半径 1 の単位円内に独立で一様の確率で存在する 3 点 A, B, C が作る，
三角形 ABC の面積の期待値の導出

2021 年 10 月 3 日作成 (2024 年 8 月 2 日修正)
角田 保 (大東文化大学経済学部)

1 問題と定義

講義で述べたようにアーチェリーの的をイメージする．ただし 3 点 A, B, C が xy 座標平面上の領域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 内に均等に確率的に存在すると仮定し，そこでできる三角形 ABC の期待値を求めたい．以下では経済学部生でも理解できるように，偶関数・奇関数の積分や重積分の変数変換公式のあたりまでは細かく説明している．

まず A, B, C の順に点が決めるとしよう．このときに平面を回転して A が x 軸上の 0 以上の座標になるように取り直すとする．そうすると点 $A(R, 0), B(X_2, Y_2), C(X_3, Y_3)$ を考え確率変数 R, X_2, Y_2, X_3, Y_3 として，それぞれの密度関数や同時密度関数が以下で定まる．

$$f_R(r) = 2r \quad (\text{if } 0 \leq r \leq 1)$$
$$f_{X_2,Y_2}(x_2, y_2) = \frac{1}{\pi} \quad (\text{if } x_2^2 + y_2^2 \leq 1)$$
$$f_{X_3,Y_3}(x_3, y_3) = \frac{1}{\pi} \quad (\text{if } x_3^2 + y_3^2 \leq 1)$$

A についてはこのように B, C とは少し異なる形となる[*1]．

このときできる三角形 ABC の面積は，2 つのベクトル

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - r \\ y_2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_3 - r \\ y_3 \end{pmatrix}$$

を用いると楽である．つまり平面ベクトルの外積の絶対値の 1/2 なので，

$$\frac{1}{2}|(x_2 - r)y_3 - (x_3 - r)y_2| \tag{1}$$

で表される．D が原点中心の単位円の全体を表す範囲と定義すると，求める式は以下の 5 重積分である．

$$\int_0^1 \iint_{B \in D} \iint_{C \in D} [(1)\ 式] f_R(r) f_{X_2,Y_2}(x_2, y_2) f_{X_3,Y_3}(x_3, y_3) dx_3 dy_3 dx_2 dy_2 dr$$

[*1] もともと B, C 同様に $A(X_1, Y_1)$ についても密度関数は $f_{X_1,Y_1}(x_1, y_1) = \frac{1}{\pi} \quad (\text{if } x_1^2 + y_1^2 \leq 1)$．回転させるので結局原点からの距離が問題となるので，極座標変換を用いて $X_1 = R\cos(\Theta), Y_1 = R\sin(\Theta)$ で X_1, X_2 から新しい確率変数 R, Θ を用いて原点からの距離 R の密度関数を求めれば良い．ヤコビ行列式は

$$\det \frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(R, \theta)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y_1}{\partial r} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = r$$

なので，その絶対値も r．R, Θ の同時密度関数は，

$$f_{R,\Theta}(r, \theta) = f_{X_1,Y_1}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{1}{\pi} r \qquad \text{if} \begin{cases} (0 < r \leq 1 \text{ かつ } 0 \leq \theta < 2\pi) \\ \text{または} \\ (r = 0 \text{ かつ} \theta = 0) \end{cases}$$

これを θ について定積分して，$f_R(r) = 2r$ が得られる．

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 \iint_{B\in D}\iint_{C\in D} r\cdot|(x_2-r)y_3-(x_3-r)y_2|dx_3dy_3dx_2dy_2dr \tag{2}$$

2 解法

A, B 所与としたとき，A 点と B 点が異なれば

$$\cos t = \frac{x_2-r}{\sqrt{(x_2-r)^2+y_2^2}}, \sin t = \frac{y_2}{\sqrt{(x_2-r)^2+y_2^2}}$$

