる。

計算して得られたものをまとめると,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (22.1)$$

## 23 \* 3 × 3 の行列と 2 次形式

この章によって,  $C^2$  級の 3 変数実数値関数  $f(x, y, z)$  についての (狭義の) 極大・(狭義の) 極小についての議論が, 十分に理解できるようになる.

定理 23.1 3 次実対称行列  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  を考える.

(i). 以下の 3 つの不等式が成り立つならば,  $\mathbf{A}$  は正値定符号である.

$$a_{11} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \det(\mathbf{A}) > 0$$

(ii). 以下の 3 つの不等式が成り立つならば,  $\mathbf{A}$  は負値定符号である.

$$a_{11} < 0, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \det(\mathbf{A}) < 0$$

」

証明 (i) の証明:  $x_1, x_2, x_3$  の 3 元 2 次形式  $Q(x_1, x_2, x_3)$  を

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とする. 仮定より,

$$a_{11} > 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{13}a_{12}a_{23} - a_{13}^2a_{22} - a_{23}^2a_{11} - a_{12}^2a_{33} > 0$$

がいえる.  $Q(x_1, x_2, x_3)$  を平方完成を駆使して変形していくと,

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + 2(a_{12}x_2 + a_{13}x_3)x_1 + (a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2) \\ &= a_{11} \left( x_1 + \frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{a_{11}} \right)^2 - \frac{(a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^2}{a_{11}} + (a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2) \\ &= a_{11} \left( x_1 + \frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{a_{11}} \right)^2 + \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)x_2^2 + 2(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})x_2x_3 + (a_{11}a_{33} - a_{13}^2)x_3^2}{a_{11}} \\ &= a_{11} \left( x_1 + \frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{a_{11}} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{a_{11}} \left[ (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \left\{ x_2 + \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} x_3 \right\}^2 - \frac{(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} x_3^2 + (a_{11}a_{33} - a_{13}^2)x_3^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11} \left( x_1 + \frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{a_{11}} \right)^2 + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} \left( x_2 + \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} x_3 \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{a_{11}} \frac{-a_{11}^2 a_{23}^2 + 2a_{11}a_{23}a_{12}a_{13} - a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{11}^2 a_{22}a_{33} - a_{11}a_{12}^2 a_{33} - a_{11}a_{22}a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{13}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} x_3^2 \\
&= a_{11} \left( x_1 + \frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{a_{11}} \right)^2 + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} \left( x_2 + \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} x_3 \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{a_{11}} \frac{-a_{11}^2 a_{23}^2 + 2a_{11}a_{23}a_{12}a_{13} + a_{11}^2 a_{22}a_{33} - a_{11}a_{12}^2 a_{33} - a_{11}a_{22}a_{13}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} x_3^2 \\
&= a_{11} \left( x_1 + \frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{a_{11}} \right)^2 + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} \left( x_2 + \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} x_3 \right)^2 \\
&\quad + \frac{-a_{11}a_{23}^2 + 2a_{23}a_{12}a_{13} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}^2 a_{33} - a_{22}a_{13}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} x_3^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

ところで、この等号が成り立つ必要十分条件は、

$$x_3 = 0, \quad x_2 + \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} x_3 = 0, \quad x_1 + \frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{a_{11}} = 0$$

であるのだが、これは、

$$x_3 = 0, x_2 = 0, x_1 = 0$$

と同値である。よって  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  以外ならば、 $Q(x_1, x_2, x_3) > 0$  であることがいえる。これは、 $\mathbf{A}$  が正値定符号行列であることを意味する。

(ii) の証明:  $-\mathbf{A}$  が正値定符号であることと、 $\mathbf{A}$  が負値定符号であることは同値なので、(i) の結果から言える。

□

このように、高校1年次あたりで学んだ平方完成のみで証明できる。より少ない計算力による証明は、 $n$  次元の固有値・固有ベクトルを学んだ後、39章で説明する。

## 第 V 部

一般の  $n$  次正方行列を中心に24 \*  $4 \times 4$  の行列の行列式はどうあるべきか

20 章と同様にして, 3 次正方行列のクラメールの公式も用いて, 4 次正方行列の行列式はどうあるべきかを探る. この章では細かいことは軽く流し, 項が 24 個出てくる点に注目してほしい.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (24.1)$$

とするとき,  $x_1, x_2, x_3, x_4$  についての連立方程式

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24.2)$$

について,

$$\text{解が } x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \text{ のみ} \iff \text{行列式が非 0}$$

を満たすような式を定義したいというのが, この章の目的である.

[手順 1]

20 章の [手順 1] と同様に,

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24.3)$$

となるスカラー  $s, t, u$  が,  $s = t = u = 0$  以外に存在する場合には,  $\det(\mathbf{A}) = 0$  になるように作りたい. ここではこれ以上計算はしない.

[手順 2]

手順 1 の (24.3) 式をみたす  $s, t, u$  が  $s = t = u = 0$  のみの場合を考える. 20 章の [手順 2] と同様に,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0$$

を仮定しても一般性は失わない. (24.2) 式を書き下すと, 以下の 2 式となる.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24.4)$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0 \quad (24.5)$$

(24.4) 式の左辺第 2 項を右辺に移項して, (21.7) 式のクラメールの公式によって,

$$x_1 = \frac{-x_4 \det \begin{pmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ a_{34} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}, \quad x_2 = \frac{-x_4 \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{13} \\ a_{21} & a_{24} & a_{23} \\ a_{31} & a_{34} & a_{33} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}, \quad x_3 = \frac{-x_4 \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}} \quad (24.6)$$

これを (24.5) 式に代入して、両辺  $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  倍すると、

$$\left[ \begin{array}{l} -a_{41} \det \begin{pmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ a_{34} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{42} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{13} \\ a_{21} & a_{24} & a_{23} \\ a_{31} & a_{34} & a_{33} \end{pmatrix} \\ -a_{43} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{pmatrix} + a_{44} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{array} \right] x_4 = 0$$

この [ ] 内为非ゼロのとき, (24.2) 式の解は,  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$  のみとなる. ゼロのときは, それ以外の解を持つ. よってこの式の [ ] 内を  $\mathbf{A}$  の行列式とするとよさそうである. そこでこれを展開すると, (3次正方行列の行列式の項数である)6項ずつ並べて

$$\begin{aligned} & -a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\ & -a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} \\ & -a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ & + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} \end{aligned} \quad (24.7)$$

である. これが4次正方行列 (24.1) 式の, 行列式の候補である.

[手順3] 本来ならば, (24.3) 式を満たす  $s, t, u$  が  $s = t = u = 0$  以外に存在する場合には, (24.7) 式が0になることを確かめなければならない. しかしそれは, 一般の形で行列式を定義した後, 一般の形で証明する. とにかく, 4次の場合の行列式 (の候補) には項が24個あって, このように定義するとよさそうであることを確認し, 次章を見てほしい.

## 25 $n$ 次正方行列の行列式の定義の準備

2次の場合の行列式は,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (25.1)$$

3次の場合の行列式は,

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ & = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned} \quad (25.2)$$

そして, 4次の場合には, (24.7) 式が候補である.

これらから共通点を探ると,

- (i). 行列式の項数は、2 次のときは項が  $2! = 2$  個、3 次のときは項が  $3! = 6$  個、4 次のときは項が  $4! = 24$  個。
- (ii). 各項は、2 次正方行列のときは2つの数字の積、3 次のときは3つの積、4 次の時は、4つの数字の積となっており、また係数は1か-1
- (iii). 行列内の対角成分の積の項つまり、2 次のときは  $a_{11}a_{22}$ 、3 次のときは  $a_{11}a_{22}a_{33}$ 、4 次のときは  $a_{11}a_{12}a_{33}a_{44}$  があって、それらの係数はすべて1である。
- (iv). 行列式内の各項を見ると、行数も列数にも重複がない。4 次の行列式の候補 (24.7) の最初の項  $-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$  を見てみよう。  $a_{14}, a_{22}, a_{33}, a_{41}$  の値について、行番号をみると1, 2, 3, 4と重複なく1から4まで存在し、列番号を見ると、やはり4, 2, 3, 1と重複なく1から4まで存在している。これがどの項についてもいえる。

(i) と (iv) からは、順列が関係していることが示唆される。(ii) からは、順列によって符号を変えていることが示唆される。(iii) からは、対角成分の積を中心に考えることがよさそうである。

さてそれでは、1 から3 の場合の順列をすべてあげよう。(25.2) 式の順番通りに、正負の表と順列について表にしよう。6つの項について、行数が1, 2, 3のとき、列がいくつになっているかを見てみよう。つまり各項  $a_{1*}a_{2?}a_{3.}$  の形となっているので、\* と ? と . の数字を順に並べたのである。正負については、係数が1のときは正、-1の時は負と書いてある。

	1行	2行	3行	符号
第1項 $a_{11}a_{22}a_{33}$ の列番号	1	2	3	正
第2項 $a_{12}a_{23}a_{31}$ の列番号	2	3	1	正
第3項 $a_{13}a_{21}a_{32}$ の列番号	3	1	2	正
第4項 $a_{13}a_{22}a_{31}$ の列番号	3	2	1	負
第5項 $a_{12}a_{21}a_{33}$ の列番号	2	1	3	負
第6項 $a_{11}a_{23}a_{32}$ の列番号	1	3	2	負

6つの列番号の数字が、1, 2, 3の並べ方すべてをとっていることがわかる。次に2次正方行列の行列式の定理 5.2 の (iii) を見てみよう。そこでは、行を交換したり、列を交換すると、行列式が-1倍となった。そこで数字の交換を考えることにしよう。

第2項の列番号の順序は2, 3, 1となっている。1, 2, 3の順序から何回数字を交換すると、2, 3, 1という順序になるか考えてみよう。もちろん交換というのは2つの数字を入れ替えることである。

$$\begin{aligned}
 & 1, 2, 3 \\
 1 \text{ と } 2 \text{ を交換すると } & \rightarrow 2, 1, 3 \\
 3 \text{ と } 1 \text{ を交換すると } & \rightarrow 2, 3, 1
 \end{aligned}$$

という2回の数字の交換で得られる。

第3項の列番号の数字3, 1, 2は、

$$\begin{aligned}
 & 1, 2, 3 \\
 1 \text{ と } 3 \text{ を交換すると } & \rightarrow 3, 2, 1 \\
 1 \text{ と } 2 \text{ を交換すると } & \rightarrow 3, 1, 2
 \end{aligned}$$

という2回の数字の交換で得られる。第4項以降も同様に見てみると、

第4項では

$$1, 2, 3 \text{ で、} 1 \text{ と } 3 \text{ を交換すると } \rightarrow 3, 1, 2$$

という1回の数字の交換で得られる.

第5項では

$$1, 2, 3 \text{ で, } 1 \text{ と } 2 \text{ を交換すると } \rightarrow 2, 1, 3$$

という1回の数字の交換で得られる.

第6項では

$$1, 2, 3 \text{ で, } 2 \text{ と } 3 \text{ を交換すると } \rightarrow 1, 3, 2$$

という1回の数字の交換で得られる.

第1項では交換しなくともよいので, 0回の交換で得られる.

第1項から第3項では, 交換回数が偶数で, 符号が正である. 一方第4項から第6項までは, 交換回数が奇数で, 符号が負である. だから, 交換回数の偶奇によって, 符号を決めるとよさそうである.

ただし, ここで問題となるのは, 交換は上のように1通りではないことである. 例えば第6項の場合だと,

$$\begin{array}{l} 1, 2, 3 \\ 1 \text{ と } 2 \text{ を交換すると } \rightarrow 2, 1, 3 \\ 1 \text{ と } 3 \text{ を交換すると } \rightarrow 2, 3, 1 \\ 1 \text{ と } 2 \text{ を交換すると } \rightarrow 1, 3, 2 \end{array}$$

のように3回の交換によっても, 1, 3, 2の順序が得られる. とは言え3回というのは1回と同様に奇数である.

このようなことがあるので, 1から $n$ までのある順序が与えられたとき, それは1から $n$ まで順に並べたものから,

- 順序にかかわらず偶数回の交換で, ある順序が得られる.
- 順序にかかわらず奇数回の交換で, ある順序が得られる.

のいずれかが, 必ず成り立つということを証明しなければならないのである.

4次の場合も見てみよう. (24.7)についても見やすくするために各項の行数は1, 2, 3, 4の順に書いてある. よって列数の順に注目していこう. すでに書いたように交換方法はいろいろあるのだが, その最小の交換回数で得られるようにした.

項番号	並び順	1, 2, 3, 4 からの変形の例	交換回数
第1項	4, 2, 3, 1	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 4, 2, 3, 1	1回
第2項	2, 3, 4, 1	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 4, 2, 3, 1 $\rightarrow$ 2, 4, 3, 1 $\rightarrow$ 2, 3, 4, 1	3回
第3項	3, 4, 2, 1	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 3, 2, 1, 4 $\rightarrow$ 3, 4, 1, 2 $\rightarrow$ 3, 4, 2, 1	3回
第4項	3, 2, 4, 1	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 3, 2, 1, 4 $\rightarrow$ 3, 2, 4, 1	2回
第5項	4, 3, 2, 1	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 4, 2, 3, 1 $\rightarrow$ 4, 3, 2, 1	2回
第6項	2, 4, 3, 1	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 2, 1, 3, 4 $\rightarrow$ 2, 4, 3, 1	2回
第7項	1, 4, 3, 2	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 1, 4, 3, 2	1回
第8項	4, 3, 1, 2	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 4, 2, 3, 1 $\rightarrow$ 4, 3, 2, 1 $\rightarrow$ 4, 3, 1, 2	3回
第9項	3, 1, 4, 2	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 3, 2, 1, 4 $\rightarrow$ 3, 1, 2, 4 $\rightarrow$ 3, 1, 4, 2	3回
第10項	3, 4, 1, 2	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 3, 2, 1, 4 $\rightarrow$ 3, 4, 1, 2	2回
第11項	4, 1, 3, 2	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 4, 2, 3, 1 $\rightarrow$ 4, 1, 3, 2	2回
第12項	1, 3, 4, 2	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 1, 3, 2, 4 $\rightarrow$ 1, 3, 4, 2	2回
第13項	1, 2, 4, 3	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 1, 2, 4, 3	1回
第14項	2, 4, 1, 3	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 2, 1, 3, 4 $\rightarrow$ 2, 4, 3, 1 $\rightarrow$ 2, 4, 1, 3	3回
第15項	4, 1, 2, 3	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 4, 2, 3, 1 $\rightarrow$ 4, 1, 3, 2 $\rightarrow$ 4, 1, 2, 3	3回
第16項	4, 2, 1, 3	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 4, 2, 3, 1 $\rightarrow$ 4, 2, 1, 3	2回
第17項	2, 1, 4, 3	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 2, 1, 3, 4 $\rightarrow$ 2, 1, 4, 3	2回
第18項	1, 4, 2, 3	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 1, 4, 3, 2 $\rightarrow$ 1, 4, 2, 3	2回
第19項	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4	0回
第20項	2, 3, 1, 4	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 2, 1, 3, 4 $\rightarrow$ 2, 3, 1, 4	2回
第21項	3, 1, 2, 4	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 3, 2, 1, 4 $\rightarrow$ 3, 1, 2, 4	2回
第22項	3, 2, 1, 4	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 3, 2, 1, 4	1回
第23項	2, 1, 3, 4	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 2, 1, 3, 4	1回
第24項	1, 3, 2, 4	1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 1, 3, 2, 4	1回

この表と (24.7) 式を照らし合わせれば、交換回数が偶数のときは、各項の符号は正になっており、交換回数が奇数のときは、各項の符号は負になっている。

この表を元にして、次章で置換と互換を定義し、行列式を定義しよう。

## 26 $n$ 次正方行列の行列式

前章の数字の並べ替えを置換とよび、数学の関数で表すと次のような表現となる。

**定義 26.1** 正整数  $n$  が 1 つ与えられているとする。

- (i). 1 から  $n$  までの整数が定義域で、値域も 1 から  $n$  までの整数である、1 対 1 の関数  $\sigma$  を、置換と呼ぶ。
- (ii).  $n$  が与えられたとき、置換の集合を  $S_n$  とおく。  $S_n$  は、  $n!$  個の要素を持つ有限集合である。
- (iii).  $\sigma$  の表現方法として、1 行目に定義域の数  $i$ 、2 行目に、その 1 行目の値に対応する  $\sigma(i)$  を書いて、行

列の形で書くものとする。  $S_2$  の元を全てあげると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

の 2 通りである。  $S_3$  の元を全てあげると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

の 6 通りである。

┘

1 行目は別に 1,2,3 の順に並んでいる必要はない。特に積の場合を考えると、並び替えて計算する必要がある。さて、実数の関数の合成関数で  $g \circ f(x)$  と書かれていた場合、 $x$  に  $f$  を施した後  $g$  を施すという形になっている。これと同様に、置換の積を考えたとき、右から考えていくのがポイントである。

25 章であげた、24 項の表の第 4 項の置換を考えると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

と表すことができる。 行列の計算ではないことに十分気を付けてほしい。

さらに、同じ列で同じ数字の場合は動かさないわけだから、それは書かないことにするのが一般的である。それに従うと、上の場合は

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{26.1}$$

この右辺にあるものは、2 つの交換でありもっと簡単に表現することとしよう。

定義 26.2 置換の集合  $S_n$  の要素について、

(i). 1 から  $n$  までの整数  $i, j (i \neq j)$  について、置換が

$$\begin{pmatrix} i & j \\ j & i \end{pmatrix}$$

となっているものを、互換 (交換) という。これを簡単に以下で表す。

$$(i \ j)$$

(ii). 文字が全く動かない置換、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

が必ず 1 つ存在し、それを恒等置換と呼び、 $1_n$  で表す。

(iii).  $\sigma \in S_n$  が与えられたとき,

$$\tau\sigma = \sigma\tau = 1_n$$

となる置換  $\tau$  は,  $\tau \in S_n$  であり,

$$\tau = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

で必ず唯一存在する. この  $\tau$  を  $\sigma$  の逆置換と呼び,  $\sigma^{-1}$  で表す.

