一辺 1 の正方形の中に、一様分布に従って確率的に 2 点をとったときの、2 点の距離の期待値を求める

(c) 角田　保 (大東文化大学経済学部)
HP: http://www.ic.daito.ac.jp/~tkadoda/index.html

2024 年 8 月 14 日

4 点 $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$ のなす正方形の内部 (境界線は除く) に、2 点 P,Q がそれぞれ独立に一様分布に従って存在すると仮定する。よって、$P(X_1,Y_1),Q(X_2,Y_2)$ としたとき、X_1,Y_1,X_2,Y_2 は各々独立にパラメータ $(0,1)$ の一様分布に従うと仮定する。このとき、求める値は期待値を用いて $E[\sqrt{(X_1-X_2)^2+(Y_1-Y_2)^2}]$ で表される。

そこでまず、$S_1=X_1-X_2, S_2=Y_1-Y_2$ とする。S_1 の密度関数 $f_{S_1}(s)$ を求める。$-1<s\leq 0$ の場合、一様分布の仮定から、

$$
\begin{aligned}
\Pr(S_1\leq s) &= \iint_{x_1+x_2\leq s,0<x_1<1,0<x_2<1} 1dx_1dx_2 \\
&= \frac{1}{2}(1-s)^2
\end{aligned}
$$

両辺微分して、$f_{S_1}(s)=s-1$ が得られる。$0<s<1$ の場合は、

$$
\begin{aligned}
\Pr(S_1> s) &= \iint_{x_1+x_2> s,0<x_1<1,0<x_2<1} 1dx_1dx_2 \\
&= \frac{1}{2}(1-s)^2
\end{aligned}
$$

よって、$\Pr(S_1\leq s)=1-\frac{1}{2}(1-s)^2$。両辺 s で微分して、$f_{S_1}(s)=1-s$ が得られる。
S_2 の密度関数も同様なので、まとめると $i=1,2$ について、以下のように表される。

$$
f_{S_i}(s)=\begin{cases} 1+s & (\text{if } -1<s\leq 0) \\ 1-s & (\text{if } 0<s\leq 1) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}
$$

次に $T_1=S_1^2, T_2=S_2^2$ とする。T_1 の密度関数を求める。$0\leq t<1$ について、

$$
\begin{aligned}
\Pr(T_1 \le t) &= \Pr(S_1^2 \le t) \\
&= 2\Pr(0 \le S_1 \le \sqrt{t}) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2}[1 + (1 - \sqrt{t})]\sqrt{t} \\
&= 2\sqrt{t} - t
\end{aligned}
$$

両辺微分して、T_1 の密度関数は、$f_{T_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} - 1$。

T_2 の密度関数も同様なので、まとめると $i = 1, 2$ について、以下のように表される。

$$
f_{T_i}(t_i) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t_i}} - 1 & (\text{if } 0 < t_i < 1) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}
$$

次に $U = T_1 + T_2$ とする。T_1, T_2 は独立なので、U の密度関数 $f_U(u)$ は、$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{T_1}(t) f_{T_2}(u-t)dt$ で得られる。

$0 < u < 1$ の場合、

$$
\begin{aligned}
f_U(u) &= \int_0^u (\frac{1}{\sqrt{t}} - 1)(\frac{1}{\sqrt{u-t}} - 1)dt \\
&= \int_0^u (\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{u-t}} - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{u-t}} + 1)dt \\
&= [2\arctan(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{u-t}}) - 2\sqrt{t} + 2\sqrt{u-t} + t]_{t=0}^{t=u} \\
&= [\pi - 2\sqrt{u} + u] - [2\sqrt{u}] \\
&= \pi - 4\sqrt{u} + u
\end{aligned}
$$

$1 \le u < 2$ の場合、

$$
\begin{aligned}
f_U(u) &= \int_{u-1}^1 (\frac{1}{\sqrt{t}} - 1)(\frac{1}{\sqrt{u-t}} - 1)dt \\
&= [2\arctan(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{u-t}}) - 2\sqrt{t} + 2\sqrt{u-t} + t]_{t=u-1}^{t=1} \\
&= [2\arctan(\frac{1}{\sqrt{u-1}}) - 2 + 2\sqrt{u-1} + 1] - [2\arctan(\sqrt{u-1}) - 2\sqrt{u-1} + 2 + u - 1] \\
&= 2\arctan(\frac{1}{\sqrt{u-1}}) - 2\arctan(\sqrt{u-1}) + 4\sqrt{u-1} - 2 - u \\
&\qquad \arctan(1/x) = \pi/2 - \arctan(x) \text{ より} \\
&= \pi - 2 - u - 4\arctan(\sqrt{u-1}) + 4\sqrt{u-1}
\end{aligned}
$$

その他の場合は $f_U(u) = 0$ である。

最後の変数変換として、$W = \sqrt{U}$ とする。$U = W^2$ での $\frac{dU}{dW} = 2W > 0$ と $f_U(u)$ の形から、W の密度関数は以下である。

$$f_W(w) = \begin{cases} 2w[\pi - 4w + w^2] & (\text{if } 0 < w < 1) \\ 2w[\pi - 2 - w^2 - 4\arctan(\sqrt{w^2-1}) + 4\sqrt{w^2-1}] & (\text{if } 1 \le w < \sqrt{2}) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

