2015 年 5 月 9 日作成　大東文化大学経済学部　角田　保

2 年ゼミ参考ファイル　n 変数の相加相乗平均の証明を，4 通りの方法で

0　はじめに

高校 2 年のときには，0 以上の実数 a, b について

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{等号は } a = b \text{ のとき})$$

という不等式を習った人もいることでしょう．これは 2 変数の相加相乗平均の定理と言います．この場合の証明は以下のように簡単です．

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab}) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \\ &\geq 0\end{aligned}$$

最後の不等式で等号が成り立つのは $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ のとき，つまり $a = b$ のときのみですね．

以下では n は 2 以上の整数定数とします．n 変数の相加相乗平均の定理はというと，

定理 1 n 個の非負の実数 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$ について，

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \tag{1}$$

が成り立つ．等号が成り立つのは $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときに限る．　┘

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ のうち少なくとも 1 つが 0 の場合は，定理 1 が成り立つのは簡単にわかります．よって後は，定理 1 の $x_1, \cdots, x_n$ が全て正であることを仮定して証明します．つまり以下の定理 2 の (1) のことです．ですがその前に，ちょっと工夫をします．

今 (1) 式の両辺を右辺で割って $i = 1, 2, \cdots, n$ について，$y_i = \frac{x_i}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}$ と置くと，$\frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} \geq 1$ となります．一方 y_i の作り方から $y_1 y_2 \cdots y_n = 1$ が成り立つことも確認してください．よって以下が言えます．

定理 2 以下の *2* つの命題は同値である．

(1) 任意の正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ について，(1) 式が成り立つ．等号が成り立つのは $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときに限る．

(2) 任意の正数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ が，$y_1 y_2 \cdots y_n = 1$ を満たすとき，

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \geq 1 \tag{2}$$

が成り立つ．等号が成り立つのは $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$ のときに限る．

┘

この定理の (2) を利用することが，以下の 1 節・2 節・4 節で工夫した点となります．

1　証明その 1:　数学的帰納法を用いて代数的に

定理 2 の (2) の証明:

(i) すでに 2 変数の相加相乗を示したので，$n=2$ のとき (2) 式が成り立ちます．

(ii)n 変数の場合に (2) 式が成り立つと仮定します．よって (1) 式も n 変数で成り立つと仮定します．$n+1$ 個の正の変数 $y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1}$ について，$y_1 y_2 \cdots y_n y_{n+1} = 1$ が成り立っているとします．ここで

$$y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \leq y_{n+1}$$

を仮定しても一般性は失わないので，このように仮定します．すると $y_1 y_2 \cdots y_n y_{n+1} = 1$ なので，

$$y_1 \leq 1 \leq y_{n+1}$$

が言えます．よって $(y_1 - 1)(y_{n+1} - 1) \leq 0$ が言えるので，これを展開して変形して

$$y_1 + y_{n+1} \geq y_1 y_{n+1} + 1$$

が成り立ちます．これを利用して，

$$\begin{aligned} \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n + y_{n+1}}{n+1} &\geq \frac{(y_2 + \cdots + y_n) + y_1 y_{n+1} + 1}{n+1} \\ \text{数学的帰納法の仮定と定理 2 の (1) より，}\quad &\geq \frac{n\sqrt[n]{(y_2 \cdots y_n) y_1 y_{n+1}}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって $n+1$ 変数の場合も定理 2 の (2) が成り立ちます．

(i)(ii) より数学的帰納法から，定理 2 の (2) が成り立ちます．

□

2　証明その 2: 不等式 $e^x \geq 1 + x$ の利用 (等号は $x = 0$ のときのみ)

上で書いた不等式で $x = y - 1$ とすると，

$$e^{y-1} \geq y \quad (\text{等号は } y = 1 \text{ のときのみ}) \tag{3}$$

定理 2 の (2) の証明:

$y_1, y_2, \cdots, y_n$ について，(3) 式より，

$$e^{y_i - 1} \geq y_i \quad (\text{等号は } y_i = 1 \text{ のときのみ}) \tag{4}$$

が言えます．この両辺を $i = 1$ から n まで掛け合わせます．y_1 から y_n までの積は 1 なので，

$$e^{y_1 + y_2 + \cdots + y_n - n} \geq 1 \tag{5}$$

よって $y_i + y_2 + \cdots + y_n - n \geq 0$ が成り立つので，これを変形して，(2) 式が成り立ちます．

(2) 式が等号で成り立つための必要十分条件は，(4) 式が全て等号で成り立つことです．つまり $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$ のことです．□