」

互換の表現から (26.1) 式は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 4)(1 \ 3)$$

であらわされる.

右辺をみると, 1, 2, 3, 4 の並びから, まず 1 と 3 を入れ替える. 次に 1 と 4 を入れ替える. その結果が左辺の置換と一致するのである. 先に書いたように, 右から置換を施していくことに気を付けること.

では次に, 前章で書いたように, 置換を互換の積で表すことができることを示そう.

**命題 26.3** 置換の集合  $S_n$  の任意の元  $\sigma$  は, 有限個の互換の積で表すことができる. より強く言えば,  $n-1$  個以下の互換の積で表すことができる.

」

**証明** 任意の  $\sigma \in S_n$  について, 置換  $\tau_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$  を

$$\tau_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} i & \sigma(i) \\ 1_n \end{pmatrix} & (if \ i \neq \sigma(i)) \\ 1_n & (if \ i = \sigma(i)) \end{cases}$$

とする. すると,

$$\sigma = \tau_{n-1}\tau_{n-2}\tau_{n-3}\cdots\tau_2\tau_1$$

が成り立つ.  $i = \sigma(i)$  の場合の恒等置換の場合には, 何も置換しないと考えると, この結果からは以下のことが言える. つまり,  $\sigma$  が与えられたとき,  $i = 1, 2, \dots, n-1$  の中で  $i \neq \sigma(i)$  の個数の互換の積によって,  $\sigma$  が表される. よって命題がなりたつ.

□

25 章であげた, 24 項の表の交換の順序はこの方式に従って行っている. 最初の 6 項ぐらいでもよいので, 余裕があれば確認するとよい.

上の定理では,  $\sigma$  を表す互換の積の個数の最小値が,  $n-1$  以下であることを示した. 最小値なので, もちろんそれよりも多い回数の互換の積によっても,  $\sigma$  を表すことができる. 例えば簡単な例ではあるが, ある 2 数を交換した後, また同じ 2 数を交換すれば, 元通りになる. では, 前章でも言ったように偶奇性について証明しよう.

**定理 26.4** 置換の集合  $S_n$  の元の, 任意の置換  $\sigma$  が与えられたとする. また  $\tau_1, \dots, \tau_k$  と  $\rho_1, \dots, \rho_\ell$  は  $S_n$  における互換を表すとする.  $\sigma$  は, 2 通りの異なる互換の積によって, 以下のように

$$\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_k = \rho_1\rho_2\cdots\rho_\ell$$

と 2 通りの積で表されたとする. このとき,

- (i).  $k$  と  $l$  はともに偶数である.
- (ii).  $k$  と  $l$  はともに奇数である.

のいずれかである. ┘

注意: この証明は, 参考文献の [斉藤][佐竹][川久保] でも, 同じようなものなので, そちらをみてもよい.

証明  $n$  変数の多項式

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \\ &= \begin{array}{ccccccc} (x_1 - x_2) & (x_1 - x_3) & \cdots & (x_1 - x_{n-1}) & (x_1 - x_n) \\ & (x_2 - x_3) & \cdots & (x_2 - x_{n-1}) & (x_2 - x_n) \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & (x_{n-2} - x_{n-1}) & (x_{n-2} - x_n) \\ & & & & (x_{n-1} - x_n) \end{array} \end{aligned}$$

を考える. この式を  $n$  変数の差積と呼ぶ.

次に置換  $\sigma$  のときの,  $n$  変数の差積を

$$\Delta^\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Delta(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

と定義する. そうすると, 任意の互換  $\tau \in S_n$  については,

$$\Delta^\tau(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (26.2)$$

が成り立つが, これは後で示す. 従って (26.2) 式と仮定より,

$$\Delta^\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} (-1)^k \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ (-1)^\ell \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (26.3)$$

が成り立つ. この式から,  $(-1)^k = (-1)^\ell$  が成り立つので, 命題が成り立つ.

任意の互換  $\tau = \begin{pmatrix} s & t \\ & \end{pmatrix}$  ( $s, t$  は 1 以上  $n$  以下の整数で  $s \neq t$ ) について (26.2) 式が成り立つことの証明:

$s < t$  としても一般性は失わないので, そのように仮定する. 差積  $\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$  から, 差積  $\Delta^\tau(x_1, x_2, \dots, x_n)$  へと変更するとき,  $\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$  の各  $(x_i - x_j)$  の中で, 互換  $\tau$  によって変わる部分は,

- (i).  $(x_s - x_j)$  が  $(x_t - x_j)$  へ変更 ( $j = s + 1, \dots, t$ )
- (ii).  $(x_s - x_t)$  が  $(x_t - x_s)$  へ変更
- (iii).  $(x_s - x_j)$  が  $(x_t - x_j)$  へ変更 ( $j = t + 1, \dots, n$ )
- (iv).  $(x_t - x_j)$  が  $(x_s - x_j)$  へ変更 ( $j = t + 1, \dots, t$ )
- (v).  $(x_i - x_s)$  が  $(x_i - x_t)$  へ変更 ( $i = 1, \dots, s - 1$ )
- (vi).  $(x_i - x_t)$  が  $(x_i - x_s)$  へ変更 ( $i = 1, \dots, s - 1$ )
- (vii).  $(x_i - x_t)$  が  $(x_i - x_s)$  へ変更 ( $i = s + 1, \dots, t - 1$ )

である. これを掛け合わせたものが差積  $\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$  から, 差積  $\Delta^\tau(x_1, x_2, \dots, x_n)$  へと変更するとき, 変わる部分である. 掛けると, (i) と (vii), (iii) と (iv), (v) と (vi) がそれぞれ打ち消しあうため, 結局

(ii) のみを考えればよい。そこで (ii) をよく見ると、これは  $(x_s - x_t)$  を、 $-(x_s - x_t)$  へ変更するということになるので、結局 (26.2) 式が成り立つ

□

この結果から  $\sigma \in S_n$  において、符号  $sgn(\sigma)$  がきちんと定義できる。

定義 26.5  $\sigma \in S_n$  において、

- (i).  $\sigma$  が偶数回数の互換で積で表されるものを偶置換といい、奇数回数の互換の積で表されるものを奇置換と定義する。  
 (ii).  $\sigma$  の符号  $sgn(\sigma)$  を、

$$sgn(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\sigma \text{ が偶置換のとき}) \\ -1 & (\sigma \text{ が奇置換のとき}) \end{cases}$$

」

$sgn$  は、符号の英語 sign の省略形である。さていよいよこれで、ようやく  $n$  次正方行列の行列式を定義できる。

定義 26.6  $n$  次正方行列  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$  の行列式  $\det(\mathbf{A})$  を、

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \quad (26.4)$$

と定義する。

」

$a_{i\sigma(i)}$  は、 $\mathbf{A}$  の  $(i, \sigma(i))$  成分のことである。

もちろん、 $2 \times 2$  の行列式の定義も、 $3 \times 3$  の行列式の定義も、この定義に含まれている。また  $4 \times 4$  の行列式の候補も、今や候補ではなく、この定義によって、 $4 \times 4$  の行列式を書き下したものとなっている。

最後に、互換以外に重要な置換として、巡回置換を述べておくことにしよう。

定義 26.7 相異なる  $n$  個の数  $i_1, i_2, \dots, i_n$  について、置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{n-1} & i_n \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_n & i_1 \end{pmatrix}$$

を巡回置換と呼び、

$$\sigma = (i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_{n-1} \ i_n)$$

で表す。

」

これは  $i_1$  から  $i_{n-1}$  までの順番を変えずに、 $i_n$  を  $i_1$  の場所に持っていくことができる置換である。

定義 26.8 相異なる  $n$  個の数  $i_1, i_2, \dots, i_n$  の巡回置換は、 $n-1$  個の互換の積で表すことができる。

」

証明

巡回置換

$$(1 \ 2 \ \cdots \ n-1 \ n)$$

を考えたも一般性は失わない。このとき、

$$(1 \ 2 \ \cdots \ n-1 \ n) = (1 \ n)(2 \ n) \cdots (n-2 \ n)(n-1 \ n)$$

が成り立つ。右辺は  $n-1$  個の互換の積である。

□

この巡回置換の性質は余因子展開のときに用いる。

## 27 行列式の性質

この章では、 $\mathbf{A}$  は  $n$  次正方行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (27.1)$$

を表すものとする。

定理 27.1 (27.1) 式の  $\mathbf{A}$  の転置行列をとっても逆行列の値は変わらない。つまり、

$$\det({}^t\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \quad (27.2)$$

□

証明  $\sigma \in S_n$  の逆置換を  $\sigma^{-1}$  で表すとする。また  $\mathbf{B} = {}^t\mathbf{A}$  とする。

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma^{-1}(i)i} \end{aligned}$$

$$\text{明らかに } \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \text{ なので, } = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{i=1}^n a_{\sigma^{-1}(i)i}$$

$\sum_{\sigma \in S_n}$  という形から  $\sigma$  は  $S_n$  全てに渡っており、よって  $\sigma^{-1}$  も  $S_n$  全てを渡っている。 $\sigma^{-1}$  を  $\tau$  で表せば

$$\begin{aligned} &= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^n a_{\tau(i)i} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^n b_{i\tau(i)} \\ &= \det(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

□

この証明から、以下のように行を  $\sigma(i)$  で動かすことによっても、行列式が得られる。(26.6) の定義とよく比べるとよい。

系 27.2 (27.1) 式の  $\mathbf{A}$  について、

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} \quad (27.3)$$

$a_{\sigma(i)i}$  は、 $\mathbf{A}$  の  $(\sigma(i), i)$  成分のことである。

さて  $2 \times 2$  の行列の場合で示した定理 5.2 が、一般の  $n$  次正方行列についても当然成り立つことを示そう。

定理 27.3 (行列式の基本的な性質) (27.1) 式の  $\mathbf{A}$  について、

- (i). ある 2 つの列を入れ替えた行列式は、 $-\det(\mathbf{A})$  である。ある 2 つの行を入れ替えた行列式は、 $-\det(\mathbf{A})$  である。
- (ii).  $\mathbf{A}$  において、ある列がすべて 0 ならば、 $\det(\mathbf{A}) = 0$  である。同様に、ある行がすべて 0 ならば、 $\det(\mathbf{A}) = 0$  である。
- (iii).  $j \neq k$  とする。 $\mathbf{A}$  の第  $j$  列と、第  $k$  列が等しいとき、行列式は  $\det(\mathbf{A}) = 0$  である。また  $\mathbf{A}$  の第  $j$  行と、第  $k$  行が等しいとき、 $\det(\mathbf{A}) = 0$  である。
- (iv).  $\mathbf{A}$  のある列を全て  $c$  倍した行列の行列式は、 $c \cdot \det(\mathbf{A})$  である。同様に、 $\mathbf{A}$  のある行を全て  $c$  倍した行列の行列式は、 $c \cdot \det(\mathbf{A})$  である。
- (v).  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  を  $n$  項列ベクトルとする。 $\mathbf{A}$  の第  $j$  列が  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$  で表されるとき、以下が成り立つ。

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A} \text{ の } j \text{ 列を } \mathbf{b} \text{ に置き換えた行列}) + \det(\mathbf{A} \text{ の } j \text{ 列を } \mathbf{c} \text{ に置き換えた行列})$$

また、 $\mathbf{A}$  の  $i$  行目が  ${}^t\mathbf{b} + {}^t\mathbf{c}$  で表されるとき、以下が成り立つ。

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A} \text{ の } i \text{ 行を } {}^t\mathbf{b} \text{ に置き換えた行列}) + \det(\mathbf{A} \text{ の } i \text{ 行を } {}^t\mathbf{c} \text{ に置き換えた行列})$$

- (vi).  $\mathbf{A}$  のある列に、別の列のスカラー倍を加えた行列の行列式は、 $\det(\mathbf{A})$  のまま変わらない。同様に、 $\mathbf{A}$  のある行に、別の行のスカラー倍を加えた行列の行列式は、 $\det(\mathbf{A})$  のまま変わらない。

注意: 全て列についてのみ証明する。というのも定理 27.1 より、転置行列を考えれば、行についても同様のことが言えるためである。

証明

(i) と (ii) は、行列式の定義より明らか。

(iii) の証明:  $\mathbf{A}$  の  $j$  列目と  $k$  列目を入れ替えた行列を  $\mathbf{B}$  とすると、(i) より、

$$\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$$

ところで、今  $j$  列目と  $k$  列目の数字は等しいので、 $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$ 。この 2 式より  $\det(\mathbf{A}) = 0$ 。

(iv) の証明:  $\mathbf{A}$  の第  $j$  列を  $c$  倍した行列を  $\mathbf{B}$  とすると、

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left[ \left( \prod_{i=1}^{j-1} a_{\sigma(i)i} \right) c a_{\sigma(j)j} \left( \prod_{i=j+1}^n a_{\sigma(i)i} \right) \right] \\ &= c \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} \\ &= c \cdot \det(\mathbf{A})\end{aligned}$$

(v) の証明:  $\mathbf{A}$  を列ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  によって,

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n)$$

で表すと,

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left[ \left( \prod_{i=1}^{j-1} a_{\sigma(i)i} \right) (b_{\sigma(j)j} + c_{\sigma(j)j}) \left( \prod_{i=j+1}^n a_{\sigma(i)i} \right) \right] \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left[ \left( \prod_{i=1}^{j-1} a_{\sigma(i)i} \right) b_{\sigma(j)j} \left( \prod_{i=j+1}^n a_{\sigma(i)i} \right) \right] + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left[ \left( \prod_{i=1}^{j-1} a_{\sigma(i)i} \right) c_{\sigma(j)j} \left( \prod_{i=j+1}^n a_{\sigma(i)i} \right) \right] \\ &= \det(\mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{j-1} \quad \mathbf{b}_j \quad \mathbf{a}_{j+1} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{j-1} \quad \mathbf{c}_j \quad \mathbf{a}_{j+1} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n)\end{aligned}$$

(vi) の証明:  $j \neq k$  とする.  $\mathbf{A}$  の  $j$  列目に,  $\mathbf{A}$  の  $k$  列目  $\mathbf{a}_k$  にスカラーを  $c$  を掛けた  $c\mathbf{a}_k$  を加えた行列を,  $\mathbf{B}$  とする. (v) より,

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B}) &= \det(\mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{j-1} \quad \mathbf{a}_j \quad \mathbf{a}_{j+1} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{j-1} \quad c\mathbf{a}_k \quad \mathbf{a}_{j+1} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) \\ \text{(iv) より} &= \det(\mathbf{A}) + c \det(\mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{j-1} \quad \mathbf{a}_k \quad \mathbf{a}_{j+1} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) \\ \text{(ii) より} &= \det(\mathbf{A})\end{aligned}$$

□

## 28 $n$ 次正方行列について, 積の行列式 = 行列式の積 の証明

定理 5.1 では, 2 次正方行列において,  $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$  を示した.  $n$  次正方行列でも同様に成り立つ. 証明を読んでいて式がイメージしにくいときは, 定理 5.1 の証明 (5 章の一番最後) を参照するとよいだろう.

定理 28.1  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  とともに  $n$  次正方行列とする. このとき, 以下が成り立つ.

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$$

┘

証明  $\mathbf{A}$  を,  $n$  個の  $n$  項列ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  で以下のように表す.

