2015 年 8 月 1 日作成　大東文化大学経済学部　角田　保

目次

1　問題

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{4n}P_n}{{}_{2n}P_n}\right)^{1/n}$ を求めよ.

ただし ${}_nP_k$ は順列．つまり正整数 $n \geq k$ で，

${}_nP_k := \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$

2　解法 1:　高 III で学ぶ解き方・・・区分求積法の利用

自然対数をとると，

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{{}_{4n}P_n}{{}_{2n}P_n}\right)^{1/n} &= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{4n(4n-1)\cdots(3n+1)}{2n(2n-1)\cdots(n+1)}\right)\\
&= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{4(4-1/n)\cdots(3+1/n)}{2(2-1/n)\cdots(1+1/n)}\right)\\
&= \frac{1}{n}[\{\ln 4+\ln(4-1/n)+\cdots+\ln(3+1/n)\}-\{\ln 2+\ln(2-1/n)+\cdots+\ln(1+1/n)\}]\\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(3+k/n)-\sum_{k=1}^{n}\ln(1+k/n)\right)\\
\text{区分求積法より}\quad &\to \int_0^1(\ln(3+x)-\ln(1+x))dx \quad (n\to\infty)\\
&= [\{(3+x)\ln(3+x)-x\}-\{(1+x)\ln(1+x)-x\}]_0^1\\
&= [(3+x)\ln(3+x)-(1+x)\ln(1+x)]_0^1\\
&= (4\ln 4-2\ln 2)-(3\ln 3-1\ln 1)\\
&= 4\ln 4-2\ln 2-3\ln 3\\
&= \ln 4^4-\ln 2^2-\ln 3^3\\
&= \ln\frac{4^4}{2^2\cdot 3^3}\\
&= \ln\frac{64}{27}
\end{aligned}
$$

$\ln x$ は x の連続関数なので，両辺の真数を比較して，

$$
\left(\frac{{}_{4n}P_n}{{}_{2n}P_n}\right)^{1/n}\to\frac{64}{27}\quad(n\to\infty)
$$

3　大学で学ぶ，数列の定理

正の実数列 a_n と，実数 α について，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\alpha$$

4　解法 2:　大学生的な解き方.

ヒント・・・3 節の a_n で，$a_n=\dfrac{{}_{4n}P_n}{{}_{2n}P_n}$ と考えればよい.

(証明)

$$\begin{aligned}
\frac{{}_{4(n+1)}P_{n+1}/{}_{2(n+1)}P_{n+1}}{{}_{4n}P_n/{}_{2n}P_n} &= \frac{{}_{4(n+1)}P_{n+1}}{{}_{4n}P_n}\cdot\frac{{}_{2n}P_n}{{}_{2(n+1)}P_{n+1}} \\
&= \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\cdot\frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \frac{(4+4/n)(4+3/n)(4+2/n)(4+1/n)}{(3+3/n)(3+2/n)(3+1/n)}\cdot\frac{1+1/n}{(2+2/n)(2+1/n)} \\
&\to \frac{4^4}{3^3\cdot 2^2}\quad (n\to\infty) \\
&= \frac{64}{27}
\end{aligned}$$

よって 3 節の定理より，$\sqrt[n]{\frac{{}_{4n}P_n}{{}_{2n}P_n}}\to\frac{64}{27}\quad(n\to\infty)$