となる定数 $t\in[0,2\pi)$ が 1 つ定まり，A, B が同じ点なら，$t=0$ とする．この t を用いて，x_3, y_3 を h, v で

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \tag{3}$$

によって回転変換する．h, v の範囲は $h^2+v^2\le 1$ が成り立ち，また回転変換なのでヤコビ行列式 $\frac{\partial(x_3,y_3)}{\partial(h,v)}$ は明らかに 1 なので[*2]，求める式は

$$\begin{aligned}
(2)\text{ 式} &= \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 \iint_{B\in D}\iint_{(h,v)\in D} r\cdot|(x_2-r)(h\sin t+v\cos t)-[(h\cos t-v\sin t)-r]y_2|\cdot|1|dhdvdx_2dy_2dr \\
&= \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 \iint_{B\in D}\iint_{(h,v)\in D} r\cdot|(x_2-r)(h\sin t+v\cos t)-y_2(h\cos t-v\sin t)+ry_2|dhdvdx_2dy_2dr \\
&= \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 \iint_{B\in D}\iint_{(h,v)\in D} r\cdot|\sqrt{(x_2-r)^2+y_2^2}\cdot v+ry_2|dhdvdx_2dy_2dr \\
&= \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 \iint_{B\in D} r\sqrt{(x_2-r)^2+y_2^2}\left\{\iint_{(h,v)\in D}|v+r\sin t|dhdv\right\}dx_2dy_2dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 \iint_{B\in D} r\sqrt{(x_2-r)^2+y_2^2}\left\{\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-v^2}}^{\sqrt{1-v^2}}|v+r\sin t|dhdv\right\}dx_2dy_2dr \\
&= \frac{2}{\pi^2}\int_0^1 \iint_{B\in D} r\sqrt{(x_2-r)^2+y_2^2}\left\{\int_{-1}^1|v+r\sin t|\sqrt{1-v^2}dv\right\}dx_2dy_2dr \\
&= \frac{2}{\pi^2}\int_0^1 \iint_{B\in D} r\sqrt{(x_2-r)^2+y_2^2}\left\{\left(\int_{-r\sin t}^{-1}+\int_{-r\sin t}^{1}\right)(v+r\sin t)\sqrt{1-v^2}dv\right\}dx_2dy_2dr
\end{aligned}$$

$(v+r\sin t)\sqrt{1-v^2}$の v の不定積分の 1 つは, $F(v) = \dfrac{-1}{3}(1-v^2)^{3/2}+r\sin t\cdot\dfrac{1}{2}\left[v\sqrt{1-v^2}+\sin^{-1}(v)\right]$ なので,

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi^2}\int_0^1 \iint_{B\in D} r\sqrt{(x_2-r)^2+y_2^2}[F(-1)+F(1)-2F(-r\sin t)]dx_2dy_2dr \\
&= \frac{2}{\pi^2}\int_0^1 \iint_{B\in D} r\sqrt{(x_2-r)^2+y_2^2}\left[\frac{2}{3}(1-r^2\sin^2 t)^{3/2}-2\cdot r\sin t\cdot\frac{1}{2}\left[-r\sin t\sqrt{1-r^2\sin^2 t}+\sin^{-1}(-r\sin t)\right]\right]dx_2dy_2dr \\
&= \frac{2}{\pi^2}\int_0^1 \iint_{B\in D} r\sqrt{(x_2-r)^2+y_2^2}\left[\frac{2}{3}(1-r^2\sin^2 t)^{3/2}+r\sin t\cdot\left[r\sin t\sqrt{1-r^2\sin^2 t}+\sin^{-1}(r\sin t)\right]\right]dx_2dy_2dr
\end{aligned}$$

[*2]

$$\det\frac{\partial(x_3,y_3)}{\partial(R,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial h} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial y_3}{\partial h} & \frac{\partial y_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \cos t\cdot\cos t-(-\sin t)\cdot\sin t = 1$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\int_0^1 \iint_{B\in D} r\sqrt{(x_2-r)^2+y_2^2}\frac{1}{3}\left[(2+r^2\sin^2 t)\sqrt{1-r^2\sin^2 t}+3r\sin t\cdot\sin^{-1}(r\sin t)\right]dx_2dy_2dr \tag{4}$$

次は r を所与として，x_2, y_2 を

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \tag{5}$$

を満たす s, β で変換する．β の範囲は $0 \leq \beta < 2\pi$ とする．次に β を所与としたときの s を満たす範囲を求める．それは上の式を $x_2^2 + y_2^2 = 1$ に代入して s についての 2 次方程式を解いて，その解の大きい方 (つまり 0 以上の解) を用いて,

$$0 \leq s \leq -r\cos\beta + \sqrt{1-r^2\sin^2\beta}$$

で得られる．この変数変換のヤコビ行列式は極座標変換と同様に

$$\det\frac{\partial(x_2,y_2)}{\partial(s,\beta)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y_2}{\partial s} & \frac{\partial y_2}{\partial \beta} \end{pmatrix} = s$$