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n)$$

$B$  は

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

とする。このとき、

$$AB = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i b_{i1} \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i b_{i2} \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i b_{in} \right)$$

と表すことができる。右辺の添字を  $i$  ではなくて、それぞれの列に応じて  $i_1, i_2, \dots, i_n$  と変更した後に、両辺の行列式を求めると、

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det \left( \sum_{i_1=1}^n \mathbf{a}_{i_1} b_{i_1 1} \quad \sum_{i_2=1}^n \mathbf{a}_{i_2} b_{i_2 2} \quad \cdots \quad \sum_{i_n=1}^n \mathbf{a}_{i_n} b_{i_n n} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n (b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n}) \det(\mathbf{a}_{i_1} \quad \mathbf{a}_{i_2} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{i_n}) \end{aligned}$$

これは  $n^n$  個の行列式の和である。ところで行列式

$$\det(\mathbf{a}_{i_1} \quad \mathbf{a}_{i_2} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{i_n})$$

については、 $i_1, i_2, \dots, i_n$  の  $n$  個の数字で、1 組でも同じものが存在すると、この値は 0 となる。従って、 $n$  文字の置換の集合を  $S_n$  とすると、

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n (b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n}) \det(\mathbf{a}_{i_1} \quad \mathbf{a}_{i_2} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{i_n}) \\ &= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n \text{ は相異なる値で} \\ 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq n}} (b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n}) \det(\mathbf{a}_{i_1} \quad \mathbf{a}_{i_2} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{i_n}) \end{aligned}$$

(この和記号の条件は、置換  $\sigma \in S_n$  を用いて  $i_1 = \sigma(1), i_2 = \sigma(2), \dots, i_n = \sigma(n)$  として、 $\sigma$  が  $S_n$  全体を渡ることに同じなので)

$$\begin{aligned} &= \sum_{\sigma \in S_n} (b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n}) \det(\mathbf{a}_{\sigma(1)} \quad \mathbf{a}_{\sigma(2)} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n}) \operatorname{sgn}(\sigma) \det(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) \\ &= \det(\mathbf{A}) \sum_{\sigma \in S_n} (b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n}) \operatorname{sgn}(\sigma) \\ &= \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

□

## 29 正方行列の余因子展開

$3 \times 3$  以上の行列式は、そのまま計算するわけではない。定理 (27.3) の性質などを用いて、簡単にした後、計算するのである。また余因子展開という方法も用いるので、それを説明しよう。

定義 29.1  $n$  次正方行列  $\mathbf{A}$  について、

- (i).  $i$  行目と  $j$  列目を除いてその部分を詰めた  $n-1$  次正方行列の行列式を、 $\mathbf{A}$  の  $(i, j)$  小行列式という。
- (ii).  $\mathbf{A}$  の  $(i, j)$  小行列式に  $(-1)^{i+j}$  を掛けたものを、 $\mathbf{A}$  の  $(i, j)$  余因子といい、 $\Delta_{ij}$  で表す。

」

例題 29.2 次の  $\mathbf{A}$  について、 $(1, 1)$  小行列式、 $(2, 1)$  小行列式、 $(3, 1)$  小行列式をそれぞれ求めよ。 $(1, 2)$  余因子、 $(2, 2)$  余因子、 $(3, 2)$  余因子をそれぞれ求めよ。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad (29.1)$$

」

(解答)

$(1, 1)$  小行列式、 $(2, 1)$  小行列式、 $(3, 1)$  小行列式は、それぞれ

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

それぞれ計算して、順に、

$$-3, \quad -6, \quad -3$$

である。 $(1, 2)$  余因子、 $(2, 2)$  余因子、 $(3, 2)$  余因子は、それぞれ、

$$(-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

である。計算して順に、

$$6, \quad -11, \quad 6$$

(解答終)

余因子が重要である理由は、行列式を展開できる点と、さらに、逆行列を余因子を用いて求めることができる点にある。後者は次章に回して、この章では行列式を展開について述べよう。

定理 29.3 (余因子展開)  $n$  次正方行列  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$  を考える。

- (i). ( $j$  列の余因子展開) 任意の  $j = 1, 2, \dots, n$  について、以下が成り立つ。

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \Delta_{ij}$$

(ii). ( $i$  行の余因子展開) 任意の  $i = 1, 2, \dots, n$  について, 以下が成り立つ.

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta_{ij}$$

┘

**証明** (ii) は (i) と同様にできるので, (i) のみ証明する.  $n$  項列ベクトル  $\mathbf{e}_i$  (ただし  $i = 1, 2, \dots, n$ ) は, 第  $i$  成分のみ 1 で, 残りの成分は 0 であるとする.

[手順 1]  $\mathbf{A}$  の 1 列目が  $\mathbf{e}_1$  の場合を考える. このとき 1 から  $n$  までの文字の置換の集合を  $S_n$  で表し, 2 から  $n$  までの文字の置換の集合を  $S_{n-1}$  で表すとする. このとき,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{e}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in S_n, \\ \sigma(1)=1}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \Delta_{11} \end{aligned}$$

[手順 2]  $\mathbf{A}$  の 1 列目が  $\mathbf{e}_i$  の場合を考える.  $\mathbf{A}$  の 1 行目から  $i$  行目までに, 巡回置換  $\sigma = (1 \ 2 \ \cdots \ i)$  を,  $\mathbf{A}$  に施した行列式を考えると,

$$\det(\mathbf{e}_i \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n) = \operatorname{sgn}(\sigma) \det \begin{pmatrix} 1 & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ 0 & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\sigma \text{ は } i-1 \text{ 回の互換の積で表されることと, 手順 1 から} \\ &= (-1)^{i-1} \cdot (\mathbf{A} \text{ の } (i, 1) \text{ 小行列式}) \\ &= (-1)^{i+1} \cdot (\mathbf{A} \text{ の } (i, 1) \text{ 小行列式}) \\ &= \Delta_{i1} \end{aligned}$$

[手順 3]  $j = 1$  のとき命題が成り立つことを示す.  $\mathbf{A}$  の 1 列目は,  $\sum_{i=1}^n a_{i1} \mathbf{e}_i$  で表すことができるので,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \det \left( \sum_{i=1}^n a_{i1} \mathbf{e}_i \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n \right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i1} \det(\mathbf{e}_i \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n) \\ \text{手順 2 より} \quad &= \sum_{i=1}^n a_{i1} \Delta_{i1} \end{aligned}$$

これで  $j = 1$  のとき命題が成り立つ。

[手順 4]  $j \geq 2$  のときは、各列に巡回置換  $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ j)$  を施すことによって、

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \operatorname{sgn}(\sigma) \det(\mathbf{a}_j \ \mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_{j-1} \ \mathbf{a}_{j+1} \ \dots \ \mathbf{a}_n) \\ &\quad \sigma \text{ は } j-1 \text{ 回の互換の積で表されるので} \\ &= (-1)^{j-1} \det(\mathbf{a}_j \ \mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_{j-1} \ \mathbf{a}_{j+1} \ \dots \ \mathbf{a}_n) \\ \text{手順 3 より} \quad &= (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{ij} \det(\mathbf{e}_i \ \mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_{j-1} \ \mathbf{a}_{j+1} \ \dots \ \mathbf{a}_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{e}_i \ \mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_{j-1} \ \mathbf{a}_{j+1} \ \dots \ \mathbf{a}_n) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \Delta_{ij} \end{aligned}$$

□

### 30 余因子展開から逆行列とクラメールの公式へ

すでに 2 次正方行列と 3 次正方行列の場合に、逆行列やクラメールの公式を導いた。一般の  $n$  次正方行列の場合は、余因子展開を用いることによって、それらが公式として得られる。まずは簡単な定義をしておこう。

**定義 30.1** (クロネッカーのデルタ)  $i, j$  に関する実数  $\delta_{ij}$  を、以下のように定める。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

┘

この  $\delta_{ij}$  を用いて、余因子展開についての公式を表そう。

**定理 30.2** (余因子展開)  $n$  次正方行列  $\mathbf{A}$  の  $(i, j)$  余因子を  $\Delta_{ij}$  とする。このとき、

$$\begin{aligned} \text{(i).} \quad & \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta_{kj} = \delta_{ij} \cdot \det(\mathbf{A}) \\ \text{(ii).} \quad & \sum_{k=1}^n a_{ik} \Delta_{jk} = \delta_{ij} \cdot \det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

┘

**証明**  $i = j$  のときは、定理 29.3 より証明されている。よって  $i \neq j$  のときを示す。(ii) は (i) と同様に行うので、(i) の場合のみ証明する。

$i, j, k$  は 1 から  $n$  までの整数とし、まず任意の  $i, j (i \neq j)$  を定める、 $n$  次正方行列  $\mathbf{B}$  を、 $i$  列以外は  $\mathbf{A}$  と同じもので、 $i$  列目は、 $\mathbf{A}$  の  $j$  列目と同じものとする。すると  $\mathbf{B}$  の  $(k, i)$  余因子は、 $\mathbf{A}$  の  $(k, i)$  余因子と一致

する. 明らかに  $\det(\mathbf{B}) = 0$  である. そこで  $\mathbf{B}$  の  $i$  列目を余因子展開すると,

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\mathbf{B}) \\ &= \sum_{k=1}^n b_{ki} \Delta_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{kj} \Delta_{ki} \end{aligned}$$

$i, j$  は任意なので, (i) が証明された. □

**定義 30.3** (余因子行列)  $\mathbf{A}$  と  $\Delta_{ij}$  は前定理同様とする. このとき,  $(j, i)$  成分が  $\Delta_{ij}$  となる  $n$  次正方行列  $\tilde{\mathbf{A}}$  を,  $\mathbf{A}$  の余因子行列と呼ぶ. 式で書くと以下である.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \quad (30.1)$$

$\tilde{\mathbf{A}}$  の  $(j, i)$  成分が  $\mathbf{A}$  の  $(i, j)$  余因子である. このように  $(i, j)$  でなく  $(j, i)$  としたのは, 定理 30.2 の系として, 次の式が成り立つからである.

**系 30.4**  $n$  次正方行列  $\mathbf{A}$  とその余因子行列  $\tilde{\mathbf{A}}$  について,

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{I}$$

が成り立つ. □

よってこの式から逆行列は簡単に得られる.

**定理 30.5**  $n$  次正方行列  $\mathbf{A}$  の余因子行列を  $\tilde{\mathbf{A}}$  とする.

(i).  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  のとき,  $\mathbf{A}$  は正則行列で,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \tilde{\mathbf{A}}$$

(ii).  $\det(\mathbf{A}) = 0$  のとき,  $\mathbf{A}$  は正則ではない. □

**証明** (i) は系 30.4 から得られる. (ii) を背理法で証明しよう.  $\mathbf{A}$  が正則であると仮定すると,

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

となる  $n$  次正方行列  $\mathbf{B}$  が存在する. しかしこの式の行列式を考えると, 最左辺は  $\det(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) = 0$  であり, 最右辺は  $\det(\mathbf{I}) = 1$  なので, 矛盾が生じる. よって  $\mathbf{A}$  は正則ではない. □

上の式のように  $A$  の逆行列の定義は,  $AB = BA = I$  となるような  $B$  のことであった. しかしこの式のように  $AB = I, BA = I$  と, 2つの等式を示すのは面倒なので, 次の系が便利である.

系 30.6  $n$  次正方行列  $A, B$  が  $AB = I$  を満たすならば,  $A$  も  $B$  も正則で,

$$A^{-1} = B, \quad B^{-1} = A$$

□

証明  $AB = I$  の両辺の行列式をとると,  $\det(A)\det(B) = 1$ . よって,  $\det(A) \neq 0, \det(B) \neq 0$  が成り立つので,  $A, B$  ともに正則である.

$A^{-1}$  を  $AB = I$  の左から掛けると,  $B = A^{-1}$  が得られる.  $B^{-1}$  を  $AB = I$  の右から掛けると  $A = B^{-1}$  が得られる. □

### 31 分割された行列と, 行列式・逆行列の表記

6章で説明したものを一般化し, さらに行列式や逆行列を求めるのが, この章の目的である. この章では,  $I_m, I_n$  はそれぞれ  $m$  次と  $n$  次の単位行列とする.  $O_{mn}$  は  $m$  行  $n$  列のゼロ行列を表し,  $O_{nm}$  は  $n$  行  $m$  列のゼロ行列を表す.

$n$  行  $m$  列の行列  $A$  と,  $m$  行  $\ell$  列の行列  $B$  で積  $AB$  は計算可能である. このとき  $A$  を行ベクトル  ${}^t a_i$  の集合 ( $i = 1, 2, \dots, m$ ),  $B$  を列ベクトル  $b_j$  の集合 ( $j = 1, 2, \dots, \ell$ ) として, 積  $AB$  は

$$AB = \begin{pmatrix} {}^t a_1 \\ \vdots \\ {}^t a_m \end{pmatrix} (b_1 \quad \cdots \quad b_\ell) = \begin{pmatrix} {}^t a_1 b_1 & \cdots & {}^t a_1 b_\ell \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t a_m b_1 & \cdots & {}^t a_m b_\ell \end{pmatrix}$$

と定義した. これをより一般化したものが以下となる. 証明は簡単なのでしない.

命題 31.1  $n$  行  $m$  列の行列  $A$  と,  $m$  行  $\ell$  列の行列  $B$  を考える.  $I, J, K$  は整数で, それぞれ  $n$  以下,  $k$  以下,  $\ell$  以下とする.  $A_{ij}$  ( $i$  は 1 から  $I$  までの整数で  $j$  は 1 から  $J$  までの整数) は  $m_i$  行  $n_j$  列の行列とし,  $A$  を  $IJ$  個の行列の集合とみて,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1J} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{I1} & A_{I2} & \cdots & A_{IJ} \end{pmatrix}$$

のように分割するとする. ただし各  $m_i, n_j$  の値は  $\sum_{i=1}^I m_i = m, \sum_{j=1}^J n_j = n$  を満たす正整数とする.

次に  $B_{jk}$  ( $j$  と  $n_j$  は上の通りで  $k$  は 1 から  $K$  までの整数) は,  $n_j$  行  $\ell_k$  列の行列とし,  $B$  を  $JK$  個の行列の集合とみて,

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1K} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{J1} & B_{J2} & \cdots & B_{JK} \end{pmatrix}$$

のように分割するとする. ただし各  $\ell_k$  は  $\sum_{k=1}^K \ell_k = \ell$  を満たす正整数とする. このとき積  $AB$  は, 以下の

ように表すことができる.

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^J A_{1j}B_{j1} & \sum_{j=1}^J A_{1j}B_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^J A_{1j}B_{jK} \\ \sum_{j=1}^J A_{2j}B_{j1} & \sum_{j=1}^J A_{2j}B_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^J A_{2j}B_{jK} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^J A_{Ij}B_{j1} & \sum_{j=1}^J A_{Ij}B_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^J A_{Ij}B_{jK} \end{pmatrix} \quad (31.1)$$

いくつか簡単な例を上げておこう. まず  $2 \times 2$  の形である.  $I = J = K = 2$  の場合を考えよう.  $n$  行  $m$  列の行列  $A$  と,  $m$  行  $k$  列の行列  $B$  について, 命題のように正整数  $m_1, m_2, n_1, n_2, l_1, l_2$  をとって,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

と置くと,  $AB$  は,

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \quad (31.2)$$

で表される. この  $2 \times 2$  の形での積が証明でよく出てくる形なので, これを理解できればまずは OK である.

次に  $I = 1, J = K = 2$  の場合の命題 31.1 でも, 正整数  $n_1, n_2, l_1, l_2$  をとって,

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \end{pmatrix}$$

として成り立つ.

$I = 1, J = 2, K = 1$  の場合だと, 正整数  $n_1, n_2$  をとって,

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$$

が成り立つ.

また  $I = 2, J = 1, K = 2$  の場合の命題 31.1 を考えると, 正整数  $m_1, m_2, l_1, l_2$  をとって,

$$\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} \end{pmatrix} \quad (31.3)$$

もやはり成り立つ. この式で  $A_{11}$  と  $A_{21}$  の部分を  $A$  に戻して,

$$A \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB_{11} & AB_{12} \end{pmatrix}$$

も成り立つし, (31.3) 式で,  $B_{11}, B_{12}$  の部分を  $B$  で表記すれば,

$$\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_{11}B \\ A_{21}B \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

このように適切な長方形の行列をとることにより, 行列の積を簡単に表すことができる.

この  $2 \times 2$  の形での積が証明でよく出てくる形であるといったが, その中でも正方行列を  $2 \times 2$  で分割して, その対角部分も正方行列とするものが, よく出てくる. というのは, このように分割すると, 行列式の計算ができるのである.

定理 31.2 (分割された行列の行列式 1)  $(m+n)$  次正方行列  $\mathbf{A}$  が,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{O}_{nm} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

と分割されるとする. ただし,  $\mathbf{A}_{11}$  は  $m$  次正方行列で,  $\mathbf{A}_{22}$  は  $n$  次正方行列,  $\mathbf{A}_{12}$  は  $m$  行  $n$  列である. このとき,

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}_{11}) \det(\mathbf{A}_{22})$$

□

注意: 上三角行列の行列式に類似していることに気が付くとよい.

