2 年ゼミ後半　:複素関数の簡単な入門
「$\cos(i)$ の値や $\sin z = 100$ となる z などを求めよう.」のまとめ.

2015 年 4 月 5 日 初出・　2016 年 12 月 29 日　最終更新

大東文化大学経済学部　角田　保

いままで実数 x について，$e^x, \sin x, \cos x$ などを考えてきた．では複素数 z についても，$e^z, \sin z, \cos z$ などを考えたい．なお以下では，x の n 乗根 $\sqrt[n]{x}$ は，2 以上の整数 n について，$q^n = x$ かつ $q \geq 0$ を満たす実数 q とする．$n = 2$ のときは，$\sqrt[2]{x}$ ではなく $\sqrt{x}$ であらわす．$\ln(x)$ は，$e^q = x$ を満たす実数 q を表すとする．

1　複素平面・絶対値

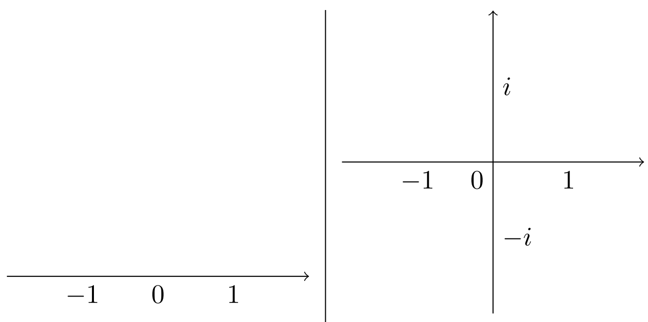
$z^2 = -1$ という z は実数には存在しない．しかしこのような解を考えることは意味がある．一方で，実数のある値は，数直線上のある 1 点と同一視してきた．よって「$z^2 = -1$ を満たす点は，数直線上にない点と同一視すればよい.」

このような動機で，複素平面というものを考える．

定義 1　a, b は実数とする．

1. $z^2 = -1$ を満たす z の一方を i 他方を $-i$ とし，i を虚数単位と言う．
2. 任意の a, b によって，$a + bi$ であらわされる数の集合を複素数という．
3. 複素数 $z = a + bi$ について，値 a, b と，座標 (a, b) に対応させた平面を，複素平面と呼ぶ．複素平面の横軸を実軸とよび，縦軸を虚軸とよぶ．
4. $|z|$ を z の絶対値と呼ぶ．$z = a + bi$ のとき，$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
5. $z = a + bi$ のとき，$a - bi$ を z の共役複素数といい，$\bar{z}$ であらわす．

┘



数直線の図　　複素平面の図

複素数の計算は，等号については実数と同じようにできる．つまり実数の公理の (i) から (x) までがそれぞれ成り立つことと，$i^2 = -1$ に注意すればよい．不等号についての計算は成り立たない．つまり 2 つの複素数 z, w があるとしても，その間に大小関係は存在しない．

ただし，絶対値 $|z|, |w|$ は実数なので，これについては実数の公理 (xi) から (xvii) が成り立つ．

さて n は正整数とするとき，ある値 z を決めると，z^n は 1 つ決まる．一般に z^n を z のことを z のべき関数という．

2　$\exp(z)$ 関数について

私のプリントでは，実数で e を定義するときには，exp 関数

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{1}$$

の $x = 1$ の場合が e であるとした．上の exp 関数を複素数に拡張する．上の実数 x の代わりに，複素数 z について，

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{2}$$

と定義することができる．z の値を 1 つ決めると，$\exp(z)$ の値が 1 つきまる．というのも任意の複素数 z について右辺は絶対収束するので (証明略)，このように定義できる．これ以降で e^z と書くことがあるが，それは全て $\exp(z)$ のことである．

3　$\cos(z), \sin(z)$ 関数について

私のプリントでは，x が実数のとき，$\cos(x)$ と $\sin(x)$ については，

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3}$$

と定義した．上の実数 x の代わりに，複素数 z について，

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \tag{4}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{5}$$

