2015年7月25日作成　大東文化大学経済学部　角田　保

目次

1　問題

実数 x, y, z について,

$$0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq z \leq \pi, \tag{1}$$

$$x + y + z = 2\pi \tag{2}$$

のとき,

$$\sin(x) + \sin(y) + \sin(z) \tag{3}$$

の最大値を求めよ．以下 $\sin(x)$ や $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ などは $\sin x, \sin\frac{x}{2}$ と書く．

2　解法 1:　高校生的な解き方

$$\begin{aligned}\sin x+\sin y+\sin z &= \sin x+\sin y+\sin(2\pi-x-y)\\ &= \sin x+\sin y+\sin(-x-y)\\ &= \sin x+\sin y-\sin(x+y)\end{aligned}$$

そこで，y をある値に固定して考えて，上の式を x の関数 $f(x)$ とおいて，

$$f(x)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$$

とする．微分すると，

$$\begin{aligned}f'(x) &= \cos x-\cos(x+y)\\ \text{和積公式より}\quad &= -2\sin\left(x+\frac{y}{2}\right)\sin\left(\frac{-y}{2}\right)\\ &= 2\sin\left(x+\frac{y}{2}\right)\sin\frac{y}{2}\end{aligned}$$

(i)$y=0$ のとき．任意の x について，$f(x)=0$

(ii)$y>0$ のとき．$0<\frac{y}{2}\leq\frac{\pi}{2}$ と $\sin\frac{y}{2}>0$ に気を付けて増減表を書くと，

x	0		$\pi-\frac{y}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	

となる．この表より，y を固定したとき，$x=\pi-y/2$ のときに最大値 $f(\pi-y/2)$ をとる．計算して，

$$\begin{aligned}f\left(\pi-\frac{y}{2}\right) &= \sin\left(\pi-\frac{y}{2}\right)+\sin y-\sin\left(\pi-\frac{y}{2}+y\right)\\ &= \sin\frac{y}{2}+\sin y-\sin\left(\pi+\frac{y}{2}\right)\\ &= \sin\frac{y}{2}+\sin y+\sin\frac{y}{2}\\ &= 2\sin\frac{y}{2}+\sin y\end{aligned}$$

よって，この右辺の式を $g(y)$ と置いて $g(y)=2\sin\frac{y}{2}+\sin y$ として，y について最大となるものが，(3) 式を最大にするものとなる．

微分して

$$\begin{aligned}g'(y) &= \cos\frac{y}{2}+\cos y\\ &= \cos\frac{y}{2}+2\cos^2\frac{y}{2}-1\\ &= 2\cos^2\frac{y}{2}+\cos\frac{y}{2}-1\\ &= \left(2\cos\frac{y}{2}-1\right)\left(\cos\frac{y}{2}+1\right)\end{aligned}$$

増減表を書くと，

y	0		$2\pi/3$		π
$g'(y)$		$+$	0	$-$	
$g(y)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	

なので，$y = 2\pi/3$ のとき，最大値 $g(2\pi/3) = 2\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる．このときの x, z の値を求めると，$x = \pi - y/2, z = 2\pi - x - y$ なので，計算すると $x = z = \frac{2\pi}{3}$．

(i) の場合と (ii) の場合の，それぞれの最大値を比べると，(ii) の最大値の方が大きい．結局 (3) 式は，$x = y = z = \frac{2\pi}{3}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる．

3　$\sin u$ と凹凸

(i)$0 \leq u \leq \pi$ で $\sin u$ は連続関数である．

(ii) また $\sin u$ を u について 2 階微分すると，

$$(\sin u)'' = (\cos u)' = -\sin u$$

なので，$0 < u < \pi$ のとき，$(\sin u)'' < 0$ である．

(i)(ii) より，

$$\sin u \text{ は}, 0 \leq u \leq \pi \text{で狭義凹関数である．} \tag{4}$$

ことが言える．もちろん凹関数でもある．

4　解法 2:　大学生的な解き方 (1) 経済学部生の得意な方法

$$f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z$$
$$g(x,y,z) = x + y + z - 2\pi$$

とする．(4) 式の凹関数性と，凹関数と凹関数の和はやはり凹関数であることから，$f(x,y,z)$ も x,y,z について (1) 式の範囲で凹関数である．$g(x,y,z)$ が x,y,z について凹関数であることは明らか．従って，ラグランジュ条件

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = \cos x + \lambda = 0 \tag{5}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y} = \cos y + \lambda = 0 \tag{6}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial g}{\partial z} = \cos z + \lambda = 0 \tag{7}$$
$$g(x,y,z) = x + y + z - 2\pi = 0 \tag{8}$$
$$\lambda \neq 0 \tag{9}$$

を満たすものが存在すれば，それが (1)(2) 式の条件で，(3) 式の最大値をとる x,y,z である．(5) 式 (6) 式 (7) 式から，$\cos x = \cos y = \cos z$ が簡単に言える．(1) 式からこれは結局 $x = y = z$ と同値である．これを (8) 式に代入すると，

$$x = y = z = \frac{2}{3}\pi$$

がいえる．(5) 式 (6) 式 (7) 式より，$\lambda = \frac{1}{2}$．これは (9) 式を満たす．以上より，

$$x = y = z = \frac{2}{3}\pi$$

のとき，ラグランジュ条件を満たすので，$f(x,y,z)$ はこのとき最大値をとる．それを計算すると，
$f(2\pi/3, 2\pi/3, 2\pi/3) = 3\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{3\sqrt{3}}{2}$．つまり，$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ が最大値である．

5　解法 3:　大学生的な解き方 (2) 数学専攻生の得意な方法

(4) 式の狭義凹関数性から，x,y,z が (1) 式にあるとき，

$$\frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin y + \frac{1}{3}\sin z \leq \sin\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z\right)$$

(ただし等号は $x = y = z$ のときのみ)

が言える．(2) 式から，等号が成り立つのは $x = y = z = \frac{2\pi}{3}$ のときのみ．よって，

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin y + \frac{1}{3}\sin z &\leq \sin\frac{2\pi}{3}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

両辺 3 倍することによって，$\sin x + \sin y + \sin z$ は $x = y = z = \frac{2\pi}{3}$ のとき，最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとることがいえる．