経済学部で出会う数学+α (作成中) Python・Excel・Excel VBA を利用して

角田 保

2020年7月8日更新

はじめに:

- 数学だけでなく、python(主に sympy) や Excel·Excel VBA の話題もふんだんに取り入れていますので、楽しんで下さい.
- 数学を学ぶメリットはいくつかあります.
 - (i). 経済学では数字を沢山つかうから、役にたつ.
 - (ii). 自分がどこまで分かっていて、どこから分かっていないのかが、理解できる.
- (iii). 他人や権威を気にせずに、誤りを指摘できる.

などです。特に (ii)(iii) これらは他の学問ではなかなか育まれません。数学以外の, ほとんどの学問での理論においては, 現実社会などの理論の対象物が, 理論の前提条件や理論の仮定とどのくらい一致しているかを気にしなければなりません。数学はそれがないので, 純粋に理論展開に集中できるので, 上のような能力を育むことができるのです。

● 微分積分学は、積分・微分・実数の性質、の順に理論が発展してきました。実数とは何かをあまり気にすることなく、計算する理論が発達した後に、実数の性質の特徴づけが行われてきました。一方、学部での経済学は、微分ばかり学んで、積分は少し、実数の性質はほとんどやりません。それらを勘案して、実数の性質に関する細かい考察は、第 VII 部まででてきません。

第 I 部の理解だけで、数学を使う経済学部のほぼ全ての講義は楽に理解できます.

第 II 部までできたら、数学をかなり使うゼミでも、簡単に理解できるようになるでしょう。第 II 部までで終わって、学部の経済学で足りないのは、計量経済学と統計学だけです。これらは 2 変数関数の積分を学ぶ必要があります。

- N は 1 以上の整数の集合,Q は有理数の集合,R は実数の集合を表します.
- このページだけ「ですます」調で、後は「である」調とします.
- sympy については、スマートフォンからでも可能なように sympy live(http://live.sympy.org) で 動くコードを使っています. PC では Anaconda などを DL することによって、より複雑なコードを書くことができますが、それはここでは載せません.

春の講習(2018年 PDF は以下)の内容は一通り読んだものとしています.

http://www.ic.daito.ac.jp/tkadoda/2018/mathcamp/2018spring0420.pdf

目次

第Ⅰ部	春休みの復習: 経済学のための数学 (学部中級用)	7
1	イントロ:多項式とグラフ及び方程式と不等式	7
1.1	$y = (x - \alpha)^n$ のグラフと等式・不等式	7
1.2	2 次式のグラフと 3 次式のグラフ	9
1.3	1 次式の積のグラフと,方程式・不等式	12
1.4	phthon(sympy) の利用・・・多項式の因数分解のコマンド factor	17
1.5	phthon(sympy) の利用・・・n 次方程式の解のコマンド solve	17
1.6	phthon(sympy) の利用・・・n 次不等式の解のコマンド reduce inequalities	18
2	最大・最小の定義及び,上限・下限の定義と実数の連続性	19
2.1	上限・下限の定義と実数の連続性	19
2.2	関数の極限値についての取扱の確認と単調関数の極限	21
3	1変数実数値関数の微分の利用	24
3.1	最初に	24
3.2	指数と対数	25
3.3	連続関数・導関数に関する重要な定理群・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	25
3.4	phthon(sympy) の利用・・・テイラーの公式のコマンド series	28
3.5	積の微分・商の微分・合成関数の微分	29
3.6	逆関数と逆関数の微分・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	30
3.7	最大化問題・最小化問題の1階の条件	32
3.8	Python(sympy) の利用 diff, subs	34
3.9	関数の凹凸性と最大化・最小化問題	34
3.10	最大化問題・最小化問題の2階の条件	41
3.11	おまけ 1:テイラーの公式と,exp 関数の PC による計算例	43
3.12	おまけ 2: 微分の応用のニュートン法で平方根や対数関数を近似する	45
4	2変数実数値関数の微分と応用	47
4.1	3 次元グラフと等高線	47
4.2	2 変数実数値関数の極限値・連続性・偏微分可能性	47
4.3	[飛ばしてよい]sup で極限値・連続性・微分可能性を表す	50
4.4	3次元空間における接平面と、平面上の接線の関係	51
4.5	2 変数実数値関数の最大化・最小化の 1 階の条件	53
4.6	関数の凹凸性と接平面の関係	54
4.7	2 変数実数値関数の条件付き最大化問題	55

第Ⅱ部	経済学のための数学 (学部上級用)	59
5	[最初は途中まで読めばよい]n 変数実数値関数の定義から 1 階微分までの重要事項	59
6	[最初は飛ばしても良い]n 変数 m 実数値関数の定義と偏導関数:	64
7	[最初は軽く読めば良い]n 変数実数値関数の凹凸性と偏導関数:次章・次々章のための準備	67
8	n 変数実数値凹凸関数の制約なしの最大化・最小化	74
9	n 変数実数値凹凸関数の制約付き最大化:ラグランジュ乗数法	76
10	凹凸不明の 2 変数実数値関数の極大化・極小化	80
11	凹凸不明の n 変数実数値関数の極大化・極小化	83
12	積分の簡単な入門	85
12.1	曲線で囲まれる面積と定積分・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	85
12.2	定積分で原始関数が出てくるイメージ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	89
12.3	VBA で定積分の近似値を求める	90
12.4	Python で前節の定積分の近似値を求める	92
13	動学的最大化入門 (有限な離散時間)	94
13.1	経済学的な例題: 大学生の最適時間選択	94
13.2		96
13.3	相加相乗平均の証明・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	97
第Ⅲ部	『 Ⅱ部より簡単で、たまに出会うもの	99
14	行列入門 (2×2まで)	99
14.1	数ベクトルと行列: 定義と和と定数倍	99
14.2	2 つのベクトルの積	100
14.3	行列の積	100
14.4	単位行列:積と逆行列	101
14.5	逆行列と連立方程式	102
14.6	平面ベクトルの定義と、平行・内積・垂直	103
14.7	平面上の直線と法線ベクトル	104
14.8	行列の1次変換	105
15		108
15.1	ラジアンの導入	108
15.2	\sin, \cos, \tan	108
15.3	加法定理と1次変換・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	109

15.4	三角関数の導関数	110
16	複素数入門	112
17 17.1 17.2 17.3		117
第Ⅳ部	部 積分 (1 変数・2 変数が中心):計量経済学・確率論・統計学で出会うもの	123
18 18.1 18.2 18.3 18.4 18.5	1 変数の積分をもう少し 定積分計算の簡単化 部分積分と置換積分 区分的に連続な関数 広義積分 (1) 積分区間が非有界のとき 広義積分 (2) 被積分関数が非有界のとき	124 126 126
19	確率・統計・計量経済学で出てくる積分 (1)	131
20 20.1 20.2 21	2 変数の積分: 重積分と累次積分 重積分の定義と累次積分の計算 2 変数の広義積分と積分変数変換公式 n 変数の積分: 簡単に紹介	
22	確率・統計・計量経済学で出てくる積分 (2)	151
第Ⅴ部	阝 Ⅱ部より簡単で, ごくたまに出会うもの	161
	微分方程式 1 階線形微分方程式 2 階定係数線形微分方程式	
24	2 変数微分方程式と位相図	166
第 VI 部	部 Ⅱ部よりやや難しくて,ごくたまに出会うもの (まだ書いていない)	170
25	連続時間における動学的最適化 (まだ書いていない)	170
26	定係数 n 階差分方程式 (まだ書いていない)	170
27	定係数 n 階微分方程式 (まだ書いていない)	170

第 VII i	部 より深く実数・実数列・1 変数実数値関数について学ぶ	171
28	実数列の収束と,平方根や e の近似値	171
28.1	有理数の公理 16 個と上限・下限の性質	171
28.2	拡張された実数の四則演算や大小関係・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	172
28.3	ε 論法: 実数列の収束・1 変数実数値関数の極限値と連続性	173
28.4	数列や関数の, ±∞への発散の定義	177
28.5	有界な単調数列の収束と発散	178
28.6	単調関数の収束と発散: 2.2 節の証明	180
28.7	数列の極限値と、四則演算・絶対値・不等式	181
28.8	a の n 乗根の定義	186
28.9	関数の極限値と、数列の極限値の関係・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	187
28.10	関数の極限値と、四則演算・絶対値・不等式	188
28.11	関数の連続性と四則演算・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	189
28.12	PC による数値計算	190
29	3.3 節 (連続関数・導関数に関する重要な定理群) の証明	195
29.1	数列の上極限と下極限 その1	195
29.2	実数列の性質のつづき、上極限とボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理	199
29.3	定理 3.1 (最大・最小の定理) の証明	199
29.4	定理 3.2(中間値の定理) の証明	200
29.5	導関数の定義と定理 3.3 の証明	201
29.6	定理 3.4(ロルの定理) の証明	202
29.7	定理 3.7(テイラーの公式) の証明	202
30	導関数の四則・合成関数の微分・逆関数の微分	204
30.1	導関数の四則	204
30.2	合成関数とその微分	206
30.3	逆関数とその微分	208
31	関数の凹凸と連続	211
31.1	片側微分可能関数の性質・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	211
31.2	区間で定義された凹関数・凸関数の特徴づけ	212
32	級数 $\sum a_n \cdot x$ の整関数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ や e^x や $\sin x, \cos x$ の定義	220
32.1		220
32.2	実数列の収束と、コーシー列	226
32.3	級数と正項級数・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	
32.4	絶対収束級数と root test と ratio test	229
32.5	- <mark>整関数の定義</mark>	234
32.6	$\exp(x)$ の定義の動機と定義	236

32.7	整関数の微分可能性	237
32.8	$e^x \succeq \exp(x) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	240
32.9	関数列の収束	241
32.10	関数列の収束とテイラー展開可能性	245
32.11	三角関数の定義・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	246
32.12	三角関数の性質・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	248
32.13	交代級数と三角関数と π の定義	249
33	1 変数の積分	252
33.1	区間の分割・過剰和・不足和・リーマン和	252
33.2	区間の分割・過剰和・不足和・上積分・下積分・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	255
33.3	リーマン和と可積分条件	258
33.4	一様連続と微分積分学の基本定理	259
33.5	無限小・無限大での、 o,O の定義と微分積分との関係	261
33.6	ガンマ関数とベータ関数	266
34	まだまだ続く (まだ書いていない)	267

第Ⅰ部

春休みの復習: 経済学のための数学 (学部中級用)

I 部では、イメージ中心で春休みの講習の復習を行う.

1 イントロ:多項式とグラフ及び方程式と不等式

この章で「グラフ」とあれば、それは xy 平面のグラフを考えるものとする.この節での文字はすべて実数を表すものとする.

定義 1.1 n は 1 以上の整数とする. a_0, a_1, \cdots, a_n は実数で $a_0 \neq 0$ とする. このとき, $\sum_{k=0}^n a_k x^{n-k}$ つまり,

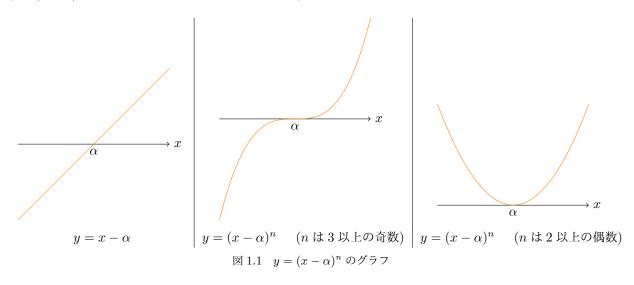
$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

exのn 次多項式, またはn 次式という.

また上の式をxの関数と考えたとき,xのn次関数と呼ぶ.

1.1 $y = (x - \alpha)^n$ のグラフと等式・不等式

n は 1 以上の整数とする. $(i)n=1\cdot (ii)n$ が 3 以上の奇数 $\cdot (iii)n$ が 2 以上の偶数, の 3 つの場合について, $y=(x-\alpha)^n$ のグラフの概形は以下のようになる. y 軸は省略している.



この図から以下が言える.

命題 1.2 n は 1 以上の整数とする.

(i).
$$(x-\alpha)^n = 0 \iff x = \alpha$$

(ii).
$$(x-\alpha)^{2n+1} \leq 0 \iff x-\alpha \leq 0$$

(iii). $(x - \alpha)^{2n} > 0 \iff x \neq \alpha$

これからさらに以下が言える.