さて t の定義から，(4) 式にある $\sin t, \cos t$ の式から x_2, y_2, r などに一旦戻して s, β の式に戻さなくとも，$\sin t = \sin\beta, \cos t = \cos\beta$ と計算できる．以上より求める式は,

$$(4)\text{ 式} = \frac{2}{\pi^2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{-r\cos\beta+\sqrt{1-r^2\sin^2\beta}} rs\frac{1}{3}\left[(2+r^2\sin^2\beta)\sqrt{1-r^2\sin^2\beta}+3r\sin\beta\sin^{-1}(r\sin\beta)\right]\cdot|s|dsd\beta dr$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{-r\cos\beta+\sqrt{1-r^2\sin^2\beta}} rs^2\frac{1}{3}\left[(2+r^2\sin^2\beta)\sqrt{1-r^2\sin^2\beta}+3r\sin\beta\sin^{-1}(r\sin\beta)\right]dsd\beta dr$$

大括弧内には s は含まれていないので，s の定積分は簡単に,

$$= \frac{2}{\pi^2}\int_0^1\int_0^{2\pi} r\frac{(-r\cos\beta+\sqrt{1-r^2\sin^2\beta})^3}{3}\frac{1}{3}\left[(2+r^2\sin^2\beta)\sqrt{1-r^2\sin^2\beta}+3r\sin\beta\sin^{-1}(r\sin\beta)\right]d\beta dr$$

ここで r, β から u, v へ $u = r\cos\beta, v = r\sin\beta$ と，極座標変換の逆を行う．ヤコビ行列式 $\frac{\partial(r,\beta)}{\partial(u,v)}$ の絶対値は $\frac{1}{r}$ であり，式の最初にある r と約分できる．u, v の範囲は $u^2 + v^2 \leq 1$ なので,

$$= \frac{2}{9\pi^2}\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-v^2}}^{\sqrt{1-v^2}}[-u+\sqrt{1-v^2}]^3\left[(2+v^2)\sqrt{1-v^2}+3v\sin^{-1}(v)\right]dudv$$

$\left[(2+v^2)\sqrt{1-v^2}+3v\sin^{-1}(v)\right]$ に u は含まれていない．$[-u+\sqrt{1-v^2}]^3$ を展開して奇関数部分を除いて，偶関数部分のみ残して,

$$= \frac{4}{9\pi^2}\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-v^2}}[3u^2\sqrt{1-v^2}+(\sqrt{1-v^2})^{3/2}]\left[(2+v^2)\sqrt{1-v^2}+3v\sin^{-1}(v)\right]dudv$$

u で定積分して，$= \frac{4}{9\pi^2}\int_{-1}^1[\sqrt{1-v^2}\cdot(\sqrt{1-v^2})^3+(\sqrt{1-v^2})^{3/2}\cdot\sqrt{1-v^2}]\left[(2+v^2)\sqrt{1-v^2}+3v\sin^{-1}(v)\right]dv$

$$= \frac{8}{9\pi^2}\int_{-1}^1(1-v^2)^2\left[(2+v^2)\sqrt{1-v^2}+3v\sin^{-1}(v)\right]dv$$

偶関数なので

$$= \frac{16}{9\pi^2}\int_0^1(1-v^2)^2\left[(2+v^2)\sqrt{1-v^2}+3v\sin^{-1}(v)\right]dv \tag{6}$$

Mathematica などがあればこの定積分を計算してくれるが，経済学部の学生はもっていないだろう．そこで手計算できるように，この式を以下の 2 つに分けて計算を続け，最後に $\frac{16}{9\pi^2}$ を掛ける．

$$\int_0^1 (1-v^2)^2(2+v^2)\sqrt{1-v^2}dv \tag{7}$$

$$3\int_0^1 (1-v^2)^2 v\cdot\sin^{-1}(v)dv \tag{8}$$

(7) 式で $v=\sin(u)$ と置換積分して，$dv=\cos(u)\cdot du$ から，

$$\begin{aligned}
(7)\text{ 式} &= \int_0^{\pi/2}\cos^4 u(2+\sin^2 u)\cos u\cdot\cos u du\\
&= \int_0^{\pi/2}\cos^6 u(3-\cos^2 u)du\\
&= \int_0^{\pi/2}(3\cos^6 u-\cos^8 u)du\\
\text{補足の (9) 式より} &= 3\cdot\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{8\cdot6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{85}{256}\pi
\end{aligned}$$

(8) 式も $v=\sin u$ で置換積分し，

$$\begin{aligned}
(8)\text{ 式} &= 3\int_0^{\pi/2}\cos^4 u\cdot\sin u\cdot u\cdot\cos u du\\
\cos^5 u\sin u\text{ と } u\text{ に分けて部分積分} \quad &= 3\left[-\frac{\cos^6 u}{6}u\right]_0^{\pi/2}-3\int_0^{\pi/2}\frac{-\cos^6 u}{6}du\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^6 u du\\
\text{補足の (9) 式より} &= \frac{1}{2}\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{5}{64}\pi
\end{aligned}$$

2 つたして $\frac{16}{9\pi^2}$ 倍して，

$$\begin{aligned}
(6)\text{ 式} &= \left(\frac{85}{256}\pi+\frac{5}{64}\pi\right)\frac{16}{9\pi^2}\\
&= \frac{35}{48\pi} \fallingdotseq 0.232101
\end{aligned}$$

と，三角形の面積の期待値が得られた．

3 補足：$\cos^{2n}(\theta)$ の $[0,\pi/2]$ での定積分など

経済学で出てくることはほとんどないので，ここで書いておこう．それは，正整数 n について，

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n(\theta)d\theta=\int_0^{\pi/2}\sin^n(\theta)d\theta=\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\begin{cases}\pi/2 & (\text{if } n\text{ が偶数の正整数})\\ 1 & (\text{if } n\text{ が奇数の正整数})\end{cases} \tag{9}$$

が成り立つことである．証明の流れは

- 部分積分を用いて，正整数 m について $\int_0^{\pi/2}\cos^{2m+1}(\theta)d\theta=\frac{2m}{2m+1}\int_0^{\pi/2}\cos^{2m-1}(\theta)d\theta$ を導出する．

- $\int_0^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta = 1$ は簡単.
- $\int_0^{\pi/2} 1 d\theta = \pi/2$ は明らか.

を利用して，数学的帰納法から $\cos^n(\theta)$ について式が成り立つ．$\sin^n(\theta)$ についても同様にできる．もしくは $\cos^n(\theta)$ について積分で $u = \pi/2 - \theta$ としての置換積分でも証明可能.

より一般的に，$a > 0, b > 0$ としてベータ関数 $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$ を用いて

$$2\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1}(\theta)\cos^{2b-1}(\theta) d\theta = B(a,b) \quad (a > 0, b > 0) \tag{10}$$

が成り立つことが知られている．この特別な場合が (9) 式である.

実際ガンマ関数 ($p > 0$ で $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$) の性質

- $B(a,b) = B(b,a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (a > 0, b > 0)$
- $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \quad (a > 0)$
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(n+1) = n! = \frac{1}{2^n} \cdot (2n)!! \quad$ (n は 0 以上の整数)
- $\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\Gamma(1/2) \quad$ (n は正整数)

をあわせて，正整数 n について，

$$\begin{aligned} B(n, 1/2) = B(1/2, n) &= \frac{\Gamma(n)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1/2)} \\ &= \frac{2(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \end{aligned} \tag{11}$$

が成り立ち，同様に正整数 n について

$$\begin{aligned} B(n+1/2, 1/2) = B(1/2, n+1/2) &= \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1)} \\ &= \frac{(2n-1)!!/2^n}{(2n)!!/2^n}[\Gamma(1/2)]^2 \\ &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi \end{aligned} \tag{12}$$

が言えて，これらから (9) 式を導出できる.

例えば，$\sin^{2m+1}(\theta)d\theta$ のときは，(10) 式に $a = m+1, b = 1/2$ を代入して

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1}(\theta) d\theta &= \frac{1}{2}B(m+1, 1/2) \\ \text{(11) 式に } n = m+1 \text{ を代入して} \quad &= \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \end{aligned}$$

$\sin^{2m}(\theta)d\theta$ のときは，(10) 式に $a = m+1/2, b = 1/2$ を代入して

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^{2m}(\theta) d\theta &= \frac{1}{2}B(m+1/2, 1/2) \\ \text{(12) 式より} \quad &= \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$