と定義する．どちらの式の右辺も，任意の複素数 z について絶対収束するので (証明略)，このように定義できる．

4　オイラーの公式と $\cos z, \sin z, e^{iz}, e^{-iz}$ の関係

(2) 式の z に代わりに，iz を代入すると，

$$\begin{aligned}
\exp(iz) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \\
&= 1 + \frac{iz}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{iz^4}{4!} + \cdots \\
&\text{絶対収束するので和の順序を代えても同じ値に収束するので} \\
&= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= \cos(z) + i\sin(z)
\end{aligned}$$

$\cos(z), \sin(z)$ などは簡単化のために，$\cos z, \sin z$ と書くとする．よって任意の複素数 z について，

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{6}$$

が成り立つ[*1]．

(6) 式を用いて，$\cos z, \sin z$ を e^{iz}, e^{z} で表そう．(6) 式の z の代わりに $-z$ を代入すると，

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \tag{7}$$

が成り立つ．(6) 式と (7) 式の両辺を辺々加えて 2 で割ると，

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{iz}}{2} \tag{8}$$

また (6) 式から (7) 式の両辺を辺々引いて $2i$ で割ると，

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{iz}}{2i} \tag{9}$$

が言える．三角関数が指数関数であらわされるのが素晴らしい点である．

練習 2　$z = i$ を (8) 式と (9) 式に代入して，$\cos i$ と $\sin i$ を求めよ．　⌟

5　偏角と偏角の主値と $z^{1/n}$

定義 3　z は複素数とする．

1. $z \neq 0$ とする．実軸と z を表す点のなす角を z の偏角と呼び，$\arg(z)$ であらわす．つまり $|z|$ を表す実軸上の点を，0 の回りで半時計回りに $\arg(z)$ 回転させた点が，z を表すである．
2. $\arg(z)$ の中で，$(-\pi, \pi]$ を満たすものが唯一存在するので，それを偏角の主値といい $\mathrm{Arg}(z)$ であらわす．

⌟

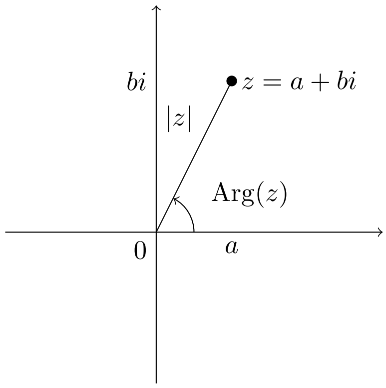
[*1] ちなみに z を実数 θ に書き換えた，

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

をオイラーの公式という．そして $e^{i\theta}$ の n 乗を考えることにより，正整数 n について，

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos\theta + i \sin\theta)^n$$

が成り立つ．さらに n が 0 や負の整数でも，この式は成り立つ．



複素平面上の $z, \mathrm{Arg}(z), |z|$ のイメージ図

$\arg(z)$ を $\mathrm{Arg}(z)$ であらわすと，

$$\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2n\pi, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

である．このように z を一つ与えたとき，$\arg(z)$ は無限に得られるので，$\arg(z)$ は z の無限多価関数であるという．

複素数 w について，$\theta = \arg(w)$ とすると，

$$w = |w|e^{i\theta}$$

であらわされる．これとオイラーの公式から，

$$w^n = |w|^n e^{i(n\theta)}$$

が成り立つ．

これを利用して，z を与えたときに，$w^n = z$ となる w を求めよう．$z = |z|e^{i\arg(z)}$ と書けるので，上の式より，

$$|w|^n e^{i(n\theta)} = |z|e^{i\arg(z)}$$

即ち，

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}, \quad n\theta = \arg(z)$$

実数 $\arg(z)$ の周期が 2π であることから，

$$\theta = \frac{\mathrm{Arg}(z)}{n} + \frac{2\pi}{n}k \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