命題 1.3 m,n は 1以上の整数とする.

(i).
$$(x - \alpha)^m (x - \beta)^n = 0 \iff x = \alpha, \beta$$

(ii).
$$(x-\alpha)^{2m+1}(x-\beta)^{2n+1} \le 0 \iff (x-\alpha)(x-\beta) \le 0$$

(iii).
$$(x-\alpha)^{2m}(x-\beta)^{2n+1} \leq 0 \iff x \neq \alpha$$
 $\alpha \Rightarrow x = 0$

高校で学んだ以下の系は、上の命題の(i)(ii)から自然となりたつ.

系 1.4 $\alpha < \beta$ とする.

(i).
$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \iff x = \alpha, \beta$$

(ii).
$$(x - \alpha)(x - \beta) > 0 \iff x < \alpha \sharp \hbar \exists x > \beta$$

(iii).
$$(x - \alpha)(x - \beta) < 0 \iff \alpha < x < \beta$$

_

実際 $y = (x - \alpha)(x - \beta)$ のグラフを書くと一目瞭然であろう.

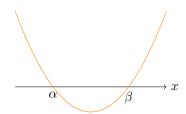


図 1.2 $y = (x - \alpha)(x - \beta)$ のグラフ (y 軸省略)

例題 1.5 次の不等式を解け

(i).
$$(x-1)(x-3) < 0$$

(ii).
$$(x-1)(x-3)^2 > 0$$

(iii).
$$(x+4)^3(x-5) \ge 0$$

١

(解答)

- (i) の解は1 < x < 3
- (ii) の式は、 $x \neq 3$ かつ x 1 > 0 と同値. 従って 1 < x < 3, x > 3 が解である.
- (iii) については、まず等式 $(x+4)^3(x-5)=0$ を解く、それは x=-4,5 が解である、次に不等式

 $(x+4)^3(x-5)>0$ を解けばよいが,これは (x+4)(x-5)>0 と同値である.つまり x<-4,x>5. 従って解は $x\leq -4, x\geq 5$

(解答終)

1.2 2次式のグラフと3次式のグラフ

前節で書いた $y=(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフは,2 次式のグラフ $y=ax^2+bx+c$ の特別な場合である (ただし $a\neq 0$). これは平方完成より, $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-D}{4a}$ (ただし $D=b^2-4ac$) と変形できる.なお D は 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式と,高校で学んだことであろう.

a > 0 のときの $y = ax^2 + bx + c$ のグラフの概形は、D の値によって以下の 3 通りに考えられる.

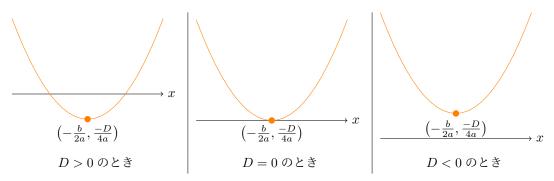


図 1.3 a > 0 のときの $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ 3 種類

どのグラフも放物線を表し、その頂点の座標は $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$ である.

つまり a>0 のとき,x の 2 次関数 ax^2+bx+c は, $x=-\frac{b}{2a}$ のとき ax^2+bx+c は最小値 $\frac{-D}{4a}$ を取ることがわかる.

a < 0 のときは、a > 0 のグラフを x 軸について線対称に移動したものとなる.

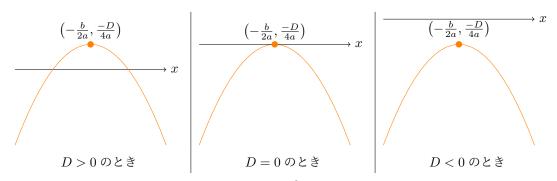


図 1.4 a < 0 のときの $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ 3 種類

どのグラフも放物線を表し、その頂点の座標は $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$ である.

つまり a<0 のとき,x の 2 次関数 ax^2+bx+c は, $x=-\frac{b}{2a}$ のとき ax^2+bx+c は最大値 $\frac{-D}{4a}$ を取ることがわかる.

a>0, a<0 のどちらにもかかわらず,D>0 のときは,x 軸と 2 点で交わっている.x 軸は y=0 なので, $y=ax^2+bx+c$ との交点の x 座標の値は, $ax^2+bx+c=0$ の解である.つまり, $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ であ

る. これは2次方程式の解の公式より言える.

a>0, a<0 のどちらにもかかわらず,D=0 のときは,x 軸と 1 点で接している.その交点の x 座標は図より $x=-\frac{b}{2a}>0$ である.これも $ax^2+bx+c=0$ の解である.

a>0, a<0 のどちらにもかかわらず,D<0 のときは,x 軸とは交わらない.

a > 0 でまとめると以下が言える.

命題 1.6 a > 0 とする.

- (i). $b^2 4ac = 0$ のとき、任意の x について $ax^2 + bx + c \ge 0$
- (ii). $b^2 4ac < 0$ のとき、任意の x について $ax^2 + bx + c > 0$
- (iii). $b^2-4ac>0$ のとき、x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は異なる 2 解を持つ. さらにその 2 解を $\alpha<\beta$ とすると.
 - (a) x の不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ の解は, $\alpha < x < \beta$
 - (b) x の不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ の解は、 $x < \alpha, x > \beta$

 $a \neq 0$ として 3 次式のグラフ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を考えよう.

2 次式のグラフで説明したが、方程式や不等式を解くときには x 軸と何点で交わるかがかなり重要になる。 そこで x の 3 次式 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ を因数分解した形を考える。代数学の基本定理 (証明はしない) より

- (A) $a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ (ただし α,β,γ は異なる実数)
- (B) $a(x-\alpha)^2(x-\beta)$ (ただし α,β は異なる実数)
- (C) $a(x-\alpha)^3$
- (D) $a(x-\alpha)(x^2+px+q)$ (ただし $p^2-4q<0$)

のいずれかの形に因数分解される。a < 0まで考えると長くなるので、以下ではa > 0のみで考える。

まず (A) の場合を考えよう. $\alpha<\beta<\gamma$ とすると, $y=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ のグラフの概形は図 1.5 となる.

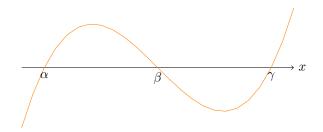


図 1.5 a > 0 で $y = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ のグラフ $(\alpha < \beta < \gamma)$

図 1.5 で a=1 のときを考えると、以下が言える.

命題 1.7 $\alpha < \beta < \gamma$ とする.

- (i). $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = 0 \iff x = \alpha, \beta, \gamma$
- (ii). $(x \alpha)(x \beta)(x \gamma) > 0 \iff \alpha < x < \beta, x > \gamma$

(iii). $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) < 0 \iff x < \alpha, \beta < x < \gamma$

 \Box

このように、図 1.5 をイメージすることによって、 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ (ただし $\alpha < \beta < \gamma$) に関する不等式を解くことができるのだが、さらに、数直線のみで解くことを考えてみよう。

(a) まず数直線上に α, β, γ を書き入れた後に, $x > \gamma$ の範囲に + を書き込んでおく.これは $x > \gamma$ ならば, $(x - \alpha)(x - \beta))(x - \gamma) > 0$ となるためである.

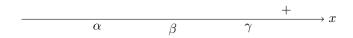


図 $1.6 (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ に関する不等式の解き方 (1)

(b) あとは右から順に,符号を変えて書き込んでいく. $\beta < x < \gamma$ では - で, $\alpha < x < \beta$ では + . そして $x < \alpha$ では - ということになる.

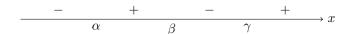


図 1.7 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ に関する不等式の解き方 (2)

このように図 1.7 の数直線をイメージして、方程式 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ や不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)>$ (resp. <)0 の解が簡単に得られる.

練習 1.8 次の不等式の解が正しいことを,数直線を用いて説明せよ.

- (i). 方程式 (x+1)x(x-3)(x-5)=0 の解は、x=0,3,5
- (ii). 不等式 (x-2)(x-3)(x-5) > 0 の解は、2 < x < 3, x < 5
- (iii). 不等式 (x+1)(x-6)(x-8) < 0 の解は、x < -1, 6 < x < 8
- (iv). 不等式 $(x-2)(x-3)(x-5) \ge 0$ の解は, $2 \le x \le 3, x \le 5$
- (v). 不等式 $(x+1)(x-6)(x-8) \le 0$ の解は、 $x \le -1, 6 \le x \le 8$

_

次に (B) の場合を考える. $y = (x - \alpha)^2(x - \beta)$ のグラフは,以下のようになる.

グラフから方程式 $(x-\alpha)^2(x-\beta)=0$ や不等式 $(x-\alpha)^2(x-\beta)\lessgtr 0$ が、命題 1.3 と一致することが言える.

- (C) の a > 0 で $y = a(x \alpha)^3$ のグラフの概形は、前節の図 1.1 の真ん中の形である.
- (D) の a > 0 で $y = a(x \alpha)^3$ のグラフの概形は (C) とは多少異なる. しかし, x 軸とは $x = \alpha$ のみで交わり, $x \le \alpha$ のとき $a(x \alpha)^3 \le 0$ であることは (C) と同じである.

実際, $p^2 - 4q < 0$ ならば, 任意の x について $x^2 + px + q > 0$ であることは命題 1.6 から言えるので,

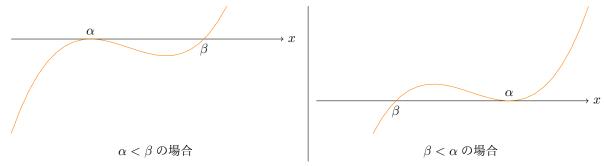


図 1.8 a > 0 で $y = a(x - \alpha)^2(x - \beta)$ のグラフ

系 1.9 $p^2 - 4q < 0$ のとき,

$$(x-\alpha)(x^2+px+q) \le 0 \Longrightarrow (x-\alpha) \le 0 \Longleftrightarrow x \le \alpha$$

١

1.3 1次式の積のグラフと、方程式・不等式

まず以下が言える.

命題 1.10 n は 1 以上の整数とする.

- (i). f(x) は x の 2n+1 次式とする. f(x)=0 を満たす実数解は少なくとも 1 つ存在する. それを α とすると, ある n-1 次式 g(x) が存在して, $f(x)=(x-\alpha)g(x)$ が言える.
- (ii). f(x) が x の 2n 次式とする. このとき, f(x)=0 を満たす実数解が存在しないものもある.

┙

(ii) は d>0 として, $f(x)=x^{2n}+d$ が該当するものである.(i) の証明は,f(x) の連続性と $\lim_{x\to +\infty}f(x)=-\infty$ と $\lim_{x\to +\infty}f(x)=\infty$ と中間値の定理から言える(証明はここではしない).

前節までで3次関数までの式は詳細に見てきた. 4次より大きい次数のグラフについては、簡単な1次式の積のグラフのみ説明する. つまり、この節では、今までの3次式までの応用として、4次以上の多項式 f(x)が、xの1次式や2次式で因数分解した形として方程式 f(x)=0 や不等式 f(x)>0, f(x)<0 と、y=f(x)のグラフについてより一般的に考察していく.

まず f(x) が n 次式とする. n が偶数 (resp. 奇数) のとき, $x\to -\infty$ への極限は ∞ (resp. $-\infty$) となる. そこで偶数・奇数それぞれの場合を見てみよう.

 $n \ge 2$ として、2n 個の定数 $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{2n-1} < \alpha_{2n}$ について、

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{2n-1})(x - \alpha_{2n})$$

について y = f(x) のグラフを考えよう. このときの y = f(x) のグラフの概形の書き方は、以下となる.

- (i). x 軸上に、 α_1 から α_{2n} まで書き入れる.
- (ii). 点 $(\alpha_{2n}, 0)$ から、右上方向に延ばしていく (図 1.9 参照).

