

単位円内部にランダムとった 3 点がなす、三角形の面積の期待値について。その初等的解法。

2021 年 10 月 3 日初出・2024 年 9 月 1 日改訂

角田 保 (大東文化大学経済学部)

単位円内のある 1 点を除いて考えても期待値に影響はないので、 xy 平面上の単位円内 (ただし原点は除く) に、独立な一様分布に従って 3 点が存在すると仮定する。座標を取り直して、1 点は x 軸上にかつ正の範囲に存在すると仮定しても、一般性を失わない。さらに一様分布性と円の対称性と、ある点が x 軸上にあるという事象の確率測度は 0 であることから、他の 2 点のうち的一方が xy 平面の上半面 ($y > 0$) にあると仮定しても一般性を失わない。よって以下の密度関数を持つ各々独立な確率変数 R, X_2, Y_2, X_3, Y_3 を用いて、

$$\begin{aligned} f_R(r) &= 2r, & (\text{if } 0 < r < 1) \\ f_{X_2, Y_2}(x_2, y_2) &= \frac{2}{\pi}, & (\text{if } 0 < x_2^2 + y_2^2 < 1, y_2 > 0) \\ f_{X_3, Y_3}(x_3, y_3) &= \frac{1}{\pi}, & (\text{if } 0 < x_3^2 + y_3^2 < 1) \end{aligned}$$

$A(R, 0), B(X_2, Y_2), C(X_3, Y_3)$ について、 $\triangle ABC$ の面積の期待値を求めれば良い。

R を所与としたときの X_2, Y_2 を、以下のように (S, Θ) で変数変換する。

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + S \begin{pmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta \end{pmatrix}, \quad 0 < \Theta < \pi, 0 < S < -R \cos \Theta + \sqrt{1 - R^2 \sin^2 \Theta}$$

ヤコビアンは S なので、 R を所与としたときの S, Θ の条件付き密度関数は以下である。

$$f_{S, \Theta}(s, \theta | R = r) = \frac{2s}{\pi} \quad (\text{if } 0 < \theta < \pi, 0 < s < -r \cos \theta + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta})$$

$\triangle ABC$ について、辺 AB を底辺としたときの高さを H とする。 H は、3 点 A, B, C の位置に依存する確率変数である。

まずは 2 点 A, B の位置が所与の時、つまり $R = r, S = s, \Theta = \theta$ が所与の時の、 H の条件付き密度関数を求める。このとき直線 AB は

$$\sin \theta \cdot (x - r) - \cos \theta \cdot y = 0$$

原点 O から直線 AB に引いた垂線の脚を、点 D とすると、

$$|\overrightarrow{OD}| = r \sin \theta, \quad \overrightarrow{OD} = r \sin \theta \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{OD}$ は直線 AB と垂直なので、点 C の一様分布性から、高さ H の条件付き密度関数は実数 h によって、積分せずに次のように簡単に求めることができる。まず

$$\overrightarrow{OD'} = (r \sin \theta + h) \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{if } 0 < h < 1 - r \sin \theta)$$

として、点 D' を通り直線 AB と平行な直線が、単位円から切り取る弦の長さ $= 2\sqrt{1 - (r \sin \theta + h)^2}$ に、

$$\overrightarrow{OD''} = (r \sin \theta - h) \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{if } 0 \leq h < 1 + r \sin \theta)$$

として、点 D'' を通り直線 AB と平行な直線が、単位円から切り取る弦の長さ $= 2\sqrt{1 - (r \sin \theta - h)^2}$ を加えて、 $f_{X_3, Y_3}(x_3, y_3)$ の値 $\frac{1}{\pi}$ を掛ければよい。

よって、 H の条件付き密度関数は、以下である。

$$f_H(h|R=r, S=s, \Theta=\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\sqrt{1 - (r \sin \theta + h)^2} + \sqrt{1 - (r \sin \theta - h)^2} \right] & (\text{if } 0 < h < 1 - r \sin \theta) \\ \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - (r \sin \theta - h)^2} & (\text{if } h = 0, 1 - r \sin \theta \leq h < 1 + r \sin \theta) \end{cases}$$

次に、この高さ H の条件付き期待値を求めると、

$$\begin{aligned} E(H|R=r, S=s, \Theta=\theta) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{1-r \sin \theta} h \sqrt{1 - (r \sin \theta + h)^2} dh + \frac{2}{\pi} \int_0^{1+r \sin \theta} h \sqrt{1 - (r \sin \theta - h)^2} dh \\ &\quad \text{不定積分は巻末の※を参照して} \\ &= \frac{1}{3\pi} \left[\sqrt{1 - (r \sin \theta + h)^2} \cdot (2h^2 + rh \sin \theta - r^2 \sin^2 \theta - 2) - 3r \sin \theta \arcsin(r \sin \theta + h) \right]_{h=0}^{h=1-r \sin \theta} \\ &\quad + \frac{1}{3\pi} \left[\sqrt{1 - (r \sin \theta - h)^2} \cdot (2h^2 - rh \sin \theta - r^2 \sin^2 \theta - 2) - 3r \sin \theta \arcsin(r \sin \theta - h) \right]_{h=0}^{h=1+r \sin \theta} \\ &= \frac{1}{3\pi} [-3r \sin \theta \arcsin(1)] - \frac{1}{3\pi} \left[\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} \cdot (-r^2 \sin^2 \theta - 2) - 3r \sin \theta \arcsin(r \sin \theta) \right] \\ &\quad + \frac{1}{3\pi} [-3r \sin \theta \arcsin(-1)] - \frac{1}{3\pi} \left[\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} \cdot (-r^2 \sin^2 \theta - 2) - 3r \sin \theta \arcsin(r \sin \theta) \right] \\ &= \frac{2}{3\pi} \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} (r^2 \sin^2 \theta + 2) + \frac{2}{\pi} r \sin \theta \arcsin(r \sin \theta) \quad (1) \end{aligned}$$