(注意終)

証明

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{\sigma \in S_{m+n}} \operatorname{sgn}(\sigma) \left\{ \prod_{k=1}^m a_{\sigma(k)k} \prod_{k=m+1}^{m+n} a_{\sigma(k)k} \right\} \\ &= \sum_{\left\{ \begin{array}{l} \sigma \in S_{m+n} \\ i \leq m \implies \sigma(i) \leq m \end{array} \right.} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^m a_{\sigma(k)k} \prod_{k=m+1}^{m+n} a_{\sigma(k)k} \end{aligned}$$

$i \leq m \implies \sigma(i) \leq m$  ということは,  $\sigma$  による  $1$  から  $m$  までの置換は,  $1$  から  $m$  までということである.  $m+1$  以上の値を考えないとは,  $i > m$  のとき,  $a_{\sigma(i)i} = 0$  となるためである. すると  $\sigma$  による,  $m+1, \dots, n$  の置換  $\sigma(m+1), \dots, \sigma(n)$  も, やはり  $m+1$  から  $n$  までの値をとる. よって  $1, 2, \dots, m$  の  $m$  個の置換の  $1$  つを  $\tau_1$  とする.  $1, 2, \dots, n$  の  $n$  個の置換の  $1$  つを  $\tau_2$  とする. このとき,  $\sigma = \tau_1 \tau_2$  で表すことができ,  $\tau_1$  を用いる  $\sigma \in S_{m+n}$  を考えると,  $\sigma$  による  $m+1$  から  $m+n$  までの置換は,  $S_n$  通り存在する. よって,  $2$  つの置換  $\tau_1 \in S_m, \tau_2 \in S_n$  を用いて,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{\tau_1 \in S_m} \operatorname{sgn}(\tau_1 \tau_2) \left\{ \prod_{k=1}^m a_{\tau_1(k)k} \sum_{\tau_2 \in S_n} \prod_{j=1}^n a_{(m+\tau_2(j))(m+j)} \right\} \\ &= \sum_{\tau_1 \in S_m} \operatorname{sgn}(\tau_1) \prod_{k=1}^m a_{\tau_1(k)k} \left\{ \sum_{\tau_2 \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau_2) \prod_{j=1}^n a_{(m+\tau_2(j))(m+j)} \right\} \\ &= \sum_{\tau_1 \in S_m} \operatorname{sgn}(\tau_1) \prod_{k=1}^m a_{\tau_1(k)k} \det(\mathbf{A}_{22}) \\ &= \det(\mathbf{A}_{22}) \sum_{\tau_1 \in S_m} \operatorname{sgn}(\tau_1) \prod_{k=1}^m a_{\tau_1(k)k} \\ &= \det(\mathbf{A}_{22}) \det(\mathbf{A}_{11}) \end{aligned}$$

□

この定理では  $\mathbf{A}$  を上三角行列の形で分割したが, 下三角行列の形

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{O}_{mn} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

に分割した場合でも、同様の結果

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}_{11}) \det(\mathbf{A}_{22})$$

が得られる。ではゼロ行列がない場合はどうなるかという、

定理 31.3 (分割された行列の行列式 2)  $(m+n)$  次正方行列  $\mathbf{A}$  を、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

と分割する。ただし、 $\mathbf{A}_{11}$  は  $m$  次正方行列、 $\mathbf{A}_{22}$  は  $n$  次正方行列、 $\mathbf{A}_{12}$  は  $m$  行  $n$  列、 $\mathbf{A}_{21}$  は  $n$  行  $m$  列である。このとき、

(i).  $\mathbf{A}_{11}$  が正則ならば、

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}_{11}) \det(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12})$$

(ii).  $\mathbf{A}_{22}$  が正則ならば、

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}_{22}) \det(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21})$$

」

証明 同じようにできるので (i) のみ証明する。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{O}_{nm} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{O}_{mn} \\ \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \end{pmatrix} \quad (31.4)$$

が成り立つので、この両辺の行列式をとると、

$$\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}_{11}^{-1}) = \det(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12})$$

$\det(\mathbf{A}_{11}^{-1}) = [\det(\mathbf{A}_{11})]^{-1}$  なので、上の式の両辺に  $\det(\mathbf{A}_{11})$  を掛けることによって、命題が得られる。

□

次は  $2 \times 2$  の形に分割した行列の、逆行列である。

定理 31.4  $\mathbf{A}$  を定理 31.3 のように分割する。このとき、

(i).  $\mathbf{A}_{11}$  が正則で、 $\mathbf{F} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}$  も正則ならば、

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \mathbf{F}^{-1} \\ -\mathbf{F}^{-1} \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{F}^{-1} \end{pmatrix} \quad (31.5)$$

(ii).  $\mathbf{A}_{22}$  が正則で、 $\mathbf{F} = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}$  も正則ならば、

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{-1} & -\mathbf{F}^{-1} \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \mathbf{F}^{-1} & \mathbf{A}_{22}^{-1} + \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{pmatrix} \quad (31.6)$$

」

注意: 仮定と定理 31.3 によって、 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$  がいえる。

(注意終)

これらは, (31.5) 式と (31.6) 式の, それぞれの右辺の左から (もしくは右から),  $\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$  を掛けると,  $\mathbf{I}$  となることを示せばよい (計算してみるとよい).

とはいえ (i)(ii) ともに天下りすぎるので, なぜこのような式が得られたかを (i) のみ示そう. それは (31.4) 式の右辺を  $\mathbf{F}$  で表した後に, さらに両辺の右から  $\begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{O}_{mn} \\ -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{F}^{-1} \end{pmatrix}$  を掛けて,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{O}_{nm} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{O}_{mn} \\ -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{F}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{O}_{mn} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{O}_{mn} \\ -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{F}^{-1} \end{pmatrix}$$

両辺計算すると,

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{F}^{-1} \\ -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{F}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{O}_{mn} \\ \mathbf{O}_{nm} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \quad (31.7)$$

右辺は単位行列である. よって系 30.6 より,  $\mathbf{A}^{-1}$  が命題の式のように得られるためである.

では本章の最後として, 余因子展開を用いて, クラメールの公式を示そう.

**定理 31.5** ( $n$  次の場合のクラメールの公式)  $n$  次正方行列  $\mathbf{A}$  は正則とする.  $n$  項列ベクトル  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{b}$  によって,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

が成り立っているとき,  $\mathbf{x}$  の第  $i$  成分  $x_i$  は

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A} \text{ の } i \text{ 列目を } \mathbf{b} \text{ に変えた行列})}{\det(\mathbf{A})}$$

で表される. ┘

**証明**  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{b}}{\det(\mathbf{A})}$  が成り立つ. 両辺の  $i$  行目をとると, 右辺は  $\tilde{\mathbf{A}}$  の  $i$  行目に  $\mathbf{b}$  を右から掛けたものを,  $\det(\mathbf{A})$  で割ったものであるから,  $\mathbf{A}$  の  $(k, i)$  余因子を  $\Delta_{ki}$  とすると,

$$x_i = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_{ki} b_k}{\det(\mathbf{A})}$$

が成り立つ. 一方  $n$  次正方行列  $\mathbf{B}$  は,  $i$  列以外は  $\mathbf{A}$  と同じで,  $i$  列は  $\mathbf{b}$  とする. このとき,  $\mathbf{B}$  を  $i$  列目で余因子展開すると,  $\mathbf{B}$  の  $(k, i)$  余因子は,  $\mathbf{A}$  の  $(k, i)$  余因子と一致するので,

$$\det(\mathbf{B}) = \sum_{k=1}^n \Delta_{ki} b_k$$

がいえる. 以上より,

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{B})}{\det(\mathbf{A})}$$

がいえるので, 命題が成り立つ. □

## 32 第 V 部の Scilab 実習

ここでは V 部の復習として Scilab の実習をまとめて行う。メイン画面で行うのみでなく、15 部の 50 ページの (ii) での、

自作関数 (ユーザー定義関数) を作っておき、.sce ファイルで保存した後、それを実行して関数を読み込ませる。その後でメイン画面で、関数を用いる。

を主に行う。必要なものは、自分で作ればよいのである。

まず、順列についての復習をする。1 から整数  $n$  までの順列は  $n!$  個あるが、それを全て出力する `perms` 関数が用意されている。 $n = 4$  について確かめてみよう。

例題 32.1 次のコードをメイン画面に打ち込め。

```
perms([4 3 2 1])
```

24 行 4 列の数字が表示されたことであろう。各行が、1,2,3,4 の順列を表している。では次に、この `perms` を用いて、整数 `numN` を引数としたときに、1 から `numN` までの順列を出して、さらにその各行の最終列には、1,2,...,  $n$  からその順列を得るための交換回数を書くようなプログラム `myperms(numN)` を書いて、実行しよう。

例題 32.2 まず Scilab のメインから、アプリケーション > Scinotes で Scinotes を開くこと。

- (i). 次のコマンドを、Scinotes に打ち込んで (もしくは、PDF ファイルからコピーして)。適当な名前で作成せよ。その後、Scinote での、「実行する > ファイルを実行」によって、そのファイルを実行させよ。

```
function outF=myperms(numN)
    if length(numN)>1 then
        error('numN must be scalar');
    elseif find([2:6]==numN)==[]
        error('numN must be 2,3,4,5,6');
    end
    eachTBL=perms([numN:-1:1]);
    nTBL=size(eachTBL,1);
    ansTBL=zeros(nTBL,1);

    for irow=1:nTBL
        vecQ=eachTBL(irow,:);
        for piv=1:numN-1
            indx=find(vecQ==piv);
            if indx~=piv then
                vecQ([piv indx])=vecQ([indx piv]);
            end
        end
    end
end
```

```

        ansTBL(irow)=ansTBL(irow)+1;
    end
end
end

    outF=[eachTBL ansTBL];
endfunction

```

(ii). 次にメイン画面から,

```

myperms(4)

```

と打ち込むこと.

ではこのプログラムについて説明しておこう.

(a) 実行すると 24 行 5 列の行列が出てくる. 最初の 1 行目と 2 行目を見てみよう 1 行目は,

```

1 2 3 4 0

```

であろう. これは 1,2,3,4 の順を表し, 最後の 0 は, 1, 2, 3, 4 からは 0 回の交換で得られることを示している. 2 行目は,

```

1 2 4 3 1

```

である. これは 1,2,3,4 の順を表し, 最後の 1 は, 並び順 1,2,3,4 から 1,2,4,3 へは, 1 回の交換で得られることを示している. 25 節の最後にある 24 項の表を見て, 交換回数一致していることを確認すると面白いだろう. またプログラムでは最大 6 まで動くようにしておいた. よって myperms(6) でも動くが, 720 行も出てくるので気を付けること.

(b) 変数名に注意しておこう. myperms 内の function と endfunction の中にある変数は,

```

eachTBL, nTBL, ansTBL, irow, vecQ, piv, indx, outF

```

の 7 つである. 最後の outF が, 関数を返す値 (今回は行列) である. Scilab では変数名を宣言しなくてもよいので,

変数を作るときには, プログラムにコメント文を書かなくともわかるような, わかりやすい変数名にする  
とよい.

(c) さらに, 変数の範囲の問題があるので, これを説明しておこう. 上にあげた変数は, 関数 myperms の中でのみ有効なローカル変数である. 一方で Scilab5.4.1 でのメイン画面で使う変数は, グローバル変数である. 従って,

```

function~endfunction 内で使う変数名には, メイン画面で使わない変数名を用いること.

```

さもなければ, メイン画面で使った変数の影響を受けてしまい, 組み込み関数が正しく動かなくなるおそれがある. このレジュメではメイン画面では,

A,B,C,a,b,c,i,j,P,Q

など1文字ものをよく使うことが多いので、それらは自作関数内では使わないようにしている。

- (d) if-elseif-end ブロックと if-end ブロックが1つずつ存在している。いわゆる if 文であり、Scilab では endif ではなくて、end で終わる。
- (e) 繰り返し文が、for 整数変数=初期値:終了値 end ブロックとなっている。多くのプログラムでは、繰り返しの命令文の1つとして、for を用いられている。通称 For ループという。Scilab も同様である。ただし Basic 系の言語では For-Next ブロックなのであるが、Scilab では Next は使わず、if-end ブロック同様に for-end ブロックとなっている。
- (f) ~= は、Scilab では「≠」を意味する。

では次に、行列式の積と積の行列式の復習を行おう。

例題 32.3 次のプログラムをメイン画面に打ち込んで、 $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$  が成り立つことを確認せよ。

```
A=[1 2 3;4 5 6;7 8 0];
B=A-1
det(A)
det(B)
det(A*B)
```

」

次に、Scilab のメインから、アプリケーション> Scinotes で Scinotes という Scilab 専用テキストエディタを開くこと。

例題 32.4 正方行列  $\mathbf{A}$  と正整数  $i, j$  が与えられたときに、 $\mathbf{A}$  の  $(i, j)$  余因子行列式を返すような関数 `cof(matA, irow, jcol)` を作る。次のコマンドを、Scinotes に打ち込んで (もしくは、PDF ファイルからコピーして)。適当な名前でも保存せよ。その後、Scinote での、「実行する>ファイルを実行」によって、そのファイルを実行させよ。

```
function cofij=cof(matA,irow,jcol)
    [nA,colA]=size(matA);
    if nA ~=colA then
        error('matrix must be squared');
    end
    one2n=[1:nA];
    tmpRindx=find(one2n~=irow);
    tmpCindx=find(one2n~=jcol);
    if length(tmpRindx)==nA then
        error('2nd argument' +string(irow) +' is out of range.')
```

```
elseif length(tmpCindx)==nA then
```

```
    error('3rd argument' +string(jcol) +' is out of range.')
```

```

end
matA_ij=matA(tmpRindx,tmpCindx);
cofij=(-1)^(irow+jcol)*det(matA_ij);
endfunction

```

これを読み込んだ後に、1 行目についての余因子展開を Scilab のメイン画面で行おう。なお `endfunction` の 1 つ前の、行列式を求めるところは、簡単化のために Scilab の `det` 関数を用いている。

例題 32.5 メイン画面で、以下の 4 行を打ち込み、行列式と 1 行目の余因子展開が同じになることを確かめよ。

```

A=[1 2 3;4 5 6;7 8 0]
det(A)
i=1
A(i,1)*cof(A,i,1)+A(i,2)*cof(A,i,2)+A(i,3)*cof(A,i,3)

```

1 行目だけでなく、2 行目・3 行目についても余因子展開したい。そこで以下のようにすると、簡単に得られる。

(i). 次に `i=2` と打ち込んで Enter した後、メイン画面で ↑ キーを 2 回押すと、

$$A(i,1)*cof(A,i,1)+A(i,2)*cof(A,i,2)+A(i,3)*cof(A,i,3)$$

が出てくるから、Enter せよ。すると、2 行目に関する余因子展開が得られる。

(ii). 次に `i=3` と打ち込んで Enter した後、メイン画面で ↑ キーを 2 回押すと、やはり

$$A(i,1)*cof(A,i,1)+A(i,2)*cof(A,i,2)+A(i,3)*cof(A,i,3)$$

が出てくるから、Enter せよ。すると、3 行目に関する余因子展開が得られる。

全て 27 となることを確認せよ。また、上矢印や下矢印キー (もしくは PageUP と PageDown キー) によって前や後のコマンドが出てくることは、コマンド入力系の PC プログラムではよくあることである。

では、上の `cof` 関数を使って、行列 `matA` を引数として、その余因子行列を返す `cofmat` という関数を作ろう。

例題 32.6 例題 32.3 での `cof` を書いたファイルの一番下に、次のコードをコピーせよ。そして上書き保存した後に、その後、Scinote での、「実行する > ファイルを実行」によって、そのファイルを実行させよ。

```

function outMat=cofmat(matA)
outMat=zeros(matA);
for rowi=1:size(matA,1)
for colj=1:size(matA,2)
outMat(colj,rowi)=cof(matA,rowi,colj);

```

```
end
end
endfunction
```

さてこれで関数 `cofmat` が読み込まれたので, Scilab のメイン画面で, 次の4行を打ち込むこと.

```
A=[1 2 3;4 5 6;7 8 0];
cofmat(A)
cofmat(A)*A
A*cofmat(A)
```

以上により, 系 30.4 の

$$A\tilde{A} = \det(A)I$$

がイメージできるであろう.

ここでは, 余因子行列  $\tilde{A}$  の  $(j, i)$  成分が,  $A$  の  $(i, j)$  余因子となっていることを, プログラムのコードを見て復習してほしい.