- (iii). 次に波線をイメージして $\alpha_{2n-1} < x < \alpha_{2n}$ では y < 0 の範囲に入るようにする (図 1.10 参照).
- (iv). 後は y の範囲を正・負・正・負を繰り返して、右から波線を書くようにする。 最後に $x < \alpha_1$ の範囲では $x \to -\infty$ のとき y > 0 になるので、 $(\alpha_1, 0)$ から左上方向に進むように書く (図 1.11 参照).

$$\alpha_1$$
 α_2 α_3 α_4 α_5 α_6 α_6

図 1.9 $y = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)(x - \alpha_5)(x - \alpha_6)$ のグラフ作成中 (1)

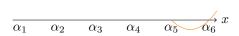


図 1.10 $y = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)(x - \alpha_5)(x - \alpha_6)$ のグラフ作成中 (2)



図 1.11 $y = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)(x - \alpha_5)(x - \alpha_6)$ のグラフ作成中 (3)

極大値・極小値については不明ではあるが、y の正負はきちんと表している概形となる。例えば y=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) のグラフをより美しく書くと、図 1.12 となる。

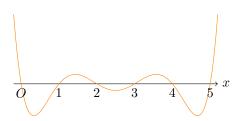


図 1.12 y = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) のグラフ

次にこれらを参考に,不等式

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{2n-1})(x - \alpha_{2n}) > 0$$

の解は,

- (i). $x < \alpha_1$
- (ii). $\alpha_{2i} < x < \alpha_{2i+1} \ (i = 1, 2, \dots, n-1)$
- (iii). $x > \alpha_{2n}$

である. これは公式として覚えるのではなく, 数直線で考えるとよい. その考え方を述べよう.

まず最初に $x > \alpha_{2n}$ が解の 1 つであるのは明らかである. $\alpha_{2n-1} < x < \alpha_{2n}$ のときは $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_{2n-1})(x - \alpha_{2n}) < 0$ である. 同じ形を 1 つずらした形の $\alpha_{2n-2} < x < \alpha_{2n-1}$ のときは左辺が正となり、解の 1 つとなる. 順に負・正・負・正と繰り返していき、最後は $x < \alpha_1$ のときも左辺は正となる.

この考え方を,数直線を書いて考えるのである.不等式

$$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) > 0 (1.1)$$

を例にして,説明しよう.この解は

となるのであるが、その求め方は以下である.

- 数直線上に不等式の左辺が 0 になる値 (今の場合 0,1,2,3,4,5) を並べて、
- ◆ その中で一番大きい値 (今の場合 5) より大きい部分に + を書き (図 1.13)
- 後は右から、それぞれの間の数に −, +, · · · と書き入れて (図 1.14)
- + が表す範囲を,不等式に表せばよい.



図 1.13 不等式 (1.1) 式の解き方 (1)

図 1.14 不等式 (1.1) 式の解き方 (2)

無論,不等式(1.1)式の不等号の向きが逆のときは、図1.14の – の部分が解となる. つまり、

$$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) < 0$$

の解は、0 < x < 1, 2 < x < 3, 4 < x < 5 である.

一般的に書くと,

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{2n-1})(x - \alpha_{2n}) < 0$$

の解は,

(i).
$$\alpha_{2i-1} < x < \alpha_{2i} \ (i = 1, 2, \dots, n)$$

である. これも公式として覚えるのではなく、数直線で考えると良いのである.

練習 1.11 次の不等式を解け.

(i).
$$(x-3)(x-5)(x-7)(x-9) > 0$$

(ii).
$$(x+4)(x-2)(x-6)(x-8) < 0$$

(iii).
$$x(x-2)(x-10)(x-100) > 0$$

_

次に奇数次の場合, つまり $n \ge 1$ として, 2n+1 個の定数 $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{2n+1}$ について,

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{2n+1})$$

として, y = f(x) のグラフを考えよう.

 $x>\alpha_{2n+1}$ のときは $(\alpha_{2n+1},0)$ から右上の方に書き、偶数の場合と同様に、波線を書くようにする。最後の部分が偶数の場合とは異なる。 つまり $x<\alpha_1$ の時には、グラフが左下に行くように書く。図 1.11 と同様にして、5 次関数のグラフ $y=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)$ の概形は、図 1.15 となる。

$$\overbrace{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5} x$$

図 1.15
$$y = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)(x - \alpha_5)$$
 のグラフ

不等式

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{2n})(x-\alpha_{2n+1})>0$$

の解は,

- (i). $\alpha_{2i-1} < x < \alpha_{2i} \ (\text{trib} \ i = 1, 2, \dots, n)$
- (ii). $x > \alpha_{2n+1}$

となる. 実際に解くときは、偶数の場合と同様に数直線で考えればよい.

不等式

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{2n})(x-\alpha_{2n+1})<0$$

の解は,

- (i). $\alpha_{2i} < x < \alpha_{2i+1}$ (ただし $i = 2, 3, \dots, n-1$)
- (ii). $x < \alpha_1$

となる.

このように x の多項式の関数 f(x) が,1 次式の積で表されている場合は,比較的簡単に y=f(x) の概形を書くことができる.また不等式 $f(x)>0, f(x)\geq 0, f(x)<0, f(x)\leq 0$ なども,数直線を利用して簡単に解くことができる.

f(x) が多項式関数でも因数分解ができていない場合や、極大・極小を調べたいとき、さらに f(x) が多項式ではない場合などは、次章で学ぶ微分を用いることが重要である.

またこのように 1 次式の積の不等式が解けるようになると、以下のように一般的な形のものも解くことができる.

命題 1.12 m,n は 1 以上の整数とする。m 個の正整数 p_1,\dots,p_m と,n 個の正整数 q_1,\dots,q_n があるとする。m 個の実数 α_1,\dots,α_m はそれぞれ異なり,n 個の実数 β_1,\dots,β_n はそれぞれ異なるとする。x の不等式

$$\prod_{i=1}^{m} (x - \alpha_i)^{2p_i + 1} \prod_{j=1}^{n} (x - \beta_j)^{2q_j} \le 0$$

は, 複号同順で以下の(i)かつ(ii)と同値である.

- (i). $x \neq \beta_i$ $(j = 1, \dots, n)$
- (ii). $(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_m) \leq 0$

١

例題 1.13 次の不等式を解け.

- (i). $x^2(x-1)(x-2)^3 > 0$
- (ii). $(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4(x-4)^5 < 0$
- (iii). $x^2(x-6)^4(x-8)^7(x-9) \ge 0$

┙

- (解答)(i) は、 $x \neq 0$ かつ (x+1)(x-2) > 0 と同値である.後者の不等式の解は x < 1 または x > 2 であるから、解は x < 0, 0 < x < 1, x > 2 である.
- (ii) は、 $x \neq 1,3$ かつ (x-2)(x-4) < 0 と同値である。後者の不等式の解は 2 < x < 4 なので、解は 2 < x < 3,3 < x < 4 である。
 - (iii) について考える. (a) まず等号の場合を考えると、x = 0, 6, 8, 9 が解である.
- (b) 次にその 4 つ以外の x の場合を考える.このとき与式は, $x^2(x-6)^4(x-8)^7(x-9)>0$ と同値であり,つまり (x-8)(x-9)>0 と同値である.その解 x<8 または x>9 である.
 - (a) または (b) が求める解であるので、計算して $x \le 8, x \ge 9$ である.

(解答終)

前節でも紹介した代数学の基本定理を用いれば,

命題 1.14 最高次数係数が 1 の x の n 次式は、1 次式 $(x-\alpha)$ または (x^2+px+q) の形の 2 次式 (ただし $p^2-4q<0$) の積で表すことができる

よってこの形に因数分解ができたならば、今までの知識によって以下の例題のように不等式を簡単に解くことができる.

例題 1.15 以下の不等式を解け

- (i). $x^4 x^2 > 0$
- (ii). $x^3 1 > 0$
- (iii). $x^4 + 2x^2 3 < 0$

-

- (解答)(i) の左辺を因数分解して、 $x^2(x-1)(x+1)>0$ を解けばよい. これは (x+1)(x-1) と同値であり、解は x<-1,x>1.
- (ii) の左辺を因数分解して, $(x-1)(x^2+x+1)>0$ を解けばよい. $x^2+x+1=(x+1/2)^2+3/4>0$ なので (x-1)>0 と同値.よって不等式の解は x>1.
 - (iii) の左辺は

$$x^{4} + 2x^{2} - 3 = (x^{2} + 3)(x^{2} - 1)$$
$$= (x^{2} + 3)(x + 1)(x - 1)$$

明らかに $x^2+3>0$ なので、不等式は (x+1)(x-1)<0 と同値.よって解は -1< x<1.

(解答終)

1.4 phthon(sympy)の利用・・・多項式の因数分解のコマンド factor

まず phyton で数式のべき乗は「^ではなく「**」で表すことに気をつけてほしい. sympy live では先に以下のコードが実行されている.

- >>> from __future__ import division
- >>> from sympy import *
- >>> x, y, z, t = symbols('x y z t')
- >>> k, m, n = symbols('k m n', integer=True)
- >>> f, g, h = symbols('f g h', cls=Function)

従って主に関数の文字として x,y,z,t が使える. k,m,n は整数として使え、f,g,h は関数として使える.

さて、x の n 次多項式関数 f(x) の係数がすべて有理数とする. $f(\alpha)=0$ を満たす有理数 α が存在するならば、sympy は factor というコマンドで、f(x) を $(x-\alpha)g(x)$ という形 (g(x) は n-1 次多項式)で表してくれる。 g(x) がさらに因数分解できるときは、繰り返し同様に計算してくれる。

$$x^2-2x-3$$
 は $(x+1)(x-3)$ である. sympy live で

factor(x**2-2*x-3)

を入力すると良い. $3x^2-x-2$ も同様に因数分解せよ.

上で「 α が有理数の場合」と述べたように、同じ 2 次式でも x^2-6x-1 は $\{x-(3-\sqrt{10})\}\{x-(3+\sqrt{10})\}$ であるが、 $3-\sqrt{10},3+\sqrt{10}$ は無理数なので、factor では因数分解してくれない. 実際に

factor(x**2-6*x-1)

で確かめよ.

とはいえ 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ を用いて,

$$ax^{2} + bx + c = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a}\right)$$

が成り立つので、2 次式の因数分解では、無理に sympy を用いなくとも手計算でもできるであろう。 3 次式 $x^3 - 8x^2 + 11 * x + 2$ と、4 次式 $x^4 - x^2$ をそれぞれ factor を用いて因数分解してみよ。

1.5 phthon(sympy) の利用・・・n 次方程式の解のコマンド solve

有理数係数の x の n 次多項式 f(x) について,f(x)=0 の解を sympy のコマンド solve で求めてみよう. $x^2-2=0$ の解は明らかに $x=\pm\sqrt{2}$ である.sympy live では

solve(x**2-2)

だけで、2つの解が得られる. 近似値が欲しい場合は、以下のように小数を用いれば良い.

solve(x**2-2.0)

重解があってもそれは知らされない. 例えば $x^4-x^2=0$ の解は x=0 が 2 重解で,あとは $x=\pm 1$ であるのだが,

solve(x**4-x**2)

また解は複素数の範囲で計算してくれる. 複素数が何か気になるならば, 先に $\frac{16}{9}$ 章を読むと良い. 2 次方程式 $x^2-2x+10=0$ の解は実数の範囲では存在しないが,

solve(x**2-2*x+10)

から、複素数の範囲では $x = 1 \pm 3i$ という2つの解が得られる.

1.6 phthon(sympy) の利用・・・n 次不等式の解のコマンド reduce __ inequalities

有理数係数の x の n 次多項式 f(x) について,f(x) > 0 の解を sympy のコマンド reduce_inequalities で求めてみよう.

(1.1) 式の不等式 x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) > 0 は、sympy live で

reduce_inequalities(x*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)*(x-5)>0)

で得られる. 答えは,

$$(-\infty < x \land x < 0) \lor (1 < x \land x < 2) \lor (3 < x \land x < 4) \lor (5 < x \land x < \infty)$$

と表される $^{1.1}$. \land は「かつ」(英語では and), \lor は「または」(英語では or) を表す論理記号である. なのでこの不等式の解が

であることを示している. $f(x) \ge 0$ の解がほしいときは、redue_inequalies(f(x)>=0) という形にすれば良い. 例えば $-(x-1)^3(x-2)^2 \ge 0$ の解は redue_inequalies(-(x-1)**3(x-2)**2>=0) で得られる. sympy の答えは $(x \le 1 \land -\infty < x) \lor x = 2$ と出るので、 $x \le 1, x = 2$ であることがわかる.

 $^{^{1.1}}$ latex モードのとき.

2 最大・最小の定義及び、上限・下限の定義と実数の連続性

2.1 上限・下限の定義と実数の連続性

2 つの実数の部分集合 $A = \{x | 3 \le x \le 4\}$ と $B = \{x | 3 < x < 4\}$ を考えてみよう. A で最大のものは 4 で最小のものは 3 であることは明らかであろう. 一方 B ではどちらも存在しないことも明らかであろう.