求める値は、$E[\sqrt{(X_1-X_2)^2+(Y_1-Y_2)^2}] = E[\sqrt{S_1^2+S_2^2}] = E[\sqrt{T_1+T_2}] = E[\sqrt{U}] = E[W]$ となる。上の密度関数から、

$$\begin{aligned} E[W] = &\int_0^1 w \cdot 2w[\pi - 4w + w^2]dw \\ &+ \int_1^{\sqrt{2}} w \cdot 2w[\pi - 2 - w^2 - 4\arctan(\sqrt{w^2-1}) + 4\sqrt{w^2-1}]dw \end{aligned}$$

が言えるので、右辺のそれぞれの項を計算して求める。

・1 番目の積分は簡単。

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 w^2[\pi - 4w + w^2]dw &= 2\left[\frac{\pi}{3}w^3 - w^4 + \frac{w^5}{5}\right]_0^1 \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{5} \qquad (1) \end{aligned}$$

・2 番目の積分の第 1 項から第 3 項をまとめて、

$$\begin{aligned} 2\int_1^{\sqrt{2}} w^2(\pi - 2 - w^2)dw &= 2\left[\frac{\pi w^3}{3} - \frac{2w^3}{3} - \frac{w^5}{5}\right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{4\sqrt{2}-2}{3}\pi - \frac{64}{15}\sqrt{2} + \frac{26}{15} \qquad (2) \end{aligned}$$

・2 番目の積分の第 4 項は部分積分によって、

$$\begin{aligned} &-8\int_1^{\sqrt{2}} w^2 \arctan(\sqrt{w^2-1})dw \\ &= -8\left[\left[\frac{w^3}{3}\arctan(\sqrt{w^2-1})\right]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{w^3}{3}\left(\frac{1}{w\sqrt{w^2-1}}\right)dw\right] \\ &= -8 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\pi}{4} + \frac{8}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{w^2}{\sqrt{w^2-1}}dw \end{aligned}$$

この第 2 項は※ 1 より、

$$\begin{aligned} &= -\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi + \frac{8}{3}\frac{1}{2}\left[w\sqrt{w^2-1} + \log|w + \sqrt{w^2-1}|\right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi + \frac{4\sqrt{2} + 4\log(\sqrt{2}+1)}{3} \qquad (3) \end{aligned}$$

・右側の積分の第 5 項は※ 2 より、

$$
\begin{aligned}
&8\int_1^{\sqrt{2}} w^2\sqrt{w^2-1}dw \\
&= 8\cdot\frac{1}{8}\left[2w(w^2-1)^{3/2}+w\sqrt{w^2-1}-\log|w+\sqrt{w^2-1}|\right]_1^{\sqrt{2}} \\
&= 3\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}+1) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

(1)(2)(3)(4) 式を加えて、$E[W]=\frac{2}{15}+\frac{1}{15}\sqrt{2}+\frac{1}{3}\log(1+\sqrt{2})$ であり、これが求める答である。
※ 1 と※ 2 は、次ページ。

※ 1 $\int \frac{w^2}{\sqrt{1-w^2}}dw = \frac{1}{2}\left[w\sqrt{w^2-1}+\log|w+\sqrt{w^2-1}|\right]+C$ の証明 (C は積分定数)

$w=\cosh\theta$ で置換積分する。$dw=\sinh\theta$ より、

$\int \frac{w^2}{\sqrt{w^2-1}}dw = \int \frac{\cosh^2\theta}{\sinh\theta}\cdot\sinh\theta d\theta$

$=\int\cosh^2\theta d\theta = \int \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cosh(2\theta)d\theta$

$=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\sinh(2\theta)+C=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\cosh\theta\sinh\theta+C$

ここで $w=\cosh\theta$ より、$\theta=\cosh^{-1}(w)=\log|w+\sqrt{w^2-1}|$。また $\sinh\theta=\sqrt{\cosh^2\theta-1}=\sqrt{w^2-1}$。以上を代入して、

$=\frac{1}{2}\log|w+\sqrt{w^2-1}|+\frac{1}{2}w\sqrt{w^2-1}+C$

※ 2 $\int w^2\sqrt{w^2-1}dw=\frac{1}{8}\left[2w(w^2-1)^{3/2}+w\sqrt{w^2-1}-\log|w+\sqrt{w^2-1}|\right]+C$ の証明 (C は積分定数)

※ 1 同様に、$w=\cosh\theta$ で置換積分して、

$\int w^2\sqrt{w^2-1}dw=\int\cosh^2\theta\sinh\theta\cdot\sinh\theta d\theta$

$=\frac{1}{4}\int\sinh^2(2\theta)d\theta=\frac{1}{4}\int\frac{\cosh(4\theta)-1}{2}d\theta$

$=\frac{1}{8}[\frac{1}{4}\sinh(4\theta)-\theta]+C$

$=\frac{1}{8}[\frac{1}{2}\sinh(2\theta)\cosh(2\theta)-\theta]+C$

$=\frac{1}{8}[\sinh\theta\cosh\theta(2\cosh^2\theta-1)-\theta]+C$

※ 1 同様に、$\theta=\log|w+\sqrt{w^2-1}|, \cosh\theta=w, \sinh\theta=\sqrt{w^2-1}$ を代入して、

$=\frac{1}{8}[w\sqrt{w^2-1}(2w^2-1)-\log(w+\sqrt{w^2-1})]+C$

$=\frac{1}{8}[w\sqrt{w^2-1}\{2(w^2-1)+1\}-\log(w+\sqrt{w^2-1})]+C$

$=\frac{1}{8}[2w(w^2-1)^{3/2}+w\sqrt{w^2-1}-\log(w+\sqrt{w^2-1})]+C$