## 第 VI 部

## 1 次独立と行列の階数

1 次独立と階数についてはいろいろなことがいえるが、ここでは最小限のことを述べる。より詳しいことを知りたい場合は、参考文献を参照するとよい。

## 33 ベクトルの 1 次独立と 1 次従属

$n$  次正方行列  $A$  の第  $i$  列を  $\mathbf{a}_i (i = 1, 2, \dots, n)$  とする。  $A$  が正則であることは、  $\det(A) \neq 0$  と同値であった。それはさらに、  $n$  項列ベクトル  $\mathbf{c}$  について、

$$A\mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (33.1)$$

を満たす  $\mathbf{c}$  が  $\mathbf{0}$  のみであることと同値でもある。この式をベクトル  $\mathbf{a}_i$  とスカラー  $c_i$  で書き下すと、

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

である。この式では各  $\mathbf{a}_i$  は  $n$  項列ベクトルで、ベクトルの個数も  $n$  個であった。これをもう少し一般化して、1 次独立と 1 次従属を定義する。

**定義 33.1** (一般のベクトル空間の 1 次独立と 1 次従属) ベクトル空間  $V$  の元  $x_1, x_2, \dots, x_m$  と、  $m$  個のスカラー  $c_1, c_2, \dots, c_m$  について

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m = 0$$

を満たす  $c_1, \dots, c_m$  が  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$  のみのとき、  $x_1, x_2, \dots, x_m$  は、1 次独立であるという。1 次独立でない場合は、1 次従属であるという。 」

これは一般の場合であり、今まで学んできた  $n$  項数ベクトルの場合は、次のように定義する。

**定義 33.2** (数ベクトルの 1 次独立と 1 次従属)  $m$  個の  $n$  項列ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  と  $m$  個のスカラー  $c_1, c_2, \dots, c_m$  について

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0} \quad (33.2)$$

を満たす  $c_1, \dots, c_m$  が  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$  のみのとき、  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  は、1 次独立であるという。1 次独立でない場合は、1 次従属であるという。

また、(33.2) 式が  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$  以外の解をもつとき、「(33.2) 式は非自明な解をもつ」という。 」

(33.1) 式と (33.2) 式を比べれば、後者で  $m = n$  としたときが、前者の式となっている。つまり拡張していることがわかるであろう。

また、  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  が 1 次従属ならば、(33.2) 式は非自明な解をもつことは明らかである。

## 34 基本行列・基本変形と、逆行列

$n$  次正方行列  $A$  が正則の場合に、余因子行列を用いて  $A^{-1}$  を示した。しかし実際に計算する場合には、余因子行列を計算すると時間がかかるので、別の方法を用いる。いくつか方法があるが、その中でも基本変形と呼ばれる方法を紹介します。これがもっとも基本的なものである。

何度も出てくるが,  $\mathbf{A}$  が与えられたとき,

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$$

を満たす  $\mathbf{B}$  を,  $\mathbf{A}$  の逆行列と定義した. これを忘れないように.

**定義 34.1** (基本行列 1:行や列の入れ替え)  $n$  次正方行列で,

- $(i, i)$  成分と  $(j, j)$  成分が 0 で, それ以外の対角成分が 1.
- $(i, j)$  成分と  $(j, i)$  成分が 1. それ以外の非対角成分は 0.

であるもの (ただし  $i \neq j$ ) を, (このレジュメでは) タイプ 1 の  $n$  次基本行列という. ここでは  $\mathbf{T}_1(i, j; n)$  で表す. 」

$\mathbf{A}$  が  $m$  行  $n$  列として, その左側から  $\mathbf{T}_1(i, j; m)$  を掛けると,  $\mathbf{A}$  の  $i$  行目と  $j$  列目を入れ替えたものができる.  $\mathbf{A}$  の右側から,  $\mathbf{T}_1(i, j; n)$  を掛けると,  $\mathbf{A}$  の  $i$  列目と  $j$  列目を入れ替えたものができる.

**定義 34.2** (基本行列 2:ある行や列のみを  $c$  倍)  $c \neq 0$  とする.  $n$  次正方行列で,

- $(i, i)$  成分が  $c$  であり, その他の対角成分が全て 1 である.
- 非対角成分が 0 である.

という対角行列を, (このレジュメでは) タイプ 2 の  $n$  次基本行列という. ここでは  $\mathbf{T}_2(i, c; n)$  で表す. 」

$\mathbf{A}$  が  $m$  行  $n$  列として, その左側から  $\mathbf{T}_2(i, c; m)$  を掛けると,  $\mathbf{A}$  の  $i$  行目を  $c$  倍したものができる.  $\mathbf{A}$  の右側から,  $\mathbf{T}_2(i, c; n)$  を掛けると,  $\mathbf{A}$  の  $i$  列目を  $c$  倍したものができる. また  $c = 1$  の場合は単位行列であり, それもタイプ 2 の基本行列に含まれている.

**定義 34.3** (基本行列 3:ある行か列を  $c$  倍して別のものに加える)  $c \neq 0$  とする.  $n$  次正方行列で,

- 対角成分が全て 1 である.
- $(i, j)$  成分が  $c$  である.

というもの (ただし  $i \neq j$ ) を, (このレジュメでは) タイプ 3 の  $n$  次基本行列という. ここでは  $\mathbf{T}_3(i, j, c; n)$  で表す. 」

$\mathbf{A}$  が  $m$  行  $n$  列として, その左側から  $\mathbf{T}_3(i, j, c; m)$  を掛けると,  $\mathbf{A}$  の  $j$  行目を  $c$  倍したものを,  $i$  行目に加えたものができる.  $\mathbf{A}$  の右側から,  $\mathbf{T}_3(i, j, c; n)$  を掛けると,  $\mathbf{A}$  の  $i$  列目を  $c$  倍したものを,  $j$  列目に加えたものができる. タイプ 3 の場合は, 左から掛ける場合と右から掛ける場合で,  $i$  と  $j$  の役割が逆になることに気を付けること.

基本行列は全て正則行列であり, 逆行列と行列式は以下のように表される.

**命題 34.4**  $c \neq 0$  とする.

- $\mathbf{T}_1(i, j; n)^{-1} = \mathbf{T}_1(i, j; n)$  である. また  $\det(\mathbf{T}_1(i, j; n)) = -1$  である.
- $\mathbf{T}_2(i, c; n)^{-1} = \mathbf{T}_2(i, 1/c; n)$  である. また  $\det(\mathbf{T}_2(i, c; n)) = c$  である.
- $\mathbf{T}_3(i, j, c; n)^{-1} = \mathbf{T}_3(i, j, -c; n)$  である. また  $\det(\mathbf{T}_3(i, j, c; n)) = 1$  である.

以上 (i)(ii)(iii) より, 基本行列の逆行列も基本行列であることがわかる. 」

$T_3(i, j, c; n)$  は上三角行列か下三角行列であることに注意すればよい。それ以外は簡単なので証明はしない。

**命題 34.5**  $m$  行  $n$  列の任意の行列は、基本行列を左右から掛けることによって、最初の  $r$  個 ( $r$  は 0 以上  $\min(m, n)$  以下の整数) の対角成分が 1 で、残りの対角成分が 0 である対角行列にすることができる。□

注意: PC プログラミングに応用するために、 $i, j$  といった変数名のみと同様に、 $\boxed{\text{piv}}$  という変数を用いる。意味は pivot(軸) の略であり、 $\boxed{\text{piv}}$  で一つの正整数を表している。(注意終)

証明  $A$  を  $m$  行  $n$  列の行列とする。 $\boxed{\text{piv}} = 1, \dots, \min(m, n)$  について、1 から  $\min(m, n)$  まで順に以下のプロセスを繰り返す。以下  $A$  の  $(i, j)$  成分を  $A(i, j)$  で表す。37 章も参照のこと。

- (i).  $i \geq \boxed{\text{piv}}, j \geq \boxed{\text{piv}}$  の  $A(i, j)$  の中で、絶対値が最も大きいものを探す。
  - (a) その最も大きいものが 0 ならば、任意の  $i, j$  ( $i \geq \boxed{\text{piv}}, j \geq \boxed{\text{piv}}$ ) について、 $A(i, j) = 0$  なので、プロセスを終了する。そうでなければ、絶対値が最大になるような  $i, j$  を記憶しておく。
  - (b)  $i > \boxed{\text{piv}}$  のときは  $A$  の左から  $T_1(\boxed{\text{piv}}, i; m)$  を掛けて行を入れ替える。そしてさらに  $j > \boxed{\text{piv}}$  のときは  $A$  の右から  $T_1(\boxed{\text{piv}}, j; n)$  を掛けて列を入れ替える。その結果  $A(\boxed{\text{piv}}, \boxed{\text{piv}})$  が非ゼロとなる。
- (ii).  $A$  の左から  $T_2(1, 1/A(\boxed{\text{piv}}, \boxed{\text{piv}}); m)$  を掛ける。その結果  $A(\boxed{\text{piv}}, \boxed{\text{piv}}) = 1$  となる。
- (iii). 任意の  $i > \boxed{\text{piv}}$  について、順に左から  $T_3(i, \boxed{\text{piv}}, -A(i, \boxed{\text{piv}}); m)$  を掛ける。その結果、 $i > \boxed{\text{piv}}$  について  $A(i, \boxed{\text{piv}}) = 0$  となる。「これを  $\boxed{\text{piv}}$  列について掃き出す」という。
- (iv). 任意の  $j > \boxed{\text{piv}}$  について、順に右から  $T_3(\boxed{\text{piv}}, j, -A(\boxed{\text{piv}}, j); n)$  を掛ける。その結果、 $j > \boxed{\text{piv}}$  について  $A(\boxed{\text{piv}}, j) = 0$  となる。「これを  $\boxed{\text{piv}}$  行について掃き出す」という。

□

このプロセスによってできた  $m$  行  $n$  列の行列を、 $A$  の標準形といい、 $F(r)$  であらわす。この関係を式で表したい。上のプロセスは  $A$  の左右から基本行列を掛けていっていることから、ある  $m$  次正則行列  $P$  と、ある  $n$  次正則行列  $Q$  があって、

$$PAQ = F(r) \quad (34.1)$$

と表すことができる。このときに気を付けることは、上の式のように  $P, Q$  の存在は示したが、その  $P, Q$  は唯一ではないということである。

例えば、 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  としたとき、

$$\begin{cases} P_1 = T_2(2, 1/3, 2)T_2(1, 1/2, 2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \\ Q_1 = I_2 \end{cases}$$

とすると,  $P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  である. 一方,

$$\begin{cases} P_2 = T_2(1, 1/2, 2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ Q_2 = T_2(2, 1/3, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

としても,  $P_2 A Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  が成り立つのである.

このように  $A$  から標準形  $F(r)$  に至る道は唯一ではない. 次の問題は  $F(r)$  の  $r$  の数は一定なのかどうかという点である. これについては, 一定であることが知られている.

**定理 34.6**  $m$  行  $n$  列の行列  $A$  が, (34.1) 式を満たす正則行列  $P, Q$  によって標準形  $F(r)$  が得られたとする. このとき  $P, Q$  にかかわらず,  $F(r)$  の成分に含まれる 1 の数は一定である. つまり  $r$  は一定である.  $\square$

**証明** 2 種類の基本変形によって, 異なる値が得られたと仮定して矛盾を導く. 今  $m$  次正方行列  $P_1, P_2$  と  $n$  次正方行列  $Q_1, Q_2$  によって, 2 種類の基本形

$$P_1 A Q_1 = F(r) \quad (34.2)$$

$$P_2 A Q_2 = F(s) \quad (34.3)$$

が得られたと仮定する.  $r \leq s$  として一般系は失わないので, そう仮定する. (34.2) 式の左から  $P_1^{-1}$  を掛け, 右から  $Q_1^{-1}$  を掛けると,  $A = P_1^{-1} F(r) Q_1^{-1}$  となり, これを (34.3) 式に代入することによって,

$$F(s) = P F(r) Q \quad (34.4)$$

が成り立つ. ただし  $P = P_2 P_1^{-1}, Q = Q_1^{-1} Q_2$  であり,  $P, Q$  はそれぞれ  $m$  次と  $n$  次の正則行列である.

次に  $P, Q$  をそれぞれ  $2 \times 2$  の形に,

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$$

と分割する.  $P_{11}$  は  $r$  行  $r$  列,  $P_{22}$  は  $m-r$  行  $m-r$  列である.  $Q_{11}$  は  $r$  行  $r$  列,  $Q_{22}$  は  $n-r$  行  $n-r$  列である. これらを (34.4) 式に代入すると,

$$\begin{aligned} F(s) &= \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & O_{r(n-r)} \\ O_{(m-r)r} & O_{(m-r)(n-r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{11} Q_{11} & P_{11} Q_{12} \\ P_{21} Q_{11} & P_{21} Q_{12} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (34.5)$$

$s \geq r$  かつ,

$$F(s) = \begin{pmatrix} I_s & O_{s(n-s)} \\ O_{(m-s)s} & O_{(m-s)(n-s)} \end{pmatrix}$$

なので, 以下が成り立つ.

$$P_{11} Q_{11} = I_r \quad (34.6)$$

$$P_{11} Q_{12} = O_{r(n-r)} \quad (34.7)$$

$$P_{21} Q_{11} = O_{(m-r)r} \quad (34.8)$$

(34.6) 式と系 30.6 から,  $P_{11}Q_{11}$  ともに正則である. (34.7) 式の左から  $P_{11}^{-1}$  を掛け, (34.8) 式の右から  $Q_{11}^{-1}$  を掛けて,

$$Q_{12} = O_{r(n-r)}, \quad P_{21} = O_{(m-r)r}$$

を得る. これらを (34.5) 式に代入すると,

$$F(s) = \begin{pmatrix} I_r & O_{r(n-r)} \\ O_{(m-r)r} & O_{(m-r)(n-r)} \end{pmatrix}$$

である. これは  $s = r$  を意味する.

□

$r$  が一定であることから, 以下のように階数を定義することができる.

**定義 34.7** (階数の定義) 行列  $A$  の標準形の  $r$  の個数を,  $A$  の階数 (ランク) といい,  $rank(A)$  で表す. 」

行列の階数は, 他にもいくつか定義があるので詳しくは参考文献を参照のこと. また行列の階数と, 行列の各列の 1 次独立性には深い関係があるが, その中で 2 つだけ紹介しておこう.

**命題 34.8**  $k \leq n$  とする  $n$  行  $k$  列の行列  $A$  について, 以下は同値である.

- (i).  $A$  の各列  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  が 1 次独立である.
- (ii).  $rank(A) = k$

」

**証明**  $A$  の標準形を  $F(r)$  とする.  $0 \leq r \leq k$  である. 適当な  $n$  次と  $k$  次の正則行列  $P, Q$  を用いることにより,

$$A = P^{-1}F(r)Q^{-1}$$

が成り立つ.  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$  とするとき,

$$\mathbf{a}_1x_1 + \dots + \mathbf{a}_kx_k = \mathbf{0}_n \iff A\mathbf{x} = \mathbf{0}_n \iff P^{-1}F(r)Q^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}_n \iff F(r)Q^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$$

が成り立つ. また  $F(r)$  の  $k+1$  行目から  $n$  行目までは全て 0 であるから, 上の式は結局

$$\mathbf{a}_1x_1 + \dots + \mathbf{a}_kx_k = \mathbf{0}_n \iff \begin{pmatrix} I_r & O_{r(k-r)} \\ O_{(k-r)r} & O_{(k-r)(k-r)} \end{pmatrix} Q^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}_k \quad (34.9)$$

と表される. よって  $r = k$  のときは, (34.9) 式より

$$\mathbf{a}_1x_1 + \dots + \mathbf{a}_kx_k = \mathbf{0}_n \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}_k$$

なので  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  は 1 次独立である.

$r < k$  の場合は, (34.9) 式から,

$$\mathbf{a}_1x_1 + \dots + \mathbf{a}_kx_k = \mathbf{0}_n \iff \begin{pmatrix} I_r & O_{r(k-r)} \\ O_{(k-r)r} & O_{(k-r)(k-r)} \end{pmatrix} Q^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}_k$$

とあらわすことができる. すると例えば  $x_1 = \cdots = x_{k-1} = 0, x_k = 1$  のとき,  $\mathbf{a}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{a}_k x_k = \mathbf{0}_n$  を満たすので,  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  は 1 次従属である.

□

**命題 34.9**  $k \leq n$  とする  $n$  行  $k$  列の実行列  $\mathbf{A}$  について, 以下は同値である.

- (i).  $\mathbf{A}$  の各列  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  が 1 次独立である.
- (ii).  ${}^t \mathbf{A} \mathbf{A}$  は正則である.

」

**証明** (i)  $\implies$  (ii) の証明: (i) より  $k$  項実列ベクトル  $\mathbf{x}$  と  $n$  項実列ベクトル  $\mathbf{q} = \mathbf{A} \mathbf{x}$  について,  $\mathbf{q} = \mathbf{0}_n \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}_k$  である.  $\mathbf{q}$  が実ベクトルであることから,  ${}^t \mathbf{q} \mathbf{q} = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}_k$  であり, つまり

$${}^t \mathbf{x} ({}^t \mathbf{A} \mathbf{A}) \mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}_k \quad (34.10)$$

である. ( ${}^t \mathbf{A} \mathbf{A}$ ) が非正則であると仮定しよう. すると, ある  $n$  項実列ベクトル  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}_k$  があって,

$$({}^t \mathbf{A} \mathbf{A}) \mathbf{y} = \mathbf{0}_k$$

である. この左辺から  $\mathbf{y}$  を掛けると,

$${}^t \mathbf{y} ({}^t \mathbf{A} \mathbf{A}) \mathbf{y} = 0$$

が成り立つが, これは, (34.10) 式に矛盾する. よって ( ${}^t \mathbf{A} \mathbf{A}$ ) は正則である.

(ii)  $\implies$  (i) の証明. 対偶を示せばよい. つまり  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  が 1 次従属ならば,  ${}^t \mathbf{A} \mathbf{A}$  が非正則であることを示せばよい (チャレンジするとよい).

□

ではこの章の目的である, 逆行列と基本変形の関係を示して, この章を終わりにしよう.