そこで最大・最小を拡張した、上限・下限というものを定義して、A,B ともに上限は 4 で下限は 3 であるといいたい。

まず最大・最小きちんと定義したものが以下となる.

定義 2.1 実数の部分集合 X について,ある $x^* \in X$ が存在して,任意の $x \in X$ について, $x \le x^*$ (resp. $x^* \le x$) が成り立つとき, x^* を X の最大元 (resp. 最小元) という.この x^* を $\max X$ (resp. $\min X$) で表す.

日常ではよく最大値・最小値というが、数学で、集合に含まれるものは元(げん)と言ったり要素といったりする.よってこの定義でも元で表した.

 $X = \{x_1, x_2\}$ の最大元は、 $\max\{x_1, x_2\}$ と書く、2 変数の実数値から 1 変数を返す、2 変数実数値関数として考えて $\max(x_1, x_2)$ と書くこともある。この場合だと最大値という。最小についても同様である。次に上界・下界を定義する。

定義 2.2 実数の部分集合 X について,

- (i). 任意の $x \in X$ について、 $x \le M$ を満たす実数 M を、X の上界(じょうかい)という.上界が存在する集合を、上に有界な集合という.
- (ii). 任意の $x \in X$ について, $x \ge m$ を満たす実数 m を, X の下界(かかい)という.下界が存在する集合を,下に有界な集合という.
- (iii). 上界も下界も存在する集合を, 有界集合という.

上界や下界は存在すれば、1 つではない. いくつかの集合を例にして、上界と上界の集合を表してみよう. 以下の ∅ は空集合を意味する.

例題 2.3 以下の集合 $A, B, C, D, E, R, \emptyset$ (ただし R は実数全体で \emptyset は空集合) について、それぞれ上界の 1 つと上界の集合と上界の集合の最小元は、以下のようにまとめられる。

集合	上界の1つ	上界の集合	上界の集合の最小元
$A = \{x 3 \le x \le 4\}$	10	$\{x x \ge 4\}$	4
$B = \{x 3 < x < 4\}$	10	$\{x x \ge 4\}$	4
$C = \{x x < 4\}$	10	$\{x x \geq 4\}$	4
$D = \{x x > 3\}$	存在しない	Ø	存在しない
$E = \{x x \ge 3\}$	存在しない	Ø	存在しない
R	存在しない	Ø	存在しない
\emptyset	定義しない	定義しない	定義しない

上記では、A, B, C が上に有界な集合である.

そしていよいよ、上限と下限を定義する.上限については、上の表の右端の列のように上界の集合と最小元 を組み合わせて定義する.

定義 2.4 実数の部分集合 X について,

- (i). 上界の集合の最小元を X の上限といい, $\sup X$ で表す.
- (ii). 下界の集合の最大元を X の下限といい, $\inf X$ で表す.

実数の連続性のイメージは「数直線に穴がない」ということになるが、それを上限で示したものが以下となる.

| 実数の部分集合について、非空で上に有界なものは、上限を持つ.

これが実数の公理の 1 つであり,実数の連続性と呼ぶ.残りの 16 個は有理数の公理と同様なので,28.1 節に示している.

記号 ∞ や $-\infty$ が実数ではないことに気をつけて、上限と下限は以下のように表す。

定義 2.5 実数の部分集合 $X \neq \emptyset$ について,

- (i). 上限が存在しない場合, $\sup X = \infty$ で表す.
- (ii). 下限が存在しない場合, $\inf X = -\infty$ で表す.

上の例題の A, B, C, D, E, R について以下が言える. 確かめるとよい.

$$\sup \mathbf{A} = \sup \mathbf{B} = \sup \mathbf{C} = 4$$
$$\sup \mathbf{D} = \sup \mathbf{E} = \sup \mathbf{R} = \infty$$

$$\inf \mathbf{A} = \inf \mathbf{B} = \inf \mathbf{D} = \inf \mathbf{E} = 3$$

 $\inf \mathbf{C} = \inf \mathbf{R} = -\infty$

2つの記号 ∞ や $-\infty$ は実数ではないので、実数とその 2 つを含めた集合を、以下のように定義する.

定義 2.6 実数の集合 R に 2 つの記号 ∞ , $-\infty$ を含めたものを、拡張された実数と呼び、 \overline{R} で表す.

拡張された実数の四則演算や大小関係は、定義 28.1 で示している.

さて、supやinfを用いた表現のよいところは、以下のように、値が唯一定まるところである.

命題 2.7 実数の部分集合 $X \neq \emptyset$ について、 $\sup X$, $\inf X$ は、 \overline{R} の中で唯一定まる.

これは、 $\sup X$ や $\inf X$ の作り方から明らかである.

さて一般に $c \in \mathbb{R}$ と $\delta > 0$ が与えられたときに、開区間 $(c - \delta, c + \delta)$ を、「c の δ 近傍」という。絶対値

で書くと $|x-c|<\delta$ を満たす x の集合である。また近傍は漢語なので難しい漢字となっているが,英語では neighbourhood である。英語の方が,c の近所という意味が伝わるであろう。

c の δ 近傍から c 自身を取り除いた集合 $(c-\delta,c)\cup(c+\delta)$ を「c の δ 除外近傍」という。つまり集合 $0<|x-c|<\delta$ を満たす x の集合が,c の δ 除外近傍である。

 δ 近傍や δ 除外近傍は次節の定理などでも用いられる.「数直線に穴がない」ことも次節で示す.

2.2 関数の極限値についての取扱の確認と単調関数の極限

実数の区間として、春の講習では 9 種類をあげたので、それは既知とする。区間 I について、内点の集合を \check{I} で表し、また I と I の端点との合併集合を \bar{I} と書いた。

春の講習や高校の微分積分では、極限値を以下のように扱ったはずである.

区間 I で定義された実数値関数 f(x) の $c \in \overline{I}$ での連続性については、x をどんどん c に近づけたときに、f(x) がある値 α に近づくとき、f(x) は $x \to c$ で α に収束する、または f(x) は $x \to c$ で極限値 α を持っといい、

$$\lim_{x \to c} f(x) = \alpha$$

で表す

 $x \to c$ 以外の x の方向についても,

$$x \to c + 0$$
, $x \to c - 0$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$

を学んできたので、それも同様に用いるとする.

このようにして現在までは 1 変数実数値関数の極限値での「どんどん近づく」について、定義をしていないのだが $^{2.1}$ 、初級・中級の経済学の数学では問題がないので、このまま議論を進めていくことにする.

そしてこの極限値をもとにして、cでの連続性については、以下のように扱ったことを思い出してほしい。

区間 I で定義された関数 f(x) について, $c \in I$ で

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

が成り立つとき, f(x) は c で連続である. 任意の $c \in I$ で上が成り立つ時, f(x) は I で連続であるという.

これもそのまま進めていく.この節の残りでは単調増加関数や単調減少関数と極限値について述べる.これらの関数は、極限の取扱が簡単であることを言いたい.まずは有界開区間で成り立つのが以下である.

グラフを書いたときには,直感的に以下が成り立つだろうということがわかるので,証明はしない.

定理 2.8 (有界開集合での単調関数の極限) 有界開区間 $\check{I}=(a,b)$ で定義された関数 f(x) が \check{I} で単調増加 (resp. 単調減少) とする.

(i). (a) f(x) が,上に (resp. 下に) 有界ならば, $x \to b-0$ でその上限 (resp. 下限) に収束する. すなわち $\lim_{x \to b-0} f(x)$ が存在する.

^{2.1} 定義の紹介だけなら定義 5.5 で行っているが、実際に細かく議論しているのは 28.3 節である. 無論今は飛ばして読んで構わない.

- (b) f(x) が上に (resp. 下に) 非有界ならば、f(x) は $x \to b-0$ で ∞ に (resp. $-\infty$) に発散する. すなわち $\lim_{x \to b-0} f(x) = \infty$ (resp. $\lim_{x \to b-0} f(x) = -\infty$)
- (ii). (a) f(x) が,下に (resp. 上に) 有界ならば, $x \to a-0$ でその上限 (resp. 下限) に収束する.すなわち $\lim_{x\to a-0} f(x)$ が存在する.
 - (b) f(x) が下に (resp. 上に) 非有界ならば、f(x) は $x \to a-0$ で $-\infty$ に (resp. ∞) に発散する. すなわち $\lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty$ (resp. $\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty$)

この定理と、定理 2.10 の証明は 28.6 節で行う.

例題 2.9 $\check{I}=(0,1)$ で定義される 3 つの連続関数

$$f(x) = x, \ g(x) = \ln(x), \ h(x) = \frac{1}{x}$$

について、それぞれ $x \to 1-0$ と $x \to +0$ の極限値について述べよ.

(解答)明らかに f(x) は,上にも下にも有界な単調増加関数である.g(x) は \check{I} で,単調増加関数で上に有界なのは明らか.また下に非有界なあることが知られている.h(x) は \check{I} で,下に有界な単調減少関数であることは明らか.そして上に非有界であることが知られている.

上の定理と関数の連続性から

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to +0} f(x) = 0$$

g(x) については同様に,

$$\lim_{x \to 1-0} g(x) = 0, \quad \lim_{x \to +0} g(x) = -\infty$$

h(x) については同様に,

$$\lim_{x \to 1-0} h(x) = 1, \quad \lim_{x \to +0} h(x) = \infty$$

が言える.

(解答終)

この例題の関数は連続関数であったが、上の定理では f(x) には連続性を仮定していない。例えば (-1,1) で定義される関数

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{(if } x \le 0) \\ 2 + x & \text{(if } x > 0) \end{cases}$$

は明らかに x=0 で非連続であるが,定義域で単調増加である.上にも下にも有界なので, $\lim_{x\to 1-0}f(x),\lim_{x\to -1+0}f(x)$ が,ともに存在する.

前定理の定義域を拡張して ±∞ への極限を考えたものが以下である. 前定理同様証明はしない.

定理 2.10 (非有界開集合での単調関数の極限)

- (i). 開区間 $\check{I}=(a,\infty)$ で定義された関数 f(x) が \check{I} で単調増加 (resp. 単調減少) とする.
 - (a) f(x) が、上に (resp. 下に) 有界ならば、 $x \to \infty$ でその上限 (resp. 下限) に収束する. すなわち実数 $\lim_{x \to \infty} f(x)$ が存在する.
 - (b) f(x) が上に (resp. 下に) 非有界ならば,f(x) は $x\to\infty$ で ∞ に (resp. $-\infty$) に発散する.すなわち $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ (resp. $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$)

- (ii). 開区間 $\check{I}=(-\infty,b)$ で定義された関数 f(x) が \check{I} で単調増加 (resp. 単調減少) とする.
 - (a) f(x) が,下に (resp. 上に) 有界ならば, $x\to -\infty$ でその上限 (resp. 下限) に収束する. すなわち 実数 $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ が存在する.
 - (b) f(x) が下に (resp. 上に) 非有界ならば、f(x) は $x\to -\infty$ で $-\infty$ に (resp. ∞) に発散する. すな わち $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ (resp. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$)

┙

これは数列で、上に有界な単調増加数列は収束する (定理 28.17) ことに対応する.

例えば開区間 $(1,\infty)$ で定義される関数 $f(x)=\frac{1}{x}$ を考えよう.明らかに f(x)>0 である.つまり下に有界である. $x_1< x_2$ のとき,

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}$$
$$= \frac{x_1 - x_2}{x_2 x_1}$$
$$< 0$$

より,f(x) は単調減少 (より詳しくは狭義単調減少) である.よって前定理 (i)(a) より $\lim_{x\to\infty}f(x)$ は存在する (直感的には 0 だと想像できるであろう).

3 1変数実数値関数の微分の利用

微分と導関数については、前節での極限値を利用している。春の講習や高校の微分積分では、以下のように 取り扱ったはずである。

区間 I で定義された実数値関数 f(x) が $c \in I$ で

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在すれば、c で微分可能という。そして上の式を f(x) の c での微分係数であるといい、任意の $c \in I$ で微分可能であれば、f(x) は I で微分可能という。そして x の関数 f'(x) を

$$f'(x) = \lim_{h \to c} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

と定義して f(x) の導関数と呼ぶ、 $f^{(1)}(x)$ と書くこともある、f'(x) が I で微分可能ならば、f'(x) の導関数を $f''(x)(f^{(2)}(x))$ と書くこともある)とし、2 階導関数と呼ぶ、繰り返していき、一般に整数 $i \geq 2$ について、 $f^{(i-1)}(x)$ が存在してそれが I で微分可能の時、f(x) は i 階微分可能であるといい、 $f^{(i)}(x)$ であらわし、これを f(x) の i 階導関数と呼ぶ、

これを既知として議論を進めていく.