これを元に、 $\triangle ABC$ の面積の期待値を求めることができる。底辺 AB の長さについては、 $R=r, \Theta=\theta, S=s$ のとき、 $AB=s$ である。これに高さの期待値である (1) 式を掛けて $\frac{1}{2}$ 倍した

$$\frac{s}{3\pi} \left[\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} (r^2 \sin^2 \theta + 2) + 3r \sin \theta \arcsin(r \sin \theta) \right]$$

が、 R, S, Θ を所与とした条件付きの三角形の面積の期待値である。これに S, Θ の条件付き密度関数を掛けて積分し、それに R の密度関数を掛けて積分したものが、求める期待値である。それは以下で表される。

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left\{ \iint_{0 < \theta < \pi, 0 < s < -r \cos \theta + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta}} \frac{s}{3\pi} \left[\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} \cdot (r^2 \sin^2 \theta + 2) + 3r \sin \theta \arcsin(r \sin \theta) \right] \frac{2s}{\pi} d\theta ds \right\} 2r dr \\ &= \frac{4}{3\pi^2} \int_0^1 r dr \int_0^\pi [\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} (r^2 \sin^2 \theta + 2) + 3r \sin \theta \arcsin(r \sin \theta)] d\theta \int_0^{-r \cos \theta + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta}} s^2 ds \\ &= \frac{4}{3\pi^2} \int_0^1 r dr \int_0^\pi [\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} (r^2 \sin^2 \theta + 2) + 3r \sin \theta \arcsin(r \sin \theta)] \frac{1}{3} (-r \cos \theta + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta})^3 d\theta \\ &\quad x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{ によって、極座標変換の逆を行う。ヤコビアンは } \frac{1}{r} > 0 \text{ であることから、} \\ &= \frac{4}{9\pi^2} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} [\sqrt{1-y^2} (y^2 + 2) + 3y \arcsin(y)] (-x + \sqrt{1-y^2})^3 dx dy \\ &= \frac{4}{9\pi^2} \int_0^1 [\sqrt{1-y^2} (y^2 + 2) + 3y \arcsin(y)] dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (-x^3 + 3x^2 \sqrt{1-y^2} - 3x(1-y^2) + (1-y^2)\sqrt{1-y^2}) dx \\ &= \frac{8}{9\pi^2} \int_0^1 [\sqrt{1-y^2} (y^2 + 2) + 3y \arcsin(y)] dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (3x^2 \sqrt{1-y^2} + (1-y^2)\sqrt{1-y^2}) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{9\pi^2} \int_0^1 [\sqrt{1-y^2} (y^2+2) + 3y \arcsin(y)] \cdot 2(1-y^2)^2 dy \\
&\quad y = \sin t \text{ で置換積分して、} \\
&= \frac{8}{9\pi^2} \int_0^{\pi/2} [\cos t (\sin^2 t + 2) + 3t \sin t] \cdot 2 \cos^4 t \cdot \cos t dt \\
&= \frac{16}{9\pi^2} \int_0^{\pi/2} (3 \cos^6 t - \cos^8 t + 3t \sin t \cos^5 t) dt \\
&\quad \text{第1項と第2項は正整数 } n \text{ の } \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{\pi}{2} \text{ で、第3項は部分積分で変形し、} \\
&= \frac{16}{9\pi^2} \left[3 \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} - \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} \right] + \frac{16}{9\pi^2} \left\{ \left[-\frac{1}{2} t \cos^6 t \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^6 t dt \right\} \\
&= \frac{1}{9\pi^2} \frac{85}{16} \pi + \frac{16}{9\pi^2} \frac{1}{2} \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{9\pi^2} \frac{85}{16} \pi + \frac{1}{9\pi^2} \frac{20}{16} \pi \\
&= \frac{35}{48\pi}
\end{aligned}$$

■

※ まず定数 $r \sin \theta$ を a とおく。積分定数は省略する。

$$\int h \sqrt{1 - (a \pm h)^2} dh$$

$x = a \pm h$ で h を x に置換する。 $\frac{dh}{dx} = \pm 1$ より

$$\begin{aligned}
&= \int \pm (x - a) \sqrt{1 - x^2} (\pm 1) dx \\
&= \int x \sqrt{1 - x^2} dx - a \int \sqrt{1 - x^2} dx \\
&= -\frac{1}{3} (1 - x^2)^{3/2} - a \cdot \frac{1}{2} [x \sqrt{1 - x^2} + \arcsin(x)] \\
&= \frac{\sqrt{1-x^2}}{6} [-2(1 - x^2) - 3ax] - \frac{a}{2} \arcsin(x)
\end{aligned}$$

x を戻して、

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{1-(a \pm h)^2}}{6} [-2(1 - a^2 \mp 2ah - h^2) - 3(a^2 \pm ah)] - \frac{a}{2} \arcsin(a \pm h) \\
&= \frac{1}{6} [\sqrt{1 - (a \pm h)^2} (2h^2 \pm ah - a^2 - 2) - 3a \arcsin(a \pm h)]
\end{aligned}$$

よって両辺の a を $r \sin \theta$ に戻すと、

$$\int h \sqrt{1 - (r \sin \theta \pm h)^2} dh = \frac{1}{6} \left[\sqrt{1 - (r \sin \theta \pm h)^2} (2h^2 \pm rh \sin \theta - r^2 \sin^2 \theta - 2) - 3r \sin \theta \arcsin(r \sin \theta \pm h) \right]$$