3　証明その 3: 対数関数 $\ln x$ が狭義凹関数であることを用いる

定理 2 の (1) の証明:

対数関数 $\ln x$ が，$x > 0$ で狭義凹関数となることは簡単に示されます．狭義凹関数の性質から，任意の 2 正数 x_1, x_2 について，$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ を満たす任意の 2 実数 α_1, α_2 について，

$$\ln(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 \ln(x_1) + \alpha_2 \ln(x_2) \tag{6}$$

が言えます．等号は $x_1 = x_2$ のときのみです．これを n 変数に拡張すると，

任意の n 正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ について，$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \cdots, \alpha_n > 0$ かつ $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$ を満たす任意の n 実数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ について，

$$\ln(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 + \cdots + \alpha_n \ln x_n \tag{7}$$

が言えます．等号は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときのみです．

ここで (7) 式に $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ を代入し，不等式を解いていくと，

$$\ln((x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n) \geq \frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 \cdots + \ln x_n)$$
$$\ln((x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n) \geq \frac{1}{n}\ln(x_1 x_2 \cdots x_n)$$
$$\ln((x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n) \geq \ln(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}$$
$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n \geq (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}$$

この右辺は (1) 式の右辺そのものなので，以上より定理 2 の (1) が言えます．　□

4　証明その 4:　ラグランジュ乗数法を用いる

定理 2 の (2) の証明:

y_i についての条件式，$y_1 y_2 \cdots y_n = 1$　の両辺の自然対数をとると，

$$\ln y_1 + \ln y_2 + \cdots + \ln y_n = 1 \tag{8}$$

となります．そこで 2 つの n 変数実数値関数，$f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ と $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を，

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \tag{9}$$
$$g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \ln y_1 + \ln y_2 + \cdots + \ln y_n \tag{10}$$

とします．$g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ が凹関数で C^1 級なのは簡単にわかります．$f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ は凸関数で C^1 級であることは明らかです．

よって $g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0$ のもとでの条件付き最小化問題をラグランジュ未定乗数法で考えてみると，

$$L(y_1, y_2, \cdots, y_n, \lambda) = f(y_1, y_2, \cdots, y_n) - \lambda g(y_1, y_2, \cdots, y_n) \tag{11}$$

を作り (λ は実数)，ラグランジュ条件

(1) $\frac{\partial L}{\partial y_i}(y_1^*, y_2^*, \cdots, y_n^*, \lambda^*) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$
(2) $g(y_1^*, y_2^*, \cdots, y_n^*) = 0$
(3) $\lambda^* > 0$

を満たす $y_1^*, y_2^*, \cdots, y_n^*, \lambda^*$ があれば，その $y_1^*, y_2^*, \cdots, y_n^*$ が $f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を最小にするものとなります．
今の場合は，

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1, \lambda = 1/n \tag{12}$$

というものがラグランジュ条件を満たします (後述)．よって，$f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ の最小値は $f(1, 1, \cdots, 1)$ です．すなわち $\frac{1}{n}(1 + 1 + \cdots + 1) = 1$ です．以上より，定理 2 の (2) が言えます．

(12) 式が，ラグランジュ条件を満たすことの証明: ラグランジュ条件 (1) は，

$$\frac{1}{n} - \lambda \frac{1}{y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{13}$$

を満たすことです．これを書き換えると，

$$y_i = n\lambda \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{14}$$

さてこの式を，ラグランジュ条件 (2) の $g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0$ に代入すると，

$$\begin{aligned} \ln(n\lambda) + \ln(n\lambda) + \cdots + \ln(n\lambda) &= 0 \\ n \ln(n\lambda) &= 0 \\ n\lambda &= 1 \\ \lambda &= 1/n \end{aligned} \tag{15}$$

これはラグランジュ条件 (3) の条件を満たします．(15) 式を (14) 式に代入すれば、

$$y_i = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

です．以上より，(12) 式がラグランジュ条件を満たしていることがわかります．

□