3.1 最初に

学部の経済学で出てくる,実数 x についての 1 変数実数値関数は,a は実数の定数として

$$x^a, e^x, \ln(x)$$

の線形結合や四則,および合成関数がほとんどである.また定義域の端点以外では,無限回微分可能であることがほとんどである.

証明自体は第 VII 部で行なうが、まず、上記3つの導関数はそれぞれ

$$ax^{a-1}, e^x, \frac{1}{x}$$

となることを思い出してほしい. 特に a=1/2 のときは \sqrt{x} だから,

$$\{\sqrt{x}\}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

である.

導関数の和と定数倍についての公式から、簡単な例として、2次関数

$$ax^2 + bx + c$$

の導関数が

$$2ax + b$$

となることはきちんと理解してほしい.

そして a<0 のときは ax^2+bx+c は x について狭義凹関数である.その導関数 2ax+b が 0 となる点 $x=-\frac{b}{2a}$ が定義域に含まれている場合は,この x の値で ax^2+bx+c が最大値となる.

このレジュメでも何度も書くことになるが、学部の経済学の教科書などで最大値を求める問題では、最大値が存在するような関数を仮定していることがほとんどである.

3.2 指数と対数

指数が苦手な人が多いので、ここで復習しておこう。a は非 1 の正の定数とする。指数法則は x,y が実数として、以下である。

- (i). $a^x a^y = a^{x+y}$
- (ii). $(a^x)^y = a^{xy}$
- (iii). $a^{-1} = \frac{1}{a}$

次に e を底とする指数関数と対数関数の関係は、2 つの実数 x と y > 0 について

$$e^x = y \iff x = \ln(y)$$

であった. これより, a > 0, b > 0 について,

- (i). $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- (ii). $\ln(a/b) = \ln(a) \ln(b)$
- (iii). $\ln(a^c) = c \ln(a)$

が成り立つ. (i) では積を和に, (ii) では商を差にして, 計算がしやすくなる.

では上の (i)(iii) より, x > 0, y > 0 で以下が成り立つことを確かめよ.

$$\ln(x^a y^b) = a \ln(x) + b \ln(y)$$

3.3 連続関数・導関数に関する重要な定理群

この節の定理は最後以外紹介のみとする. テイラーの公式以外は全て直感的には明らかであろう.

定理 3.1 (最大・最小の定理) 有界閉区間 [a,b] で定義された連続関数 f(x) は,最大値と最小値を共に持つ.

証明は29.3節で.

有界閉区間というのがポイントである。 開区間だと成り立たない。 例えば (0,1] で定義された関数 f(x)=1/x は,最大値を持たない。 確認してみよ。

定理 3.2 (中間値の定理) 有界閉区間 [a,b] で定義された連続関数 f(x) が $f(a) \neq f(b)$ を満たすとする.このとき $\min\{f(a),f(b)\}<\gamma<\max\{f(a),f(b)\}$ を満たす任意の γ について,ある $c\in(a,b)$ が存在して, $f(c)=\gamma$.

証明は29.4節で.

定理 3.3 (微分可能ならば連続) 区間 I で定義された f(x) が I で微分可能ならば, I で連続である.

証明は29.5節で.

定理 3.4 (ロルの定理) 有界閉区間 [a,b] で連続,(a,b) で微分可能な関数 f(x) が f(a)=f(b)=0 を満たすとする.このときある $c\in(a,b)$ が存在して,f'(c)=0.

証明は29.6節で.

明できる.

ロルの定理での関数は上記のように端点で微分可能でなくとも良い。つまり C^1 級よりもより広い範囲の関数で成り立つ。

例えば a=0,b=1 として $f(x)=\sqrt{x}-x$ を考えよう. f(0)=f(1)=0 である. f'(0) は存在しないので、f(x) は [0,1] で C^1 級ではない. しかし [0,1] で連続かつ (0,1) で微分可能である.

今の場合 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=1$ である.図を書くと,f'(c)=0 となる点 $c\in(0,1)$ が存在することがわかるであろう $\frac{3.1}{c}$.

ロルの定理の応用として,以下が言える.

定理 3.5 (コーシーの平均値の定理) 有界閉区間 [a,b] で連続,(a,b) で微分可能な関数 f(x),g(x) を考える. また [a,b] で $g'(x) \neq 0$ とする.このとき,ある $c \in (a,b)$ が存在して,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

これは H(x)=(f(b)-f(a))(g(x)-g(a))-(f(x)-f(a))(g(b)-g(a)) として、ロルの定理を用いれば証

この定理で、g(x) = x とすると以下が言える.

定理 3.6 (平均値の定理) 有界閉区間 [a,b] で連続,(a,b) で微分可能な関数 f(x) を考える.このとき, $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ を満たす,ある $c\in(a,b)$ が存在する.

この定理が,グラフを書くときの増減表のもととなっている.実際に C^1 級の関数 f(x) について,増減表を作ることを考えよう.ある開区間 (a,b) で,f'(x)>0 ならば,増減表では f'(x) の行に + と書き込んだ.そして f(x) はこの範囲で狭義単調増加なので,f(x) の行には \nearrow と矢印を書いたはずである.この f'(x)>0 ならば,f(x) が狭義単調増加であることが,平均値の定理から言えるのである.それをここで説明しよう.

まず [a,b] にある任意の 2 点 c_1,c_2 (ただし $c_1 < c_2$) とする.平均値の定理より,ある $c_3 \in (c_1,c_2)$ が存在して,

$$f'(c_3) = \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1}$$

が言える. $f'(c_3) > 0, c_2 - c_1 > 0$ より, $f(c_2) - f(c_1) > 0$ である. つまり,任意の $c_1 < c_2$ について $f(c_1) < f(c_2)$ であるから,f(x) は [a,b] で狭義単調増加である.

さて、f(x) が x = a で微分可能のとき

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

は x=a での y=f(x) の「接線」であると学んできたことであろう. 2 つの右辺をみると、x が a に近い場

^{3.1} 実際 x>0 のとき $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-1$ なので、 $\frac{1}{2\sqrt{c}}-1=0$ を解いて c=1/4

合, f(x) は f'(a)(x-a)+f(a) という 1 次式で近似できることを示している. これをさらに拡張したものが テイラーの公式である.

定理 3.7 $(テイラーの公式)n \geq 2$ の正整数とする. 閉区間 [a,b](resp. [b,a]) で定義された f(x) は、 [a,b](resp. [b,a]) で n-1 階微分可能で、(a,b)(resp. (b,a)) で n 階微分可能とする. このとき、ある $\lambda \in (0,1)$ が存在して,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n)}((1 - \lambda)x + \lambda a)}{n!} (x - a)^n$$
 (3.1)

と表すことができる.

また,右辺の $f(a)+f'(a)(x-a)+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ を,テイラーの n-1 次近似多項式といい,最後 の項 $\frac{f^{(n)}((1-\lambda)x+\lambda a)}{n!}(x-a)^n$ を、n 次剰余項という.

証明は29.7節で.

以下の3つのxの関数 e^x , $\ln(1+x)$ について, x=0の周りでそれぞれテイラーの2次近似を行うと,以 下のように表される.

(i).
$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2}$$
(ii).
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^{2}}{2}$$

(ii).
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}$$

(iii).
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2$$

(iii). $\frac{1}{1+x} \coloneqq 1-x+x^2$ 実際, $\{e^x\}'=\{e^x\}''=e^x$ で, $e^0=1$ だから,(i) が言える.(ii) と (iii) は,春の講習で行った合成関数の 微分 (3.5 節で後述) より

$$\{\ln(1+x)\}' = \frac{1}{1+x}$$
$$\left\{\frac{1}{1+x}\right\}' = -\frac{1}{(1+x)^2}$$
$$\left\{\frac{1}{(1+x)^2}\right\}' = -\frac{2}{(1+x)^3}$$

などから言える. 実際にこれらの式を用いて, (ii) と (iii) が成り立つことを確かめよ.

また、(3.1) 式の剰余項が n を無限に大きくしたとき (つまり $n \to \infty$) に 0 に収束するならば f(x) は、f(a)と f'(a)(x-a) も含めて,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

と表示できそうである. 実際,これは f(x) の x=a でのテイラー展開というものであるが,この式は無限項 の和である. 無限項の和の場合は a+b=b+a のような和の交換は, 無条件には成り立たないなど, 扱いに 注意が必要となる. 今は, 数列の極限・整関数 (32.5 節) を知っているとして, テイラー展開については, 以 下のように示しておく.

定義 3.8 (テイラー展開可能性) f(x) が a を含む区間 I で定義された C^{∞} 級の関数とする. 以下の, a を中 心として, 収束半径が正の整関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

が存在するとき, f(x) は x = a でテイラー展開可能という.

この定義より明らかであるが,関数 f(x) が a で ∞ 級だからといって,テイラー展開可能とは限らない.前定義の整関数という用語については 32.5 節で詳しく論じる.テイラー展開可能性と以下の十分条件については,32.10 節で論じる.

定理 3.9 (テイラー展開可能の十分条件) 関数 f(x) が a を含む開区間 I で C^{∞} 級とする. ある c, M>0 が あって,任意の $n\geq 0$ と任意の $x\in I$ で,

$$|f^{(n)}(x)| \le cM^n$$

が成り立つとき, f(x) は a でテイラー展開可能である.

また春の講習では説明しただけの、導関数と関数の増減についても、平均値の定理から言える。

定理 3.10 開区間 \check{I} で定義された関数 f(x) が、 \check{I} で微分可能とする.

- (i). \check{I} で $f'(x) \ge 0$ (resp. $f'(x) \le 0$) であることは、 \check{I} で単調増加 (resp. 単調減少) であることと、同値である.
- (ii). \check{I} で f'(x)>0 (resp. f'(x)<0) ならば、 \check{I} で狭義単調増加 (resp. 狭義単調減少) である.

証明 (ii) は平均値の定理の後に、増減表について説明した方法によって証明できるので省略する. (i) の ← の証明も同様なので、省略する.

よって (i) の単調増加関数の場合の, ← のみ証明する.

仮定より任意の $c \in \check{I}$ について, $x \neq c$ で

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0$$

 $x \to c$ の極限を取って $f'(c) \ge 0$. c は任意なので命題を満たす.

3.4 phthon(sympy) の利用・・・テイラーの公式のコマンド series

sympy live で,テイラーの定理を確かめてみよう. 前節の最後に出てきた x の 3 つの関数 e^x , $\ln(1+x)$, $\frac{1}{1+x}$ について,x=0 での 2 次近似多項式と 3 次剰余項を求めてみよう.以下のコードである.

series(exp(x),x,0,3)

series(ln(1+x),x,0,3)

series(1/(1+x),x,0,3)

(3.1) の式の形と合わせると、このコマンドの引数は series (x の関数, 変数 x, 展開する場所 a, 剰余項の次数 n) である。2 次式の近似がほしいので、最後の引数は 3 になる。それぞれ帰ってくる結果は、

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$
$$x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$
$$1 - x + x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

である. 最後の項は剰余項を表している. 前節のテイラーの公式の表現とは異なっているが, 数学的には問題はない (33.5 節で詳しく述べる). ここではこれ以上の説明はせずに, 先に進むこととする.

3.5 積の微分・商の微分・合成関数の微分

経済学部では和や定数倍の導関数の計算

$${f(x) + g(x)}' = f'(x) + g'(x)$$

 ${cf(x)}' = cf'(x)$

自体はできる人が多い. が、積の微分と商の微分

(i).
$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(ii). $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ (ただし, $g(x) \neq 0$)

は、間違える人が多い、そこで確認しておく、これらの証明は、定理30.1で再掲し、証明する.

例題 3.11 以下を証明せよ. ただし (ii) では x > 0 とする.

(i).
$$\{x^3 \ln(x)\}' = 3x^2 \ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \ln(x) + x^2$$

(ii). $\left\{\frac{x^3}{\ln(x)}\right\}' = \frac{3x^2 \ln(x) - x^3 \cdot \frac{1}{x}}{[\ln(x)]^2} = \frac{3x^2 \ln(x) - x^2}{[\ln(x)]^2}$

合成関数 g(f(x)) の微分については、以下が言える.

$$\{g(f(x))\}' = g'(f(x))f'(x) \tag{3.2}$$

合成関数に関することは、30.2 節で定義や証明を行う。例えば、 $h(x)=(7x^2+4x)^{100}$ の導関数を考えるとき、

$$g(u) = u^{100}, f(x) = 7x^2 + 4x$$

と考えると合成関数の微分ができる.手計算するときには $y=u^{100}, u=7x^2+4x$ と考えて、

$$\left.\frac{dy}{dx} = \left.\frac{dy}{du}\right|_{u=7x^2+4x} \cdot \frac{du}{dx}$$

を求めるとよい. $\frac{dy}{du}\Big|_{u=7x^2+4x}$ の意味は,y をu で微分した後に, $u=7x^2+4x$ で評価するという意味である.なので,最後に $\frac{dy}{du}$ をx の式で置き換えることを忘れないように.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= 100u^{99} \cdot (14x + 4)$$
$$(u を戻して) = 100(7x^2 + 4x)^{99} \cdot (14x + 4)$$

この3つの関数の微分を Python Live で表すと、以下のようになる. 確認するとよい.

diff(x**3*ln(x))

diff(x**3/ln(x))

diff((7*x**2+4*x)**100)

このように、diff の第 2 引数を省略した場合は、導関数が得られる。2 階以上の導関数を計算したいときには、第 2 引数にその数字を書くと良い。例えば x^7 の 2 階導関数は、

diff(x**7.2)

で得られる.

3.6 逆関数と逆関数の微分

逆関数については、30.3節で詳しく定義と証明を行うので、ここでは簡単な説明にとどめる.

まず $a \neq 0$ の定数として,x の関数 f(x) = ax + b を例にしよう.y = f(x) つまり,y = ax + b としたときに,これは $x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$ と変形できる.

この結果 y を 1 つ決めたときに, $\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$ と x の値が 1 つ決まる.よって $\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$ は y の関数となっている. 同様の方法で,関数 f があって y=f(x) としたときに,y が 1 個決めたときに x が 1 個決まる場合,その関数を f^{-1} であらわし,f の逆関数という.

上の場合だと,f(x)=ax+b のとき, $f^{-1}(y)=rac{1}{a}y-rac{b}{a}$ である.y を x に直せば,

$$f(x) = ax + b \Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

となる.次に $g(x)=x^2$ としよう. $y=x^2$ とすると, $y\neq 0$ 以外,y>0 の範囲で y の値を 1 つ決めても x の値は一意にはならない $(\pm\sqrt{x}$ と 2 つある). しかし以下のようにあらかじめ g(x) の定義域を定めておけば,逆関数が定義できる.

- (i). g(x) の定義域は $x \ge 0$ とする: $g(x) = x^2 \Longrightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{x}$
- (ii). g(x) の定義域は $x \le 0$ とする: $g(x) = x^2 \Longrightarrow g^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

次に指数関数と対数関数について考えよう. y>0 について, $e^x=y$ と $x=\ln(y)$ が同値であると春の講習で教えた. よって,

$$h(x) = e^x \Longrightarrow h^{-1}(x) = \ln(x)$$

f(x) の逆関数が存在すれば、y = f(x) のグラフと $y = f^{-1}(x)$ のグラフは、直線 y = x について線対称となることが知られているので、それを Excel で見てみよう.

練習 3.12 $h(x) = e^x, h^{-1}(x) = \ln(x)$ として、それらのグラフを Excel 上で以下の手順で書いてみるとよい、

- (i). A1 セルから D1 セルまで見出しを書く. x,e^x,x,ln(x) の順で.
- (ii). A2 セルから A39 セルまで,オートフィルを用いて-1 から 0.1 づつ増えて 2.7 になるまで等差数列を書いていく.
- (iii). B2 セルに, =exp(A2) と書いて, B22 セルまで下方向にコピーする.
- (iv). C2 セルに, =A2 と書いて, C39 セルまで下方向にコピーする.
- (v). D13 セルに, =ln(A13) と書いて,まで下方向にコピーする.
- (vi). A1:D39 を選んで、挿入タブの散布図で線で結んだものを選択する.

逆関数の微分について考える.

 $a \neq 0$ で、f(x) = ax + b のとき、f'(x) = a である.一方 $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ だから、 $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{a} = \frac{1}{f'(x)}$ と、逆数で得られる.

一般形の場合は以下が言える.

$$\{f^{-1}(x)\}' = \frac{1}{f'(u)} \Big|_{u=f^{-1}(x)}$$
$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

-

証明は前節の合成関数の微分からいえる (合成関数の微分の証明は第 III 部) ので省略する.

例えば先の x > 0 に関する $q(x) = x^2$ の逆関数 $q^{-1}(x)$ について,

$$\{g^{-1}(x)\}' = \frac{1}{g'(u)} \Big|_{u=g^{-1}(x)}$$
$$= \frac{1}{2u} \Big|_{u=\sqrt{x}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

よって, n が 2 以上の正整数のとき, $a \ge 0$ のとき, $q^n = a$ となる q を $\sqrt[n]{x}$ または, $q^{1/n}$ と表す. このとき, $x \ge 0$ での $f(x) = x^n$ の逆関数 $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ は, 微分可能であり, 上と同様に

$$\{x^{1/n}\}' = \frac{1}{n}x^{1/n-1}$$

が成り立つ. $\{x^n\}' = nx^{n-1}$ と類似していることを確かめること.

また, $\{e^x\}'=e^x$ も $\{\ln(x)\}'=1/x$ も証明していないが, $\{e^x\}'=e^x$ を証明すれば, e^x の逆関数 $\ln(x)$ の 導関数は上の定理より,

$$\{\ln(x)\}' = \frac{1}{e^u} \Big|_{u=\ln(x)}$$
$$= \frac{1}{e^{\ln x}}$$
$$= \frac{1}{x}$$

となる.

また a は任意の実数として、x の関数 x^a について考える.このとき x の定義域は定数 a によって以下のように考えられる.

- (i). a が 0 以上の整数ならば、定義域は \mathbf{R} 実数全体.
- (ii). a が負の整数ならば、定義域は $\mathbf{R} \setminus \{0\}$
- (iii). a が正の非整数のときは、定義域は $[0,\infty)$.
- (iv). a が負の非整数のときの定義域は $(0,\infty)$.

従ってaにかかわらず、定義域をx > 0のとき、 x^a を考えることができる. このとき、

$$x^a = \{e^{\ln(x)}\}^a = e^{a\ln(x)}$$

と,指数関数と対数関数の合成関数で定義される.合成関数の微分より,

$$\{x^a\}' = \frac{d}{du}e^u \Big|_{u=a\ln(x)} \frac{d}{dx}(a\ln x)$$

$$= e^u \cdot \Big|_{u=a\ln(x)} \frac{a}{x}$$

$$= e^{a\ln(x)} \frac{a}{x}$$

$$= x^a \frac{a}{x}$$

$$= ax^{a-1}$$

が成り立つ. これは a が正整数 n の場合の x^n の導関数の形と全く同様である. よって,例えば $\{x^{\sqrt{3}}\}'=\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$ が言える.

従って、現時点ではまだ $\{e^x\}'=e^x$ を証明していないが、それさえできれば、 $\{\ln(x)\}'=1/x$ や、x>0 のとき、 $\{x^a\}'=ax^{a-1}$ が言える.

3.7 最大化問題・最小化問題の1階の条件

区間 I を定義域とする関数 f(x) の最大値 (resp. 最小値) を求めたいとき、その問題を

$$\max_{x \in I} f(x) \quad \text{(resp. } \min_{x \in I} f(x)\text{)}$$

と書く^{3.2}. この節では,グラフを書かずに最大点や最小点を求める. 最大点・最小点の候補については以下が言える.

命題 3.14 区間 I で定義された関数 f(x) に最大点もしくは最小点が存在する場合は、以下のいずれかを満たす。

- (i). f'(x) = 0 を満たす x
- (ii). 微分不可能な点
- (iii). I の端点

証明 微分可能な点 c が最大点や最小点になったときに, f'(c)=0 となることを示せば良い.任意の微分可能な点 $c\in I$ について,それが最大点となるとしよう.このとき,任意の x について, $f(x)\leq f(c)$.よって以下の 2 式が成り立つ.

$$x - c < 0 \Longrightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0$$

 $x - c > 0 \Longrightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0$

それぞれ $x \to c-0, x \to c+0$ の極限値を取ると,c で微分可能なので,それぞれ, $f'(c) \ge 0, f'(c) \le 0$ が得られる.つまり f'(c) = 0 である.最小点についても同様である.

命題 3.14 の証明は、ロルの定理 (定理 3.4) の証明 (29.6 節) と同様の証明である. よって、前命題の (i)(ii)(iii) の全てが存在しない場合は、例えばこのように書くことができる.

系 3.15 開区間 I で定義された関数 f(x) が I で微分可能とする. f'(c)=0 となる点 $c\in I$ が存在しなければ、最大点も最小点も存在しない.

この系から最大化・最小化問題における「微分 = 0」の重要性が分かることであろう。そこで命題 $\frac{3.14}{i}$ を踏まえて以下を定義する。

定義 3.16 区間 I で定義された関数 f(x) について, $f'(x^*)=0$ を満たす x^* を,1 階の必要条件を満たす点という.略して 1 階の条件を満たす点ともいう.

例えば,[0,5/2] で定義された関数 $f(x)=x^3-4x^2+4x$ の最大点と最小点をそれぞれ求めてみよう. 1 階の条件は $f'(x)=3x^2-8x+4=0$ を計算すればよい. $3x^2-8x+4$ は因数分解ができて,結局

(3x-2)(x-2)=0 を解けばよいので x=2/3, x=2 の 2 点である.端点は 0,5/2 である.よってこの 4 点について,f の値を求めて最も大きいものと最も小さいものを選べばよい.

•
$$f(0) = 0$$

 $^{3.2}$ 一般に実数の部分集合 X を定義域とする関数 f(x) の最大化問題は

$$\max_{x} f(x)$$

と書く、経済の問題では区間における最大化ばかりなので、本文では区間Iについての最大化問題に特化している。

- $f(2/3) = (2/3)^3 4(2/3)^2 + 4(2/3) = (8 48 + 72)/27 = 32/27$
- f(2) = 0
- $f(5/2) = (5/2)^3 4 \cdot (5/2)^2 + 4 \cdot (5/2) = 5/8$

この結果から,x = 2/3が最大点で,x = 0,2の2点が最小点となる.

3.8 Python(sympy) の利用 diff, subs

前節の [0,5/2] で定義された関数 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ について,python live を利用して復習しよう.

f=x**3-4*x**2+4*x

diff(f,x)

solve(diff(f,x))

 $f'(x)=3x^2-8x+4$ と f'(x)=0 の解が x=2/3,3 であることがわかる. 前節通りに端点を含めて f(0),f(2/3),f(2),f(5/2) を求めよう. 以下で得られる.

- f.subs(x,0)
- f.subs(x,2/3)
- f.subs(x,2)
- f.subs(x,5/2)

subs は substitute の頭文字である. 最大点が x=2/3, 最小点が x=0.2 となることがわかるであろう.

なお現在の sympy live では上の式では最大値 f(2/3) が分数表記となるが、ダウンロードした sympy では小数となる場合がある。その場合でも分数で値が欲しい場合は、Rational(分子、分母) を代入するとよい。

f.subs(x,Rational(2,3))

これで、最大値 f(2/3) = 32/27 が得られる.

3.9 関数の凹凸性と最大化・最小化問題

春の講習で述べたように、 $f(x) = -x^2$ は狭義凹関数であることなど、関数の凹凸性の定義は春の講習で済ませてある。例えば

http://www.ic.daito.ac.jp/~tkadoda/2019/2019spring1020.pdf

の「1.3節グラフと凹凸」では、以下のように書かれている.

定義 3.17 実数の部分集合 X で定義された関数 f(x) を考える.2 つの任意の $x_1, x_2 \in X$ と,0 以上 1 以下 の任意の実数 λ について,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

(resp. $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$)

が成り立つとき、f(x) は凸関数 (resp. 凹関数) であるという.