**命題 34.10**  $n$  次正方行列が正則な場合, その逆行列は基本行列の積で表すことができる.

」

**証明**  $n$  次正方行列  $\mathbf{A}$  が正則な場合, その標準形は  $\mathbf{I}_n$  である. 標準形の作り方より, 基本行列の積で正則な  $n$  次行列  $\mathbf{P}$  と, 基本行列の積で正則な  $n$  次行列  $\mathbf{Q}$  によって,

$$\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$$

と表される. この両辺に  $\mathbf{Q}^{-1}$  を右から掛けたあとに,  $\mathbf{Q}$  を左から掛けて,

$$\mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{I}_n \quad (34.11)$$

となる. よって  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{Q} \mathbf{P}$  である.

□

(34.11) 式の形から,

**系 34.11**  $n$  次正方行列が正則な場合, 基本行列を左側から掛けることのみで,  $\mathbf{I}_n$  に変形することができる.

」

### 35 $n \times n$ の連立方程式を行変形のみで解く・逆行列の PC 計算

前章の系 34.11 から,  $a_{ij}$  と  $b_j$  を定数として,  $n \times n$  の連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (35.1)$$

について, 解が存在するならば, それは行列の行変形のみで解くことができるということが言える. まず拡大係数行列を定義しよう.

**定義 35.1** 定数  $a_{ij} (1 \leq i, j \leq n)$  と定数  $b_i (i = 1, 2, \dots, n)$  についての  $n$  元 1 次連立方程式 (35.1) を解くとき,  $n \times (n+1)$  の行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

を拡大係数行列という. ┘

もとの (35.1) 式を行列で表せば,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

とできるので, 拡大係数行列を  $\mathbf{C}$  とすれば,

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A} \ \mathbf{b})$$

である.  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  のときは  $\mathbf{C}$  の行についての以下のような基本変形のプロセスで, 方程式の解を求めることができる. 命題 34.5 の証明のように,  $\boxed{\text{piv}}$  を使って表現すると, 以下である.

- (i).  $\boxed{\text{piv}} = 1$  とする.
- (ii). 任意の  $i \geq \boxed{\text{piv}}$  について,  $\mathbf{C} (i, \boxed{\text{piv}})$  の絶対値が最も大きくなるものの行数を  $i^*$  とする.  $i^* > \boxed{\text{piv}}$  ならば,  $\mathbf{C}$  の  $i^*$  行目と  $\boxed{\text{piv}}$  行目を入れ替える.
- (iii).  $\mathbf{C}$  の  $\boxed{\text{piv}}$  行目全体を  $\mathbf{C} (\boxed{\text{piv}}, \boxed{\text{piv}})$  で割る.  $\mathbf{C} (\boxed{\text{piv}}, \boxed{\text{piv}}) = 1$  となる.
- (iv).  $i = 1, \dots, \boxed{\text{piv}} - 1$  について,  $\mathbf{C}$  の  $i$  行目から,  $\mathbf{C}$  の  $\boxed{\text{piv}}$  行目の  $\mathbf{C} (i, \boxed{\text{piv}})$  倍を引く.
- (v).  $i = \boxed{\text{piv}} + 1, \dots, n$  について,  $\mathbf{C}$  の  $i$  行目から,  $\mathbf{C}$  の  $\boxed{\text{piv}}$  行目の  $\mathbf{C} (i, \boxed{\text{piv}})$  倍を引く.
- (vi).  $\boxed{\text{piv}} < n$  のときは,  $\boxed{\text{piv}}$  に 1 を加えて (ii) へ.  $\boxed{\text{piv}} = n$  のときは, プロセス終了.

プロセスが終了すると,  $\mathbf{C}$  の最初の  $n$  行  $n$  列は,  $\mathbf{I}_n$  となり, 最後の列が方程式の解となる.

もし  $\det(\mathbf{A}) = 0$  のときは, このプロセス (ii) で, ある  $\boxed{\text{piv}}$  があって, 任意の  $i = \boxed{\text{piv}}, \dots, n$  について,  $a_{ik} = 0$  となってしまう, プロセスが途中で止まってしまうのである.

例題 35.2 3 元連立方程式

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 5x + 6y + 7z = 38 \\ 3x + 5y + 2z = 19 \end{cases}$$

を, 上のプロセスによって解く Scilab プログラムを書くこと. 」

(解答) 例としては以下のプログラムを参考にするよ. 最後に逆行列を求める関数 `inv` を用いて,  $C$  の最終列と比較している. `dai`=の行と `disp` の行は,  $C$  の変形の途中経過を示すために, 入れたものである.

```
clear
A=[1 2 3;5 6 7;3 5 2];
b=[14 38 19]';
n=size(A,1);
C=[A b];
disp(C,'initial C=');
for k=1:n
    disp('k='+string(k));
    mxabs=max(abs(C(k:n,k)));
    indxes=find(abs(C(k:n,k))==mxabs);
    istar=indxes(1)+k-1;
    if istar>k
        C([k istar],:)=C([istar k],:);
        dai='row '+string(istar)+'& row '+ string(k) +' was exchanged';
        disp(C,dai);
    end

    C(k,:)=C(k,+)/C(k,k);
    dai='row '+string(k)+' was divided by C(' +string(k)+' ','+string(k)+')';
    disp(C,dai);

    for i=1:k-1
        C(i,:)=C(i,)-C(i,k)*C(k,);
    end
    for i=k+1:n
        C(i,:)=C(i,)-C(i,k)*C(k,);
    end
    dai='column '+string(k)+' was swept out.' ;
    disp(C,dai);
end
disp(inv(A)*b,'check with inv(A)*b');
```

逆行列がほしい場合は、拡大係数行列の拡張として、 $n$  行  $2n$  列の

$$C = (A \quad I_n)$$

をとって、上のプロセスを同様に行えばよい。すると、 $A$  が正則ならば、 $C$  の  $n+1$  列目以降が、 $A$  の逆行列となる。

練習 35.3 上の Scilab プログラムの 5 行目を

$$C=[A \text{ eye}(n,n)];$$

に変える。そして最後の行を 2 か所の

\*b

を削除して、別名で名前を付けて保存をしてから、プログラムを実行せよ。最後の  $C$  の  $n+1$  列目以降と、 $\text{inv}(C)$  が一致していることを確かめよ。

$A$  が正則であるということがわかっている場合のプログラムが上のものであり、正則かどうか分かっていない場合には、エラー処理などを付け加えなければならない。しかし、このプログラムが理解できれば、行列の行変形にかなり強くなることであろう。

練習 35.4 前の例題のプログラムを Scinote で開き、

- (i).  $A$  を別の正方行列に変えて、上書き保存をする。
- (ii). プログラムを実行せよ。

## 36 トレースの定義

トレースは正方行列に対して定義されるもので、

定義 36.1  $n$  次正方行列  $A$  の対角成分の和をトレースといい  $\text{tr}(A)$  であらわす。成分で表示すると、

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

」

命題 36.2 トレースについて、以下が成り立つ。

- (i).  $n$  次正方行列  $A, B$  について、 $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- (ii).  $n$  行  $m$  列の行列  $A$  と  $m$  行  $n$  列の行列  $B$  について、 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

」

証明 (i) の和のトレースは簡単である. (ii) の積のトレースについては,  $n$  項行ベクトルと  $n$  項列ベクトルについて成り立つことを示せば, 行列の積の定義より十分である. 行ベクトル  $\mathbf{a}$  と列ベクトル  $\mathbf{b}$  を

$$\mathbf{a} = (a_1 \quad \cdots \quad a_n), \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とすると, 明らかに  $\mathbf{ab} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$  が成り立ち, スカラーなので, トレースも当然  $tr(\mathbf{ab}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$  である. 一方,

$$\begin{aligned} tr(\mathbf{ba}) &= tr \left( \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1 \quad \cdots \quad a_n) \right) \\ &= tr \begin{pmatrix} b_1 a_1 & \cdots & b_1 a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n a_1 & \cdots & b_n a_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n b_i a_i \\ &= tr(\mathbf{ab}) \end{aligned}$$

□

ただの対角成分の足し算に何の意味があるか疑問に思うかもしれない. 一つは, 正方行列  $\mathbf{A}$  と固有値の関係でトレースが関係してくる. 2 次正方行列  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  を持つとき, (10.9) 式で解と係数の関係から

$$a + d = \lambda_1 + \lambda_2$$

が成り立つことを示したが, これはよく見ると,

$$tr(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2$$

となっている.

もう一つは, このレジュメの最後の方のべき等対称行列において, トレースを使った 1 例があるので, それをみるとよいであろう.

## 37 第 VI 部の Scilab 実習

ここでは VI 部の復習として Scilab の実習をまとめて行う. メイン画面で行うのみでなく, 15 部の 50 ページの (iii) での,

.sce ファイルで保存して, 実行するバッチ形式.

を主に行う.

### 37.1 find 関数と sum 関数についての注意

まずは行列志向プログラミングとして重要な、find 関数について説明する。他の C 言語・Visual Basic その他と違って、Scilab のこの関数を使いこなすことによって、行列計算が簡単になる。

find(条件式) という形で、条件式にあてはまるインデックスを返してくれる。条件式が、行ベクトルや列ベクトルの場合だと簡単である。

例題 37.1 以下のコードをメイン画面に打ち込め。

```
A=[2:2:10]
B=[4 8 9]'
find(A==6)
find(B>6)
find(B<0)
```

3 行目は 6, 4 行目は  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ , そして 5 行目は答えがないので, [] が返ってくることであろう。

ところが条件式の部分が行列の場合は、行列をあたかも 1 つの列ベクトルとして、インデックスがかえってくる。

例題 37.2 以下のコードをメイン画面に打ち込め。

```
clear
A=[2:4;11:13]
find(A>11)
```

find(A>11) の結果としては、 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \end{pmatrix}$  がかえってくる。これは A について、その 4 つの列ベクトルを左から順に並べていった

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 3 \\ 12 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}$$

ものとして、そのあと find で、成分が 11 より大きいインデックスを返しているのである。find 関数は便利であり、うまく使えば for ループを使うよりも相当早いのだが、行列に find 関数を用いる場合には、このように注意しておかなければならない。

またベクトルや行列を使った条件式は、T(True を意味する) と F(False を意味する) のどちらかを返すのだが、数字でいうと 1 と 0 となる。よって、条件を満たす個数が、条件式と sum 関数を重ねたもので得られる。

例題 37.3 以下のコードをメイン画面に打ち込め。

```
clear
```

```
A=[1:3;4:6]
B=[2 2 3 4]
sum(A>=5)
sum(B<2)
```

」

## 37.2 基本変形とランクの復習

まず Scilab のメインから、アプリケーション> Scinotes で Scinotes を開くこと。

例題 37.4 行列  $A$  が与えられたときに、 $A$  の基本変形を行う関数 `cof(matA,irow,jcol)` を作る。

- (i). 次のコマンドを、Scinotes に打ち込んで (もしくは、PDF ファイルからコピーして)。適当な名前で保存せよ。その後、Scinote での、「実行する>ファイルを実行」によって、そのファイルを実行させよ。

```
function traF=transform(Amat)
    [rowA,colA]=size(Amat);
    traF=Amat;
    piv=1;
    myeps=10^(-14);
    for piv=1:min(rowA,colA)
        absmx=max(abs(traF(piv:$,piv:$)));
        if absmx<=myeps;
            break;
        end

        disp(traF,'absmx='+string(absmx));
        indexes=find(abs(traF(piv:$,piv:$))==absmx);
        indx=indexes(1);
        colindx= floor((indx-1)/(rowA-piv+1))+piv;
        rowindx= modulo(indx-1,rowA-piv+1)+piv;

        if rowindx>piv then
            traF([piv rowindx],:)=traF([rowindx piv],:);
        end
        if colindx>piv then
            traF(:,[piv colindx])=traF(:,[colindx piv]);
        end

        disp(traF,'exchanged');
        dai=string(piv)+' row was devided by '+ string(traF(piv,piv));
```

```

traF(piv,:)=traF(piv,+)/traF(piv,piv);
disp(traF,dai);

for irow=piv+1:rowA
    traF(irow,:)=traF(irow,)-traF(irow,piv)*traF(piv,);
end

dai='(>'+ string(piv)+','+string(piv)+') was swept out.';
disp(traF,dai);
for jcol=piv+1:colA
    traF(:,jcol)=traF(:,jcol)-traF(piv,jcol)*traF(:,piv);
end

dai='('+ string(piv)+ ',>' + string(piv)+ ') was swept out.';
disp(traF,dai);
end
endfunction

```

- (ii). その後 2 つの行列について、以下のようにメイン画面に打ち込んで、その基本変形の様子をみること。

```

A=[1:3;4:6]
B=[A;[7:9]]
transform(A)
transform(B)

```

dai=の行と 5 つの disp の行とは、基本変形の途中を表示させるために用いたものである。命題 34.5 のプロセスと、全く同じプロセスで計算を行っていることに気づくこと。

一応説明すると、matA の行数を rowA、列数を colA としたときに、piv=1 から min(rowA,colA) まで、1 つずつ、以下のプロセスを繰り返す。

- (i). matA(piv 以降の行,piv 以降の列) で表記される、(rowA-piv-1)(colA-piv-1) 個の成分の中で、絶対値が最も大きいものを探す。その行数と列数を、切り捨て関数 floor と剰余を返す関数 modulo を用いて取得する。そして行変形と列変形によって、matA(piv,piv) が、A(piv 以降の行,piv 以降の列) の成分の中で、最も絶対値が大きくなる。なおその絶対値が eps 未満であれば、matA(piv 以降の行,piv 以降の列) の全成分は 0 であるとみなして、プログラムを終了する。
- (ii). matA の piv 行を matA(piv,piv) で割る。matA(piv,piv)=1 となる。
- (iii). matA の piv 列の、piv+1 行目以降を掃き出す。
- (iv). matA の piv 行の、piv+1 列目以降を掃き出す。

また上のコードで行列の中にあるドルマーク (\$) は、行列の最後の行や最後の列という意味である。いちいち rowA とか colA などと書かなくともすむので楽である。

さて行列のランクについては、上記の基本変形が正しければ、その対角部分を足せばいいだけなので、以下のように簡単に得られる。

**例題 37.5** 以下の手順で、作業せよ。

- (i). 上の `function traF=transform(Amat)` を書いた `sce` ファイルを開く、
- (ii). その最終行の `endfunction` の後ろに、以下のコードをコピーした後に、上書き保存せよ。

```
function myout=myrank(matA)
    myeps=10^(-14);
    tmpA=transform(matA);
    myout=sum(diag(tmpA)>myeps);
endfunction
```

- (iii). その後、Scinote での、「実行する>ファイルを実行」によって、この `sce` ファイルを実行させよ。
- (iv). メイン画面上で、Scilab で用意されているランクを返す関数 `rank(B)` と打ち込み、次にここで作ったランクを返す関数 `myrank(B)` と打ち込み。ともに 2 となることがわかるであろう。

この `myrank` を求めるときに、`disp` で基本変形の途中式が出てくる。表示させたくない場合は、4 つの `disp` をコメントアウトすればよい。つまり 4 つの行それぞれの行頭に `//` と挿入して、コメント文にして上書き保存し、もう一度「実行する>ファイルを実行」して、`myrank` を呼び出せば、それ以降は見えなくなる。

### 37.3 $n \times n$ の逆行列の PC 計算の復習

これについては、先に 35 章でプログラムを載せておいた。よってそのプログラムにさらに、逆行列を持たない場合の処理をしておけば、簡単に計算されるので、それを示そう。まず Scilab のメインから、アプリケーション>Scinotes で Scinotes を開くこと。

**例題 37.6** 行列 `matA` が与えられたときに、その逆関数を、基本変形によって求める関数 `myinv(matA)` を作る。

- (i). 次のコマンドを、Scinotes に打ち込んで (もしくは、PDF ファイルからコピーして)。適当な名前で保存せよ。その後、Scinote での、「実行する>ファイルを実行」によって、そのファイルを実行させよ。

```
function outF=myinv(matA)
    myeps=10^(-14);
    [rowA,colA]=size(matA);
    if rowA ==colA then
        nA=rowA;
    else
        eroor('matA must be squared matrix')
    end
    exA=[matA eye(nA,nA)];
```

```

for piv=1:nA
    mxabs=max(abs(exA(piv:nA,piv)));
    if mxabs<myeps
        error('This matrix is singular');
        break
    end
    indxes=find(abs(exA(piv:nA,piv))==mxabs);
    istar=piv-1+indxes(1);
    if istar>piv then
        exA([piv istar],:)=exA([istar piv],:);
    end
    exA(piv,:)=exA(piv,+)/exA(piv,piv);
    for rowi=1:piv-1
        exA(rowi,:)=exA(rowi,)-exA(piv,)*exA(rowi,piv);
    end
    for rowi=piv+1:nA
        exA(rowi,:)=exA(rowi,)-exA(piv,)*exA(rowi,piv);
    end
    disp(exA,'myinv is in progress. exA=');
end
outF=exA(:,nA+1:$);
endfunction

```

- (ii). その後2つの行列について、以下のようにメイン画面に打ち込んで、その Scilab 関数の `inv` 関数と、作った関数 `myinv` を比較すること。

```

A=[1 2;4 5]
B=[1:3;4:6;7:9]
inv(A)
myinv(A)
inv(B)
myinv(B)

```

この B は逆行列を持たない。 `inv` 関数は警告をした上で、一応近似値として計算しているが、もちろん正しいわけではない。作った `myinv` は、絶対値が  $10^{-14}$  以下のものは 0 と判断しているので、エラーメッセージが出て終了していることを確認せよ。

## 第 VII 部

## 固有値・対角化・三角化・2次形式

## 38 固有値・固有ベクトルと、対角化・三角化

固有値と固有ベクトルについては、2次正方行列の場合と全く同様に定義できる。

実ベクトル・実行列という場合には、ベクトルや行列は実数である。スカラーもそうである。そう書いていない場合は、ベクトルの成分・行列の成分・スカラーを、複素数の範囲まで考えている。この章の定義・定理・命題について、実数までの話なのか、複素数まで拡張可能なのかを具体的に書くと、

- (i). 定義 38.1・定義 38.2・定理 38.3 は、複素数の場合まで拡張可能である。
- (ii). 命題 38.7 は、実行列で成り立つことを言っているが、証明ではエルミート内積を用いて、複素数の範囲まで考えている。
- (iii). それ以外は、全て実数のみの場合である。

ではまず固有値・固有ベクトル・固有多項式の定義からである。2次正方行列の場合と全く同様である。

定義 38.1  $n$  次正方行列  $\mathbf{A}$  と単位行列  $\mathbf{I}$  について、

- (i).  $\lambda$  に関する  $n$  次多項式
 
$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \tag{38.1}$$

を固有多項式と呼び  $\phi_{\mathbf{A}}(\lambda)$  であらわす。

- (ii).  $\lambda$  に関する  $n$  次方程式
 
$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \tag{38.2}$$

を固有方程式と呼ぶ。

- (iii). 固有方程式の解を固有値という。また、固有値  $\lambda_0$  に関して、

$$(\lambda_0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \tag{38.3}$$

をみたすベクトル  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$  を、 $\lambda_0$  の固有ベクトルという。

」

ある  $\lambda_0$  について、 $\mathbf{x}_0$  が固有ベクトルの 1 つであれば、任意のスカラー  $t \neq 0$  について、 $t\mathbf{x}_0$  も固有ベクトルであることも、2次正方行列の場合と同様である。

対角化と三角化についても、2次正方行列の場合と全く同様に定義できる。

定義 38.2  $n$  次正方行列  $\mathbf{A}$  と  $n$  次単位行列  $\mathbf{I}$  について、

- (i). 適当な正則  $n$  次行列  $\mathbf{P}$  が存在して、
 
$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} \tag{38.4}$$

と、ある  $n$  次対角行列  $\mathbf{\Lambda}$  で表されるとき、 $\mathbf{A}$  は  $\mathbf{P}$  によって  $\mathbf{\Lambda}$  に対角化される、という。

- (ii). 適当な正則  $n$  次行列  $\mathbf{P}$  が存在して、
 
$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{U} \tag{38.5}$$

と、ある  $n$  次上三角行列  $U$  で表されるとき、 $A$  は  $P$  によって  $U$  に三角化される、という。

$A$  が  $P$  によって三角化された場合、 $A$  の固有多項式と、三角行列  $P^{-1}AP$  の固有多項式と一致する。

定理 38.3  $n$  次正方行列  $A, P$  について、 $P$  は正則であるとする。このとき  $A$  の固有多項式  $\phi_A(\lambda)$  と  $P^{-1}AP$  の固有多項式  $\phi_{P^{-1}AP}(\lambda)$  は等しい。

証明

$$\begin{aligned}\phi_{P^{-1}AP}(\lambda) &= \det(\lambda I - P^{-1}AP) = \det(\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}(\lambda I - A)P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(\lambda I - A) \det(P) \\ &= \det(\lambda I - A) \\ &= \phi_A(\lambda)\end{aligned}$$

□

$A$  は対角化はできるとは限らない。しかし三角化は、固有方程式が  $n$  個の解をもつならば、必ずできる。さらに  $A$  が実行列でかつ、固有方程式が  $n$  個の解をもつならば、直交行列によって三角化できる。これらは 2 次正方行列の場合と同様である。 $n$  次正方行列の場合で証明する前にまずは、 $2 \times 2$  の場合を思い出してほしい。1 つの基準化された固有ベクトル  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  をとったとき、 $\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$  というベクトルを使って、

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

が直交行列になることを証明で用いた。ここでも直交行列をうまく作りたいため、そのための定理を先に示す。

定理 38.4 (グラム・シュミットの直交化の利用)  $n$  個の  $n$  次実列ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  が、1 次独立であるとする。このとき、 $\mathbf{a}_1$  を基準化した列ベクトル  $\mathbf{a}_1/\|\mathbf{a}_1\|$  をある列に含む直交行列  $P$  を作ることができる。

証明 まず、 $\mathbf{g}_1$  を  $\mathbf{a}_1/\|\mathbf{a}_1\|$  とする。 $\|\mathbf{g}_1\| = 1$  なので、 $\langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1 \rangle = 1$  である。

次に実数  $c_1$  を  $c_1 = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{g}_1 \rangle$  として、 $\mathbf{f}_2$  を  $\mathbf{f}_2 = \mathbf{a}_2 - c_1 \mathbf{g}_1$  とする。 $\mathbf{g}_1$  は  $\mathbf{a}_1$  の定数倍なので、 $\mathbf{a}_2$  と  $\mathbf{a}_1$  の 1 次独立性より、 $\mathbf{f}_2 \neq \mathbf{0}$  である。また計算すると、 $\langle \mathbf{f}_2, \mathbf{g}_1 \rangle = 0$  が成り立つ。そこで  $\mathbf{g}_2 = \mathbf{f}_2/\|\mathbf{f}_2\|$  とする。 $\|\mathbf{g}_2\| = 1$  かつ、 $\langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \rangle = 0$  がいえる。

以下  $i = 3, \dots, n$  の順に、以下のプロセスを繰り返す。

- (i).  $i - 1$  個の実数  $c_1, c_2, \dots, c_{i-1}$  を、 $c_k = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{g}_k \rangle$  ( $k = 1, 2, \dots, i - 1$ ) とする。
- (ii). 次に  $\mathbf{f}_i$  を、 $\mathbf{f}_i = \mathbf{a}_i - \sum_{k=1}^{i-1} c_k \mathbf{g}_k$  とする。 $\sum_{k=1}^{i-1} c_k \mathbf{g}_k$  は  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}$  の線形結合なので、1 次独立性より、 $\mathbf{f}_i \neq \mathbf{0}$  である。式より、 $k = 1, 2, \dots, i - 1$  について、 $\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_k \rangle = 0$  が成り立つ。
- (iii).  $\mathbf{g}_i = \mathbf{f}_i/\|\mathbf{f}_i\|$  とする。 $\|\mathbf{g}_i\| = 1$  であり、(ii) より  $k = 1, 2, \dots, i - 1$  について、 $\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k \rangle = 0$  が成り立つ。

このように得られた  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$  を横に並べた行列

$$\mathbf{P} = (\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{g}_n)$$

は (上のは一例であり, 並び順は任意でよい),  $\mathbf{g}_i$  の作り方から,  ${}^t\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{I}$  を満たす.

□

系 38.5 任意の  $n$  次実列ベクトル  $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$  について,  $\mathbf{q}$  を基準化した列ベクトル  $\mathbf{q}/\|\mathbf{q}\|$  をある列に含む  $n$  次直交行列  $\mathbf{P}$  を作ることができる. 」

証明  $\mathbf{q}$  の第 1 成分が 0 の場合は,  $q_i \neq 0$  となる  $i$  を探して, 第 1 成分と第  $i$  成分を入れ替えておく.  $n-1$  個の  $n$  項基準ベクトル  $\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  をとってきたとき,

$$\mathbf{q}, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$$

は 1 次独立となる. よって前定理より,  $\mathbf{q}/\|\mathbf{q}\|$  をある列に含む直交行列  $\mathbf{P}$  ができる.

なお最初に  $\mathbf{q}$  の第 1 成分と第  $i$  成分を入れ替えた場合は, 出来上がった  $\mathbf{P}$  の 1 行目と  $i$  行目を入れ替えれば, 目的の直交行列が得られる.

□

いよいよ目的の三角化である.

定理 38.6  $n$  次正方実行列  $\mathbf{A}$  の固有多項式が重複を含めて  $n$  個の実数解  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  をもつ場合, ある適当な直交行列  $\mathbf{P}$  が存在して,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (38.6)$$

と, 対角成分が固有値となるような上三角行列に三角化できる. 」

証明 数学的帰納法で証明する.  $n=1$  のとき成り立つのは明らか. よって  $n \geq 2$  として  $n-1$  次正方行列の場合に, 命題が成り立つと仮定する.  $n$  次正方行列  $\mathbf{A}$  の固有値の 1 つを  $\lambda_1$  とし, その固有ベクトルを  $\mathbf{q}$  (ただし  $\|\mathbf{q}\| = 1$  と基準化している) とすると,

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \lambda_1\mathbf{q} \quad (38.7)$$

また, 系 38.5 より,  $n$  行  $n-1$  列の行列  $\mathbf{Q}_2$  を用いて

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{q} \quad \mathbf{Q}_2)$$

という形の直交行列  $\mathbf{Q}$  が存在する. 従って,

$${}^t\mathbf{Q}_2\mathbf{q} = {}^t\mathbf{0}, \quad {}^t\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}_{n-1}$$

である. 以下  $\mathbf{I}_{n-1}$  は  $(n-1)$  次単位行列とする.

この  $\mathbf{Q}$  を用いて  $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$  を計算すると,

$$\begin{aligned}
Q^{-1}AQ &= {}^tQAQ = \begin{pmatrix} {}^tq \\ {}^tQ_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} q & Q_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} {}^tqAq & {}^tqAQ_2 \\ {}^tQ_2Aq & {}^tQ_2AQ_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} {}^tq\lambda_1q & {}^tqAQ_2 \\ {}^tQ_2\lambda_1q & {}^tQ_2AQ_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^tqAQ_2 \\ \mathbf{0} & Q_2^{-1}AQ_2 \end{pmatrix} \tag{38.8}
\end{aligned}$$

両辺の固有多項式を求めると,

$$\phi_{Q^{-1}AQ}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_1 & {}^tqAQ_2 \\ \mathbf{0} & \lambda I_{n-1} - Q_2^{-1}AQ_2 \end{pmatrix}$$

左辺は定理 38.3 より, 右辺は分割された行列式より,

$$\phi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \det(\lambda I_{n-1} - Q_2^{-1}AQ_2)$$

左辺は  $A$  の固有方程式に関する仮定より, 右辺も固有多項式に直して,

$$\prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = (\lambda - \lambda_1) \phi_{Q_2^{-1}AQ_2}(\lambda)$$

$\lambda$  について恒等的に成り立つので,

$$\phi_{Q_2^{-1}AQ_2}(\lambda) = \prod_{i=2}^n (\lambda - \lambda_i)$$

が成り立つ. この式において,  $Q_2^{-1}AQ_2$  は  $n-1$  次正方行列なので, 帰納法の仮定より, 適当な  $n-1$  次直交行列  $P_2$  が存在して,

$$P_2^{-1}(Q_2^{-1}AQ_2)P_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * & * \\ & \ddots & * \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と三角化される ( $i < j$  となる  $(i, j)$  成分には適当な数が入る). この右辺を  $U_2$  として, 左と右からそれぞれ  $P_2, P_2^{-1}$  を両辺から掛けると,

$$Q_2^{-1}AQ_2 = P_2 U_2 P_2^{-1}$$

であり, これを (38.8) 式に代入すると,

$$\begin{aligned}
Q^{-1}AQ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^tqAQ_2 \\ \mathbf{0} & Q_2^{-1}AQ_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^tqAQ_2 \\ \mathbf{0} & P_2 U_2 P_2^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^tqAQ_2 P_2 \\ \mathbf{0} & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

この式で  $P_2$  が直交行列であることから,  $\begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 \end{pmatrix}$  も直交行列である. そこで, 両辺の左側から  $\begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 \end{pmatrix}^{-1}$  を掛けて, 両辺の右側から  $\begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 \end{pmatrix}$  を掛けて

$$\begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 \end{pmatrix}^{-1} Q^{-1} A Q \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t q A Q_2 P_2 \\ \mathbf{0} & U_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. この式は,  $A$  が, 直交行列  $Q \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 \end{pmatrix}$  によって, 上三角行列に三角化されていることを表している. よって  $n-1$  の時に命題が成り立つならば,  $n$  のとき命題が成り立つ.

以上から数学的帰納法より, 命題が成り立つ.

□

次に実対称行列について考えよう. 2 次の場合と同様に, まずは固有値が全て実数であることを示そう.

**命題 38.7**  $n$  次実対称行列の固有値は, 重複も含めて,  $n$  個全て実数である. 」

**証明**  $A$  が実対称行列であるとする. 代数学の基本定理より,  $A$  の固有方程式の解は, 複素数の範囲で, 重複も含めて  $n$  個存在する. この複素数解の 1 つを  $\lambda_0$  とし, この固有値  $\lambda_0$  の固有ベクトルを  $\mathbf{x}_0$  とする.

エルミート内積 (定義 17.2) を用いて,

$$\mathbf{x}_0^* A \mathbf{x}_0 = \langle A \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle = \langle \lambda_0 \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle = \lambda_0 \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle$$

同様に,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0^* A \mathbf{x}_0 &= \langle \mathbf{x}_0, A^* \mathbf{x}_0 \rangle \\ (A \text{ は対称行列なので}) &= \langle \mathbf{x}_0, A \mathbf{x}_0 \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_0, \lambda_0 \mathbf{x}_0 \rangle \\ &= \bar{\lambda}_0 \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle \end{aligned}$$

従って, この 2 つの式から,

$$\lambda_0 \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle = \bar{\lambda}_0 \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle$$

$\mathbf{x}_0$  は固有ベクトルなので  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ , よって  $\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle \neq 0$ . だから,

$$\lambda_0 = \bar{\lambda}_0$$

従って,  $\lambda_0$  は実数である.  $\lambda_0$  は任意の解なので, 命題が成り立つ.

□

さていよいよ微分積分でも重要な働きをする定理である.

**定理 38.8**  $n$  次実対称行列  $A$  は, ある適当な直交行列  $P$  によって, 対角成分が固有値である対角行列  $\Lambda$  に対角化できる. つまり,

$$P^{-1} A P = \Lambda$$

」

**証明** 定理 38.6 と命題 38.6 から,  $n$  次実対称行列  $A$  は, ある適当な直交行列  $P$  によって, 固有値を対角成分に持つ上三角行列  $U$  に対角化される. つまり,

$$P^{-1}AP = U$$

$P$  は直交行列なので,

$${}^tPAP = U \tag{38.9}$$

両辺の転置行列をとると,

$${}^tP^t A^t ({}^tP) = {}^tU$$

$A$  は対称行列なので,

$${}^tPAP = {}^tU \tag{38.10}$$

(38.9) 式と (38.10) 式から,

$$U = {}^tU$$

左辺は上三角行列なので, 左辺の,  $i > j$  のときの  $(i, j)$  成分は 0 である. 右辺は下三角行列なので, 左辺の,  $i < j$  のときの  $(i, j)$  成分は 0 である. よって  $U$  は対角行列である.  $U$  の対角成分は固有値なので, 命題が成り立つ.

□

**定理 38.9**  $n$  次実対称行列  $A$  がべき等行列  $A^2 = A$  のとき, つまり  $A$  がべき等対称行列のとき,

- (i). 固有値は 0 または 1 のみである.
- (ii).  $A$  のランクは, トレース  $tr(A)$  と等しい.