で考えればよい．よって以下が言える．

定理 4　n は 2 以上の整数で，複素数 z は $z \neq 0$ とする．$w^n = z$ を満たす w を $z^{1/n}$ であらわし，計算は以下で得られる．

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right)\right) \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

または，

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{|z|}\exp\left(i\frac{\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

⌟

z を 1 つ与えたとき，$z^{1/n}$ は n 個の値が存在するので，$z^{1/n}$ は n 価関数であるという．

特に $n=2, k=1$ の場合は，

$$\begin{cases} \cos(\mathrm{Arg}(z)/2+\pi) & = -\cos(\mathrm{Arg}(z)/2) \\ \sin(\mathrm{Arg}(z)/2+\pi) & = -\sin(\mathrm{Arg}(z)/2) \end{cases}$$

なので，$z^{1/2}$ については偏角の主値を用いて以下で表される．

$$z^{1/2} = \pm\sqrt{|z|}\left(\cos(\mathrm{Arg}(z)/2) + i\sin(\mathrm{Arg}(z)/2)\right) \tag{10}$$

PC ソフトで計算した場合には，一方のみ (プラスの方) しか出てこないものが多いので気をつけること．

例えば $(-i)^{1/2}$ は，$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ である．しかし Scilab で `sqrt(%i)` と入力して Enter すると，`0.7071068 - 0.7071068i` がのみが返ってくる．同様に maxima で `realpart(sqrt(-%i));imagpart(sqrt(-%i));` で Shift Enter すると，$\frac{1}{\sqrt{2}}$ と $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ のみが返ってくる．

また $z=0$ のときについては，$z^{1/n}=0$ と定義する．

6　2 次方程式の解の公式の拡張

高校のときに学んだ解の公式は係数が実数であった．前節から，係数が複素数の場合でも同様の公式が得られる．

命題 5　複素数 α, β, γ で $\alpha \neq 0$ とする．複素数 z の 2 次方程式 $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ の解は，以下であらわされる．

$$z = \frac{-\beta + (\beta^2 - 4\alpha\gamma)^{1/2}}{2\alpha}$$

$\beta^2 - 4\alpha\gamma$ を複素数 D であらわすと，上の式は以下であらわされる．

$$z = \frac{-\beta \pm \sqrt{|D|}e^{i\mathrm{Arg}(D)/2}}{2\alpha}$$

┘

7　対数関数の複素数への拡張．$\log(z)$

複素数 $z \neq 0$ が与えられたとき $e^w = z$ となる，複素数 w を求めたい．$w = a + bi$ とすると，

$$e^a e^{ib} = |z|e^{i\arg(z)}$$

が言えるので，

$$a = \ln|z|, b = \arg(z)$$

$\arg(z)$ は無限多価関数であることに注意すること．従って，

定義 6　複素数 $z \neq 0$ について，$e^w = z$ を満たす w を $\log(z)$ であらわし，式では以下であらわされる．

$$\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$$

$\arg(z)$ は無限多価関数なので，$\log(z)$ も無限多価関数である．　┘

8　$\sin z$ や $\cos z$ の逆関数の複素数への拡張

実数 $-1 \leq y \leq 1$ について，$\sin w = y$ を満たす実数 w を求めることを高校で行った人も多いであろう．例えば，$\sin w = 1$ を満たす w は簡単に，$w = \pi/2 + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ であらわされた．このように無限多価関数の概念は高校でも一応学んでいるのである．