狭義の凹凸についても,「3.5 節 f''(x) の正負は関数の凸・凹と関係する (講義では軽めに紹介)」で

定義 3.18 実数の部分集合 X で定義された関数 f(x) を考える. f(x) は狭義凸関数 (resp. 狭義凹関数) であるとは,任意の異なる $x_1,x_2\in X$ と,任意の実数 $\lambda\in(0,1)$ について,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

(resp. $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$)

が成り立つことである.

と定義してある.

3.9.1 凹関数・凸関数の性質

ここでは、微分可能性には関係なく成り立つ命題を示す。他にもいろいろなことが言えるが、それは $\frac{31}{2}$ 章 に回すとする。

命題 3.19 区間 I で定義された関数 f(x) が,I で狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) とする.このとき,最大点 (resp. 最小点) は高々 1 点である.

証明 同様にできるので、狭義凹関数のときのみ証明する。対偶を示すので、f(x) が 2 点以上で最大点を取ると仮定する。そのうちの 2 点を x_1,x_2 とし、 $f(x_1)=f(x_2)=M$ とする。仮定より任意の $x\in I$ で $f(x)\leq M$. x_1 と x_2 の中点を考えて、

$$f((1-1/2)x_1 + (1/2)x_2) \le M$$

= $(1-(1/2))f(x_1) + (1/2)f(x_2)$

この式から、f(x) は I で狭義凹関数ではない。従って命題が証明された。

この命題では f(x) の最大点 (resp. 最小点) が存在しない場合もあることに注意すること、存在した場合には、1 点のみであるという点が重要なのである.

次に、凹関数や凸関数の和と定数倍について述べよう.

命題 3.20 区間 I で定義された 2 つの関数 f(x), g(x) について,

- (i). f(x), g(x) ともに凹関数 (resp. 凸関数) ならば, f(x) + g(x) も凹関数 (resp. 凸関数) である.
- (ii). f(x) が狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) で,g(x) が凹関数 (resp. 凸関数) ならば,f(x)+g(x) は,狭 義凹関数 (resp. 狭義凸関数) である.
- (iii). f(x) が凹関数 (resp. 凸関数) ならば、任意の a>0 について af(x) も凹関数 (resp. 凸関数) である.
- (iv). f(x) が狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) ならば、任意の a>0 について af(x) も狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) である.
- (v). f(x) が凹関数 (resp. 凸関数) ならば、任意の a < 0 について af(x) は凸関数 (resp. 凹関数) である.
- (vi). f(x) が狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) ならば、任意の a<0 について af(x) は狭義凸関数 (resp. 狭義凹関数) である.

┙

証明 (ii) の狭義凹関数のみ証明する. 任意の異なる 2 点 x_1, x_2 と, 任意の $\lambda \in (0,1)$ について,

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) > (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

$$g((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) > (1 - \lambda)g(x_1) + \lambda g(x_2)$$

両辺加えて

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) + g((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) > (1-\lambda)(f(x_1) + g(x_1)) + \lambda(f(x_2) + g(x_2))$$

(i) からは,「凹関数や凸関数は,それぞれ和について閉じている」といえる. (ii) が面白い点で,「狭義凹関数や狭義凸関数は,それぞれ和について閉じている」のみならず,さらにゆるい条件で,狭義凹関数や狭義凸関数が得られるのである.

定数倍は、正数を掛けるか負数を掛けるかで凹凸性が変わる点も面白い点である。 つまり (iii)(iv) からは、「凹関数・凸関数・狭義凹関数・狭義凸関数は、それぞれ (v)(vi) からは、負の定数倍を掛けると、凹凸が逆になることが言える。

学部の経済学では、予め f(x) が狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) であることがわかっていることが、ほとんどである。例えば 3 つの u の関数、 $-u^2$ 、 \sqrt{u} 、 $\ln(u)$ がすべて狭義凹関数であることは、春の講習で図示した。

実はこれらについて p,q(ただし $p \neq 0$) を定数として,u に px+q を代入してできる x の関数 $-(px+q)^2,\sqrt{px+q},\ln(px+q)$ も,やはり狭義凹関数である。px+q は x について凹関数でもあり凸関数でもあるので,一般化して次のように言える.

命題 3.21 (合成関数の凹凸)区間 I_u で定義された関数 g(u) と,区間 I_x で定義された x の関数 f(x) について, $f(I_x)\subset I_u$ とする. I_x で定義された合成関数 $g\circ f(x)$ について,

- (i). f(x) = px + q (ただし $p \neq 0$) とする.
 - (a) g(u) が I_u で凹関数 (resp. 凸関数) のとき, $g\circ f(x)=g(px+q)$ は x について凹関数 (resp. 凸関数) である.
 - (b) g(u) が I_u で狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) のとき, $g\circ f(x)=g(px+q)$ は x について狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) である.
- (ii). f(x) が凹関数 (resp. 凸関数) とする. g(u) が I_u で凹関数 (resp. 凸関数) かつ単調増加のとき, $g\circ f(x)$ は x について凹関数 (resp. 凸関数) である.
- (iii). f(x) が狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) で,g(u) が I_u で凹関数 (resp. 凸関数) かつ狭義単調増加のとき, $g\circ f(x)$ は x について狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) である.

証明 同様に証明できるので、(i)(b) と (iii) のそれぞれ狭義凹関数についてのみ証明する.

 \Box

(i)(b) の狭義凹関数についての証明: 任意の異なる 2 点 x_1, x_2 と任意の $\lambda \in (0,1)$ で

$$g \circ f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) = g(p(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) + q)$$

$$= g((1-\lambda)(px_1 + q) + \lambda(px_2 + q))$$

$$px_1 + q \neq px_2 + q かつ g(u) が u について狭義凹関数なので$$

$$> (1-\lambda)g(px_1 + q) + \lambda g(px_2 + q)$$

$$= (1-\lambda)g \circ f(x_1) + \lambda g \circ f(x_2)$$

よって命題が成り立つ.

(iii) の狭義凹関数についての証明: 任意の異なる $2 \stackrel{\cdot}{a} x_1, x_2$ と任意の $\lambda \in (0,1)$ で

$$g \circ f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) = g(f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2))$$
 f が狭義凹関数で g が狭義単調増加なので $> g((1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2))$
$$g$$
 が凹関数なので $\geq (1-\lambda)g(f(x_1)) + \lambda g(f(x_2))$
$$= (1-\lambda)g \circ f(x_1) + \lambda g \circ f(x_2)$$

よって命題が成り立つ.

 e^u は u について狭義凸関数かつ狭義単調増加であることが知られているので、(i)(b) より、任意の p,q(ただし $p \neq 0)$ で、 e^{px+q} は x について狭義凸関数である。統計などでは、特に p < 0 を考えることが多く、その場合でも狭義凸関数であることがいえる。また $0 \leq x \leq 1$ の関数 $1-x^2/2$ は、明らかに x の狭義凹関数であり、 \sqrt{u} は u について狭義単調増加な知られている。よって (iii) より、 $\sqrt{1-x^2}$ は x について狭義凹関数である3.3。

このように、 e^x , $\ln(x)$, \sqrt{x} , x^n の凹凸を知っているだけでも、この命題によって、いくつかの合成関数の凹凸を判断することができる。なお n 変数関数の場合については、命題 7.6 で述べている。

3.9.2 微分可能な凹関数・凸関数の性質

f(x) の微分可能性を仮定するとき、以下の定理が重要である。

定理 3.22 開区間 \check{I} で定義された関数 f(x) が, \check{I} で微分可能とする.以下の (i) と (ii) について,(a)(b)(c) はそれぞれ同値である

- (i). (a) f(x) が \check{I} で凹関数 (resp. 凸関数) である.
 - (b) f'(x) が \check{I} で単調減少 (resp. 単調増加) である.
 - (c) 任意の2点 $x_1, x_2 \in \check{I}$ について,以下が成り立つ.

$$f'(x_1)(x_2 - x_1) \ge f(x_2) - f(x_1)$$
(resp. $f'(x_1)(x_2 - x_1) \le f(x_2) - f(x_1)$)

- (ii). (a) f(x) が \check{I} で狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) である.
 - (b) f'(x) が \check{I} で狭義単調減少 (resp. 狭義単調増加) である.

^{3.3} 今の場合に xy 平面上に $y = \sqrt{1-x^2}$ を書くと、原点を中心とした単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の、0 < x < 1 の部分となる。

(c) 任意の異なる $2 \stackrel{.}{\text{.}} x_1, x_2 \in \stackrel{.}{I}$ について、以下が成り立つ.

$$f'(x_1)(x_2 - x_1) > f(x_2) - f(x_1)$$

(resp. $f'(x_1)(x_2 - x_1) < f(x_2) - f(x_1)$)

┙

これは後述の定理 31.7 に微分可能性を仮定して得られるので、証明は省略する. 意味が大事なので、(ii) の (c) の式の意味を、 \mathbf{R} で微分可能な狭義凹関数 $f(x) = -x^2$ を例にして説明しよう.

xy 平面上でこのグラフ y=f(x) と,点 (c,f(c)) での「接線」の式 y=f'(c)(x-c)+f(c) のグラフを書いてみよう.

するとx = c以外では、後者の方が上方である。従ってこのとき、

$$f(x) < f'(c)(x - c) + f(c)$$

であり、移項すると

$$f'(c)(x-c) > f(x) - f(c)$$

である.このように接線の式を書いて,それが y = f(x) の上方にあるか下方にあるかを考えたのが,(ii) 式の意味である.

次に最大化について考えよう。 f(x) が I で微分可能な狭義凹関数であると予めわかっているとしよう。このとき, f'(c)=0 となる c は存在しても,高々 1 点しかない.実際そのような c が存在すれば,前定理 (ii) より,x<c のときは f'(x)>0 で,x>c のときは f'(x)<0 である.よって,x<c のときは f(x) はこの範囲で狭義単調増加であり,x>c のときは f(x) は狭義単調減少となる.したがって c が唯一の最大点となる.実際前命題の (ii) の (c) に x_2,x_1 にそれぞれ x,c を代入すると,それが成り立っていおり,命題 3.19 で示した,最大点は高々 1 点しか存在しないこととも一致する.

狭義凸関数の場合や、単なる凹関数・凸関数の場合も同様に考えて、f'(x) の単調性から以下が成り立つ。

定理 3.23 開区間 \check{I} で定義された関数 f(x) が \check{I} で微分可能とする.

- (i). f(x) が \check{I} で凹関数 (resp. 凸関数) ならば、以下の (a)(b)(c) の少なくとも 1 つが成り立つ.
 - (a) f(x) は \check{I} で単調増加.
 - (b) f(x) は \check{I} で単調減少.
 - (c) f'(c) = 0 となる点 $c \in I$ が存在して、その点で最大点となる。 さらに

$$x < c \Longrightarrow f'(x) \ge 0$$
 (resp. $f'(x) \le 0$)
 $x > c \Longrightarrow f'(x) \le 0$ (resp. $f'(x) \ge 0$)

つまり x < c のときは f(x) は単調増加で、x > c のときは f(x) は単調減少となる.

- (ii). f(x) が \check{I} で狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) ならば、以下の (a)(b)(c) のどれか 1 つのみが成り立つ.
 - (a) f(x) は \check{I} で狭義単調増加.
 - (b) f(x) は \check{I} で狭義単調減少.
 - (c) f'(c) = 0 となる点 $c \in I$ が存在して、その点が唯一の最大点となる。 さらに

$$x < c \Longrightarrow f'(x) > 0 \quad (\text{resp. } f'(x) < 0)$$

 $x > c \Longrightarrow f'(x) < 0 \quad (\text{resp. } f'(x) > 0)$

つまり x < c のときは f(x) は狭義単調増加で、x > c のときは f(x) は狭義単調減少となる.

証明は後述の,系 31.9 で微分可能性を仮定して得られるので省略し,以下の 3 つの狭義凹関数を例にして説明しよう.

- $f(x) = \sqrt{x}$ (if x > 0)
- $g(x) = \sqrt{-x}$ (if x > 0)
- $h(x) = -x^2 + 3$

明らかなように,f(x) は狭義単調増加なので,上の (a) にあたる。g(x) は狭義単調減少なので,上の (b) にあたる。h(x) は x=0 で最大値 3 をとり,x<0 では狭義単調増加で,x>0 では狭義単調減少となっている。よって上の (c) にあたる。

この定理 3.23 の f(x) は, \check{I} 全体で微分可能という仮定であった.そこで微分不可能な点や端点がある場合を考える.I が有界閉区間のときには,以下が成り立つ.