┘

**証明** (i)  $A$  は実対称行列なので, 重複を含めて  $n$  個の固有値は全て実数である.  $n$  個の固有値の任意の 1 つを  $\lambda$  とし, そのときの固有ベクトルを  $x$  とする. 定義より,  $Ax = \lambda x$  が成り立つ. また,

$$Ax = A^2x = A\lambda x = \lambda^2x$$

が成り立つので,

$$\lambda x = \lambda^2x$$

がいえる.  $x \neq 0$  なので, これは  $\lambda^2 = \lambda$  と同値である. これを解けば

$$\lambda = 0, 1$$

(ii) (i) の結果と前定理から,  $A$  はある適当な直交行列  $P$  によって,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{38.11}$$

と対角化される.  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  は 0 か 1 のどちらかであり, 適当な  $P$  によって,

$$1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$$

を仮定してもよい。  $\mathbf{P}, \mathbf{P}^{-1}$  が正則であることから、右辺は  $\mathbf{A}$  の基本形である。したがって、右辺のトレースは、  $\mathbf{A}$  のランクを表す。一方 (38.11) 式の左辺のトレースは

$$\text{tr}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})$$

である。以上より、命題は成り立つ。

□

## 39 2 次形式

14 章で説明した 2 次形式の、  $n$  次元バージョンである。この章では、  $\mathbf{A}$  は  $n$  次の実対称行列であり、  $\mathbf{x}$  は  $n$  項実列ベクトルとする。

2 次形式の定義については、定義 13.1 で済ませてあり、正值定符号・負値定符号・半正值定符号・半負値定符号の定義も、定義 13.2 で示した通りである。

この章では一般の  $n$  次正方行列の場合での、2 次形式の性質を述べる。まず、前章で示した実対称行列の直交行列による対角化の結果から、以下が簡単に示される。

定理 39.1  $n$  次実対称行列  $\mathbf{A}$  について、

- (i).  $\mathbf{A}$  が正值定符号であることは、  $\mathbf{A}$  の固有値が全て正であることと同値である。
- (ii).  $\mathbf{A}$  が負値定符号であることは、  $\mathbf{A}$  の固有値が全て負であることと同値である。
- (iii).  $\mathbf{A}$  が半正值定符号であることは、  $\mathbf{A}$  の固有値が全て 0 以上であることと同値である。
- (iv).  $\mathbf{A}$  が半負値定符号であることは、  $\mathbf{A}$  の固有値が全て 0 以下であることと同値である。

┘

証明 (i) のみ証明しよう。  $\mathbf{A}$  は対称行列なので、ある直交行列  $\mathbf{P}$  と、対角成分が固有値である実対角行列  $\mathbf{\Lambda}$  によって、  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^t\mathbf{P}$  と表される。  $\mathbf{\Lambda}$  の  $(i, i)$  成分を  $\lambda_i$ 、ある  $\mathbf{x}$  について、  $\mathbf{q} = {}^t\mathbf{P}\mathbf{x}$  とすると、

$${}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = ({}^t\mathbf{x}\mathbf{P})\mathbf{\Lambda}({}^t\mathbf{P}\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{q} = \lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + \cdots + \lambda_n q_n^2 \quad (39.1)$$

が成り立つ。

⇐ の証明:  $\mathbf{P}$  は正則なので、  $\mathbf{q} \neq 0$  と  $\mathbf{x} \neq 0$  は同値である。よって、(39.1) 式から、任意の  $\mathbf{x} \neq 0$  について  ${}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$  がいえるから、  $\mathbf{A}$  は正值定符号。

⇒ の証明: 背理法で証明する。少なくとも 1 つの固有値が 0 以下であると仮定する。  $\lambda_1 \leq 0$  と仮定しても一般性は失わないのでそう仮定する。このとき、  $\mathbf{q}$  が  $q_1 = 1, q_2 = \cdots = q_n = 0$  となるような  $\mathbf{x} \neq 0$  は存在する (実際計算すると  $\mathbf{P}$  の 1 列目である)。このとき、(39.1) 式から、  ${}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_1 \leq 0$  となる。これは  $\mathbf{A}$  が正值定符号であることに矛盾する。よって全ての固有値は正である。

□

$\mathbf{A}$  が正值定符号であるならば、任意の  $\mathbf{x} \neq 0$  について  ${}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$  であったから、  $\mathbf{x}$  の成分に適当に 0 を代入することによって、  $\mathbf{A}$  から成分をいくつか抜き出した行列も、やはり正值定符号であることが言える。3 次正方行列を例にして説明しよう。

例題 39.2  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  が正値定符号であると仮定する。このとき、

- (i).  $a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{33} > 0$ であることを確かめよ。  
 (ii).  $\mathbf{A}$  から、 $1 \leq i < j \leq 3$  について取り出した 2 行 2 列の行列  $\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}$  は全部で 3 種類考えられる。  
 そのどの行列も正値定符号であることを示せ。

(解答) (i) の証明: 単位ベクトル

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

とすると、 $\mathbf{A}$  が正値定符号であることから、どの  $i = 1, 2, 3$  についても、 ${}^t\mathbf{e}_i\mathbf{A}\mathbf{e}_i > 0$  である。 ${}^t\mathbf{e}_i\mathbf{A}\mathbf{e}_i = a_{ii}$  であるから、 $a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{33} > 0$  が言える。

(ii) の証明: 単位ベクトルを用いて  $\mathbf{x} = y_i\mathbf{e}_i + y_j\mathbf{e}_j$  とすると、 $\mathbf{A}$  が正値定符号であることから、 $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_i \\ y_j \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  のとき、 ${}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$  であるから、

$$0 < {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = {}^t\mathbf{y} \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

である。これは、対称行列  $\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}$  が正値定符号であることを表す。

(解答終)

よって、任意の  $n$  次正方行列についても、同様の証明によって、以下が言える。

命題 39.3  $n$  次実対称行列  $\mathbf{A}$  について、

- (i).  $\mathbf{A}$  が正値定符号ならば、任意の  $k (1 \leq k \leq n)$  をとり、任意の  $k$  個の整数  $i_1, i_2, \dots, i_k (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n)$  について、

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix}$$

が正値定符号である。

- (ii). (i) の 2 つの「正値定符号」の部分で「負値定符号」とした場合も、同様に成り立つ。  
 (iii). (i) の 2 つの「正値定符号」の部分で「半正値定符号」とした場合も、同様に成り立つ。  
 (iv). (i) の 2 つの「正値定符号」の部分で「半負値定符号」とした場合も、同様に成り立つ。

ではこれの逆は言えないだろうか。正値定符号と負値定符号については言える。ところで上の命題の (i) で

書いた行列は全部で  $2^n - 1$  個あるわけだが、それは多すぎる。実は  $n$  個の行列を調べることで、正値定符号性と負値定符号性がいえるのである。まずは任意の行列  $\mathbf{A}$  について、その左上からの正方行列を定義しよう。

定義 39.4  $m$  行  $n$  列の行列  $\mathbf{A}$  について、 $1 \leq k \leq \min(m, n)$  となる  $k$  をとって、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

となる正方行列をとったとき、これを  $\mathbf{A}$  の  $k$  次首座小行列という。さらにこの行列式、

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

を、 $\mathbf{A}$  の  $k$  次首座小行列式という。 ┘

これを用いて、

定理 39.5  $n$  次実対称行列  $\mathbf{A}$  を考える。

(i).  $\mathbf{A}$  の任意の首座小行列式が正であるとき、つまり、任意の  $k = 1, 2, \dots, n$  について

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

が成り立つならば、 $\mathbf{A}$  は正値定符号である。

(ii). 任意の  $k = 1, 2, \dots, n-1$  について

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

が成り立ち、かつ  $\det(\mathbf{A}) \geq 0$  ならば、 $\mathbf{A}$  は半正値定符号である。 ┘

注意: 2次対称行列の場合は、定理 14.3 で示している。 (注意終)

証明 (i) の証明:  $n = 1$  のときは明らかに成り立つので、 $n \geq 2$  とする。

$\mathbf{A}$  を  $(n-1)$  次正方行列  $\mathbf{A}_1$  と  $(n-1)$  次列ベクトル  $\mathbf{a}_2$  とスカラー  $a$  によって

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_2' & a \end{pmatrix}$$

と分割する。このとき、分割行列の行列式より、 $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}_1) \det(a - \mathbf{a}_2' \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{a}_2)$  が成り立つ。 $\det(\mathbf{A})$  と  $\det(\mathbf{A}_1)$  に関する符号の仮定と、 $a - \mathbf{a}_2' \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{a}_2$  がスカラーであることから、結局

$$a > \mathbf{a}_2' \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{a}_2 \tag{39.2}$$

がいえる.  $n$  次列ベクトル  $\mathbf{x}$  を,  $n-1$  次列ベクトル  $\mathbf{u}$  とスカラー  $v$  で

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ v \end{pmatrix}$$

と分割する. このとき  $\mathbf{A}$  の 2 次形式は,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} &= (\mathbf{u}' \ v) \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_2' & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ v \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{u}'\mathbf{A}_1\mathbf{u} + \mathbf{u}'\mathbf{a}_2v + v\mathbf{a}_2'\mathbf{u} + av^2 \\ &= \mathbf{u}'\mathbf{A}_1\mathbf{u} + 2(\mathbf{a}_2'\mathbf{u})v + av^2 \\ (39.2) \text{ 式より, } &> \mathbf{u}'\mathbf{A}_1\mathbf{u} + 2(\mathbf{a}_2'\mathbf{u})v + (\mathbf{a}_2'\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{a}_2)v^2 \end{aligned} \quad (39.3)$$

ここで  $\mathbf{p} = \mathbf{u} + v\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{a}_2$  とすると

$$\begin{aligned} &= (\mathbf{p}' - v\mathbf{a}_2'\mathbf{A}_1^{-1})\mathbf{A}_1(\mathbf{p} - v\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{a}_2) + 2\mathbf{a}_2'(\mathbf{p} - v\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{a}_2)v + (\mathbf{a}_2'\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{a}_2)v^2 \\ &= \mathbf{p}'\mathbf{A}_1\mathbf{p} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_1 \text{ は正値定符号なので, } \geq 0 \quad (39.4)$$

以上より, 任意の  $\mathbf{x}$  について  $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$  となるので, 命題が成り立つ.

(ii) の証明: 任意の  $n$  次列ベクトル  $\mathbf{x}$  について,  $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$  となることを示せばよい. それは, (i) の証明と全く同様に進めるとよい. このとき, (39.2) 式では等号を含んだ不等号となる. その結果 (39.3) 式も, 等号を含めたものになる. 以上によって, (i) と全く同様の手順で証明される.  $\square$

注意: 上で天下一的に  $\mathbf{p} = \mathbf{u} + v\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{a}_2$  とした. この  $\mathbf{p}$  は微積分法の偏微分から導出したものである. 一応説明しておこう.  $\mathbf{u}$  の各成分を  $u_1, \dots, u_n$  とする. 今 (39.3) 式の右辺は, 最小値を持ちそうな形をしているので,  $\mathbf{u}$  の各成分  $u_1, \dots, u_n$  を偏微分して, それが全て 0 になるような点を  $\mathbf{u}^*$  とおくことにする. (39.3) 式を, それぞれ  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$  で偏微分して縦に並べたものは,

$$2\mathbf{A}_1\mathbf{u} + 2v\mathbf{a}_2$$

となるので (証明略),  $2\mathbf{A}_1\mathbf{u}^* + 2v\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$  すなわち

$$\mathbf{u}^* = -v\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{a}_2$$

とする. 最後に  $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{u}^*$  の差  $\mathbf{u} - \mathbf{u}^*$  を  $\mathbf{p}$  としたのである. そして実際に (39.4) 式で示したように,  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  のとき, つまり  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$  のときに, (39.3) 式は最小値 0 をとったのである.

(注意終)

$\mathbf{A}$  が負値定符号であることは,  $-\mathbf{A}$  が正値定符号であることと同値なので, 以下がいえる.

定理 39.6  $n$  次実対称行列  $\mathbf{A}$  を考える.

(i).  $k = 1, 2, \dots, n$  の全ての  $k$  次首座小行列式について,

$$(-1)^k \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0 \quad (39.5)$$

が成り立つならば,  $\mathbf{A}$  は負値定符号である.

- (ii).  $k = 1, 2, \dots, n-1$  についての首座小行列式について, (39.5) 式が成り立ち, かつ  $(-1)^n \det(\mathbf{A}) \geq 0$  であれば,  $\mathbf{A}$  は半負値定符号行列である.

」

## 40 第 VII 部の Scilab 実習

ここでは VII 部の復習として Scilab の実習をまとめて行う.

まずはグラムシュミットの直交化についての復習である (定理 38.4 参照).

まず Scilab のメインから, アプリケーション > Scinotes で Scinotes を開くこと.

例題 40.1  $n$  項列ベクトル  $\text{vecV} (\neq \mathbf{0})$  が与えられたときに, それを基準化したベクトルを 1 列目とするような,  $n$  次直交行列を返す関数 `myortho(vecV)` を作る.

- (i). 次のコマンドを, Scinotes に打ち込んで (もしくは, PDF ファイルからコピーして). 適当な名前で保存せよ. その後, Scinote での, 「実行する > ファイルを実行」によって, そのファイルを実行させよ.

```
function myG=myortho(vecV)
    myeps=10^(-14);
    [rowV,colV]=size(vecV);
    if colV>=2 | rowV==1 then
        error('argument must be a column vector');
    end

    mxabs=max(abs(vecV));
    if mxabs<myeps then
        error('argument must be a non zero vector');
    end
    indexes=find(abs(vecV)==mxabs);
    istar=indexes(1);
    vecQ=vecV;
    if istar~=1 then
        vecQ([1 istar])=vecQ([istar 1]);
    end
    myG=eye(rowV,rowV);
    myG(:,1)=vecQ/sqrt(vecQ'*vecQ);

    for piv=2:rowV
        vecAi=myG(:,piv);
        Cs=myG(:,1:piv-1)'*vecAi;
        sumCG=[];
```

```

    for colj=1:piv-1
        sumCG=sumCG+Cs(colj)*myG(:,colj);
    end
    Fi=vecAi-sumCG;
    myG(:,piv)=Fi/sqrt(Fi'*Fi);
end

if istar~=1 then
    myG([1 istar],:)=myG([istar 1],:);
end
endfunction

```

- (ii). その後以下のようにメイン画面に打ち込んで、
- (a) ベクトル  $V$  を基準化したものが、 $P$  の 1 列目と一致していること
  - (b)  $P$  が直交行列であること
- を確認せよ。

```

V=[1:4]'
V1=V/sqrt(V'*V)
P=myortho(V)
P'*P

```

この直交行列を返すプログラムをよく見ると、「 $\prime$ 」は随伴行列を返すので、実は引数のベクトル  $\text{vec}V$  が複素列ベクトルの場合には、ユニタリー行列を返すこととなる。

例題 40.2 前例題に続けて、以下のようにメイン画面に打ち込んで、

- (i). ベクトル  $V$  を基準化したものが、 $P$  の 1 列目と一致していること
- (ii).  $P$  が複素行列であること。かつユニタリー行列であること

を確認せよ。

```

V=[1+%i;2;3]
P=myortho(V)
P'*P

```

では次に三角化についてみてみよう。定理 38.6 についての復習である。 $n$  次実正方行列  $\text{mat}A$  が与えられたときに、それを三角化できるような直交行列  $\text{out}Q$  を返すものとする。プログラムについては、Scilab の `spec` 関数を利用し、(38.8) 式をどんどん繰り返していくというものとする。従って無駄が多いプログラムなのではあるが、定理 38.6 の証明のよい復習となるであろう。

例題 40.3 上のような値を返す関数 `mytriangle(matA)` というプログラムを作る。

- (i). 先の例題 40.1 で作った `myortho(vecV)` を書いたファイルを, Scinotes で開き, その `endfunction` の下側に, 以下のコードを打ち込み (もしくは, PDF ファイルからコピーして). 適当な名前 で保存せよ. その後, Scinote での, 「実行する > ファイルを実行」によって, そのファイルを実行させよ.

```
function outQ=mytriangle(matA)
  myeps=10^(-14);
  [nA,colA]=size(matA);
  if colA~=nA | nA==1 then
    error('argument must be squared matrix');
  end

  outQ=eye(nA,nA);
  nowA=matA;
  for piv=1:nA-1
    [specvec,Lambda]=spec(nowA);
    vecq=specvec(:,1);
    myP=myortho(vecq);
    if piv==1 then
      outQ=myP;
    else
      outQ=outQ*[eye(piv-1,piv-1) zeros(piv-1,nA-piv+1);zeros(nA-piv+1,piv-1) myP];
    end
    nowA=myP(:,2:$)'*nowA*myP(:,2:$);
  end
endfunction
```

- (ii). その後 2 つの行列について, 以下のようにメイン画面に打ち込んで, 行列  $A$  が直交行列  $P$  によって, 上三角行列に三角化されている様子を見ること.

```
A=[1:4; 5:8; 9:12;13:16]
P=mytriangle(A)
P'*P
inv(P)*A*P
```

`inv(P)*A*P` の部分は数値計算誤差の関係上, 下三角部分が「0」という数字にはなかなかならない. しかしよく見ると  $D-17$  などが出ているので, 「0」と考えても差し支えはない. 前例題と同様に, もし行列  $A$  が複素行列であれば, `mytriangle` で返される行列は, ユニタリー行列である.

**例題 40.4** 前例題に引き続いて, 以下のようにメイン画面に打ち込んで,  $P$  が複素行列であることを確認し,  $B$  が  $P$  によって, 三角化されることを確認せよ.

```
B=rand(3,3)+%i*rand(3,3)
```

```
P=mytriangle(B)
```

```
P'*P
```

```
inv(P)*B*P
```

証明はしていないが、任意の  $n$  次正方複素行列は、適当なユニタリ行列で三角化可能であることを示している。 ┘

また `rand` 関数は、第 3 引数に何も書かない場合は、 $(0, 1)$  の一様分布に従う乱数 (疑似乱数) が得られる。従って `B=rand(3,3)+%i*rand(3,3)` と打ち込むたびに、 $B$  は毎回異なる値が出てくる。しかしどの場合の  $B$  でも、それに応じた適当な  $P$  があって、`inv(P)*B*P` は上三角行列となることを確かめるとよい。