そこで，複素数 z を与えたときに，$\sin w = z$ や $\cos w = z$ を満たす w を求めるのがこの節である．前者を説明しよう．

$\sin w = z$ と (9) 式より，

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z$$

分母を払って，両辺 e^{iw} を掛けて整理すると，

$$(e^{iw})^2 - 2iz(e^{iw}) - 1 = 0$$

これは (e^{iw}) についての 2 次方程式になっているので，命題 5 より，

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2}$$

$$iw = \log(iz + (1 - z^2)^{1/2})$$

両辺に $-i$ をかけて，

$$w = -i \log(iz + (1 - z^2)^{1/2})$$

定義 7　複素数 z について，$\sin(w) = z$ を満たす w を $\sin^{-1}(z)$ であらわし，式では以下であらわされる．

$$\sin^{-1}(z) = -i \log(iz + (1 - z^2)^{1/2})$$

$\log(z)$ は無限多価関数なので，$\sin(z)$ も無限多価関数である．　┘

次に z を与えたときに $\cos w = z$ となる w を求めよう．

$\cos w = z$ と (8) 式より，

$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z$$

分母を払って，両辺 e^{iw} を掛けて整理すると，

$$(e^{iw})^2 - 2z(e^{iw}) + 1 = 0$$

これも (e^{iw}) についての 2 次方程式になっているので，命題 5 より，

$$e^{iw} = z + (z^2 - 1)^{1/2}$$

ところで，$(z^2 - 1)^{1/2}$ の 2 つの解は $i(1 - z^2)^{1/2}$ であらわされる．よって，

$$iw = \log(z + i(1 - z^2)^{1/2})$$

$$w = -i \log(z + i(1 - z^2)^{1/2})$$

定義 8　複素数 z について，$\cos(w)=z$ を満たす w を $\cos^{-1}(z)$ であらわし，式では以下であらわされる．

$$\cos^{-1}(z)=-i\log(z+i(1-z^2)^{1/2})$$

$\log(z)$ は無限多価関数なので，$\cos(z)$ も無限多価関数である． ┘

ここで，このレジュメの題名どおり $\sin(z)=100$ となる z を求めよう．定義 7 より，

$$\begin{aligned}
\sin^{-1}(100) &= -i\log(100i+(-9999)^{1/2}) \\
\text{((10) 式より)} \quad &= -i\log(100i\pm\sqrt{9999}i) \\
&= -i\log((100\pm\sqrt{9999})i) \\
\text{((}100\pm\sqrt{9999}\text{ はともに正なので定義 6 より)} \quad &= -i\ln(100\pm\sqrt{9999}+\pi/2+2n\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)
\end{aligned}$$

$-\ln(100\pm\sqrt{9999})=\ln\left(\frac{1}{100\pm\sqrt{9999}}\right)=\ln(100\mp\sqrt{9999})=\ln(100\mp3\sqrt{1111})$ なので，結局

$$\sin^{-1}(100)=\frac{\pi}{2}+2n\pi+i\ln(100\pm3\sqrt{1111}) \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

Scilab で `asin(100)` と打ち込むと，1.5707963 + 5.2982924i が返ってくる．これは上の式の中の 1 つの，$\frac{\pi}{2}+i\ln(100+3\sqrt{1111})$ を意味している．

9　双曲線関数 $\sinh(\theta),\cosh(\theta)$ の拡張と逆関数

前節について，$\sin^{-1}(5i)$ を maxima で求めようとして，`asin(5*%i)` で Shift+Enter すると，`asinh(5)` が返ってくる．ここではその意味を説明することとする．

まず双曲線関数を実数で定義する．

定義 9　θ を実数とする．

1. $\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}$ を双曲線余弦関数 (ハイパボリックコサイン) と呼び，$\cosh(\theta)$ であらわす．
2. $\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}$ を双曲線正弦関数 (ハイパボリックサイン) と呼び，$\sinh(\theta)$ であらわす．

┘

これらをごく簡単に説明すると，xy 平面で，$x^2-y^2=1$ のグラフ (ただし $x\geq0$) を書いたとき，そのグラフ上の点を，$x=\cosh(\theta),y=\sinh(\theta)$ で θ についてパラメータ表示したものとなる．

そして (9) 式・(8) 式と同様に，複素数に拡張して以下で定義する．

定義 10　z を複素数とする．2 つの 1 価関数 $\cosh(z),\sinh(z)$ を以下のように定義する．

$$\cosh(z)=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\quad \sinh(z)=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

┘

前節と同様にして，$\sinh^{-1}(z)$ が定義される．$\sinh(w)=z$ となる w を求めてみよう．

$$\frac{e^w-e^{-w}}{2}=z$$

より，

$$(e^w)^2 - 2ze^w - 1 = 0$$

$$e^w = z + (z^2+1)^{1/2}$$

$$w = \log(z + (z^2+1)^{1/2})$$

よって，

定義 11　複素数 z について，$\sinh(w) = z$ を満たす w を $\sinh^{-1}(z)$ であらわし，式では以下であらわされる．

$$\sinh^{-1}(z) = \log(z + (z^2+1)^{1/2})$$

右辺は無限多価関数なので，$\sinh(z)$ も無限多価関数である．　⌟

$\cosh^{-1}(z)$ についても同様に定義できる．$\cosh(w) = z$ となる w を求めよう．

$$\frac{e^w + e^{-w}}{2} = z$$

より，

$$(e^w)^2 - 2ze^w + 1 = 0$$

$$e^w = z + (z^2-1)^{1/2}$$

$$w = \log(z + (z^2-1)^{1/2})$$

よって，

定義 12　複素数 z について，$\cosh(w) = z$ を満たす w を $\cosh^{-1}(z)$ であらわし，式では以下であらわされる．

$$\cosh^{-1}(z) = \log(z + (z^2-1)^{1/2})$$

右辺は無限多価関数なので，$\cosh(z)$ も無限多価関数である．　⌟

以上からこの節の最初の式の説明ができる．

命題 13　z は複素数とする．

1. $\sin^{-1}(z) = -i\sinh^{-1}(iz) = i\sinh^{-1}(-iz)$
2. $\cos^{-1}(z) = -i\cosh^{-1}(z) = i\cosh^{-1}(z)$

⌟

同様にできるので 1 のみ証明する．複素数 w が $z = \sin w$ を満たしているとする．

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = -\frac{e^{-iw} - e^{iw}}{2i}$$

これは以下と同値である．

$$z = \frac{\sinh(iw)}{i} = -\frac{\sinh(-iw)}{i}$$

よって，

$$iz = \sinh(iw), \quad -iz = \sinh(-iw)$$

$$iw = \sinh^{-1}(iz), \quad -iw = \sinh^{-1}(-iz)$$

w の式にすると，

$$w = -i\sinh^{-1}(iz), \quad w = i\sinh^{-1}(-iz)$$

$w = \sin^{-1}(z)$ なので，主張が証明された．(証明終)

この命題の 1 より，実数 b について，$\sin^{-1}(ib)$ の 1 つは，

$$\sin^{-1}(ib) = i\sinh^{-1}(-i(ib)) = i\sinh^{-1}(b)$$

が言えるため，この節の最初の `asin(5*%i)` で `asinh(5)` が返ってくることが説明できた．

10 z, c とも複素数のときの，z^c

まず以下を示そう．

命題 14 複素数 z について，$z = e^{\log(z)}$ ⌟

証明 n が任意の整数で $\log(z) = \ln|z| + i(\mathrm{Arg}(z) + 2n\pi)$ なので，

$$\begin{aligned} e^{\log(z)} &= \exp\left[\ln|z| + i(\mathrm{Arg}(z) + 2n\pi)\right] \\ &= \exp[\ln|z| + i\mathrm{Arg}(z)] \\ &= |z|e^{i\mathrm{Arg}(z)} \\ &= z \end{aligned}$$

(証明終)

よって，$z^c = (e^{\log(z)})^c$ と表される．実数 a, b で $(e^a)^b = e^{ab}$ が成り立つことので，これを拡張して以下のように定義する．

定義 15 c を複素数の定数とする．複素数 z についての関数 z^c は，以下のように z の多価関数で定義される．

$$z^c = e^{c\log(z)}$$

⌟