系 3.24 有界閉区間 [a,b] で定義された関数 f(x) が,[a,b] で連続,(a,b) で微分可能とする.

- (i). f(x) が [a,b] で凹関数 (resp. 凸関数) とする. f'(c)=0 となる点 $c\in(a,b)$ が存在するとき,この c は最大点 (resp. 最小点) である.
- (ii). f(x) が [a,b] で狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) とする. f'(c)=0 となる点 $c\in(a,b)$ が存在するとき、この c は唯一の最大点 (resp. 最小点) である.

スの

証明 (ii) の狭義凹関数のみ示す。 f(x) を開区間 (a,b) で考えると、前定理 (ii) (c) の場合に当てはまるので、c が開区間 (a,b) での唯一の f(x) の最大点となる。あとは端点 a,b と比較すれば良い。前定理 (ii) (c) より、a < x < c で f'(x) > 0 であり、c < x < b で f'(x) < 0 である。平均値の定理より、ある $c_1 \in (a,c)$ と、ある $c_2 \in (c,b)$ が存在して

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(c_1)$$
$$\frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(c_2)$$

が成り立つ. $f'(c_1) > 0$, $f'(c_2) < 0$ なので, f(c) > f(a), f(c) > f(b) が言える.

このように、開区間 (a,b) で微分可能だが端点 a,b が微分不可能であっても、a,b で連続でさえあれば、前命題同様に「微分=0」に注目して、最大化問題や最小化問題を解くことができる。ただし [a,b] で連続とい

う条件がなければ,これは成り立たない.例えば,[0,1] で定義された関数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (\text{if } 0 \leq x < 1) \\ 100 & (\text{if } x = 1) \end{cases}$ は (0,1) で微分可能で [0,1) で連続であるが,x=1 で不連続である.そして明らかに x=1 のときが最大である.

3.9.3 2階微分可能な凹関数・凸関数の性質

次に f(x) の 2 階微分まで考えよう. 次の定理が重要である.

定理 3.25 開区間 \check{I} で定義された関数 f(x) が \check{I} で 2 階微分可能のとき,

- (i). \check{I} で $f''(x) \leq 0$ (resp. ≥ 0) であることは, f(x) が \check{I} で凹関数 (resp. 凸関数) と同値である.
- (ii). \check{I} で f''(x) < 0 (resp. > 0) ならば、f(x) は \check{I} で狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) である.

証明 (i) の証明: 定理 3.10 の f(x), f'(x) の代わりに f'(x), f''(x) を当てはめて, f'(x) が単調減少 (resp. 単調増加) であることは, $f''(x) \leq 0$ (resp. $f''(x) \geq 0$) と同値である. その結果, 定理 3.22 から証明される.

- (ii) の証明: (i) と同様に、定理 3.10 と定理 3.22 から証明される.
- (ii) の逆は成り立たない.例えば $f(x) = -x^4$ を考えよう.計算すると $f'(x) = -4x^3$, $f''(x) = -12x^2$ である.f'(x) は明らかに狭義単調減少なので,f(x) は狭義凹関数である.一方 x = 0 で f''(x) = 0 となるので,「任意の $x \in \mathbf{R}$ で f''(x) < 0 である」とはいえないのである.

この (ii) と定理 3.22 を合わせると、以下のように $x \to \pm \infty$ のとき、f(x) が $\pm \infty$ に発散することへの十分条件が得られる。特に、凹関数なら $f(x) = -x^2$ をグラフをイメージし、凸関数なら $f(x) = x^2$ をイメージして、それぞれ $x \to \pm \infty$ への極限をイメージするとわかりやすい。

命題 3.26 (i). 開区間 $I=(a,\infty)$ で定義された関数 f(x) が I で 2 階微分可能で, f'(x),f''(x) ともに負 (resp. 正) のとき,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \quad (\text{resp. } \infty)$$

(ii). 開区間 $I=(-\infty,b)$ で定義された関数 f(x) が I で 2 階微分可能とする. f'(x) が正 (resp. 負) で、かっ f''(x) が負 (resp. 正) のとき、

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad (\text{resp. } \infty)$$

証明 (i) の f'(x), f''(x) とも負の場合のみ証明する.

前定理の (ii) と定理 3.22(ii) の (a) から、定理 3.22(ii) の (c) が言えるのである $x_0 \in I$ をとったとき、 $x>x_0$ のとき

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\to -\infty \quad (x \to \infty)$$

よって例えば (i) からは、 (a,∞) で定義された関数 f(x) が f'(x), f''(x) がともに負 (resp. 正) のときは、最小値 (resp. 最大値) を持たないことがすぐに分かる.

さて、定理 3.22 と系 3.24 から、以下が言える、

命題 3.27 開区間 \check{I} を定義域とする関数 f(x) が \check{I} で 2 階微分可能とする.

- (i). 任意の $x \in \check{I}$ で $f''(x) \le 0$ (resp. ≥ 0) とする. このとき f'(c) = 0 をみたす c が存在すれば,それが最大点 (resp. 最小点) となる.
- (ii). 任意の $x \in \check{I}$ で f''(x) < 0(resp. > 0) とする. このとき f'(c) = 0 をみたす c が存在すれば,それが 唯一の最大点 (resp. 最小点) となる.

この \check{I} は開区間であったが、さらに有界閉区間に関する定理3.1と合わせると、以下が言える.

命題 3.28 有界閉区間 [a,b] を定義域とする関数 f(x) が,[a,b] で連続で,(a,b) で 2 階微分可能で,任意の $x \in (a,b)$ で f''(x) < 0(resp. > 0) とする.このとき最大点 (resp. 最小点) が唯一存在し,以下の手順で見つ けることができる.

- (i). まず、f'(c)=0 をみたす内点 $c\in(a,b)$ が存在すれば、それが最大点 (resp. 最小点) である.
- (ii). (i) のような c が存在しなければ、端点 a,b のどちらかが最大点 (resp. 最小点) となる.

さらに f''(x) に連続性を仮定すると以下が言える. 証明は省略する.

定理 3.29 開区間 \check{I} で定義された関数 f(x) が \check{I} で C^2 級とする. f''(c)<0 (resp. f''(c)>0) となる点 c が存在すれば,ある $\delta>0$ があって,c の δ 近傍 $(c-\delta,c+\delta)$ で,f(x) は狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) である.

3.10 最大化問題・最小化問題の2階の条件

前節の議論を踏まえて、この節では、関数の凹凸性や f''(x) の符号などが予めわかっていない場合について説明する.

定義 3.30 区間 I で C^2 級の関数 f(x) について,

- (i). f(x) の最大化 (resp. 最小化) 問題において, $f''(x^*) \le 0$ (resp. $f''(x^*) \ge 0$) を満たす点 x^* を, 2 階の条件を満たす点という. より正しくは, 2 階の必要条件を満たす点という.
- (ii). $f''(x^*) < 0$ (resp. $f''(x^*) > 0$) を満たす点 x^* を、2 階の十分条件を満たす点という.

ところで最大値とは、定義域全体での最大であった。英語では Grobally maximum という。一方ある限ら

れた場所での最大値を、英語では Locally maximun といい、日本語では極大値という。極大値とは部分的に最大な値という意味であることが、英語で示すと分かりやすいであろう。

その極大点・極小点は春の講習で説明したが、狭義極大点・狭義極小点は説明していない。それぞれ数学的に正しく定義したものが以下である。

定義 3.31 区間 I で定義された関数 f(x) について,

- (i). x^* が極大点 (resp. 極小点) であるとは、 x^* を含むある開区間 $(a,b) \in I$ が存在して、任意の $x \in (a,b)$ について、 $f(x) \leq f(x^*)$ (resp. $f(x) \geq f(x^*)$) が成り立つことである.
- (ii). x^* が狭義極大点 (resp. 狭義極小点) であるとは,以下が成り立つことである.: x^* を含むある開区間 $(a,b) \in I$ が存在して, x^* 以外の任意の $x \in (a,b)$ について, $f(x) < f(x^*)$ (resp. $f(x) > f(x^*)$) が成り立つ.

もちろん、 x^* が最大点ならば x^* は極大点でもある.明らかに以下が成り立つ.

定理 3.32 区間 I で定義された C^2 級関数 f(x) の最大化問題 (resp. 最小化問題) について,1 階の必要条件 と 2 階の十分条件の両方を満たす点は,狭義極大点 (resp. 狭義極小点) となる.

証明 最大化問題についてのみ証明する.

 x^* が両方を満たす点とする. つまり $f'(x^*)=0$, $f''(x^*)<0$. 定理 3.29 より, x^* を含むある $(a,b)\in I$ で f(x) は狭義凹関数となる. 定理 3.23 と $f'(x^*)=0$ より, 区間 (a,b) で, x^* は f(x) の唯一の最大点である. 定義 3.31 より, x^* が f(x) の狭義極大点である.

 C^2 級の関数 f(x) について, $f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) = 0$ となる x^* については,極大点かもしれず極小点かもしれず,どちらでもないしれない. 関数によって異なるのである. 実際それを,以下の 3 つの関数

$$f(x) = x^3, g(x) = x^4, h(x) = -g(x)$$

で説明しよう. これらについては f'(0)=f''(0)=0, g'(0)=g''(0)=0, h'(0)=h''(0)=0 である. xy 平面 に y=f(x), y=g(x) のグラフを書けば明らかだが, f(x) は x=0 では極大でもなく極小でもないが, g(x) は x=0 で極小となる. h(x) は x=0 で極大となる.

そこで f''(x) = 0 を含めておくと、最大点 (resp. 最小点) の候補は

- (i). 1階の必要条件と2階の必要条件を,ともに満たす点
- (ii). I の端点
- のどれかとなる. あとはそれぞれの点xについてf(x)を求めて比較すればよい.

なおIに端点がない場合は、その方向に向かってのf(x)の極限を考えなければならない。

例えば、x < 2.5 で定義された関数 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ の最大点と最小点について考えてみよう. f'(x)

は先に求めたが, もう一度書くと

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$$
$$f''(x) = 6x - 8$$

なので、1 階の条件を満たす点は先のとおり x = 2/3, 2. 2 階の条件について考えて、

- f''(2/3) < 0 なので、2/3 は極大点. f(2/3) = 32/27
- f''(2) > 0 なので、2 は極小点、f(2) = 0

上方向の端点 2.5 について,f(2.5)=5/8. 下方向については, $\lim_{x\to -\infty}f(x)$ を考えると,これは明らかに $-\infty$ に発散する.

よって、最大点は2/3で、最小点は存在しない。

また前節の python live のコードの続きを考えてみよう, $f(x)=x^3-4x^2+4x$ が定義されているので, 2 階導関数は

diff(f,x,2)

で f''(x) = 6x - 8 が得られる. diff コマンドの第 3 引数に正整数 n を入れて, 関数の n 階導関数が得られる.

3.11 おまけ 1:テイラーの公式と, exp 関数の PC による計算例

Excel・sympy など多くの PC ソフトでは, e^x を返す関数は $\exp(x)$ という名前になっている.その定義では,テイラーの公式の e^x の x=0 での n 次近似多項式を ∞ へと展開した形 (これをテイラー展開という)から,

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

となっている. 定義できることは 32.6 節で示すものとし、今回は計算について紹介する. もちろん PC では無限には計算できないので、適切な値 n で打ち切る. x>0 として、第 n 項と n+1 項以降を考えると、

$$\begin{split} \exp(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^\infty \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{x}{n+2} + \frac{x^2}{(n+3)(n+2)} + \frac{x^3}{(n+4)(n+3)(n+2)} + \cdots\right) \\ &< \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{(n+2)^k} \\ &\left(\frac{x}{n+2} < 1 \ \text{కtd} \ n \ \text{T}\right) \ = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{1 - x/(n+2)} \end{split}$$

よって, n > x - 2 において,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < \exp(x) < \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{1 - x/(n+2)}$$

が成り立つ. x>0 が与えられたときに, $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{1-x/(n+2)}$ が十分に小さくなるように n (ただし n>x-2)を選べば, $\exp(x)$ を $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ と n 次多項式近似できるのである.

これが PC ソフトの内部で $\exp(x)$ を計算する考え方である.

sympy live で $\exp(4)$ について考えてみよう. sympy live では繰り返しなどは 1 行に収めなければならないので、やや面倒ではあるが、以下のように考えてみよう.

まず、剰余項について、n=10 から 20 まで、n と $\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{1-4/(n+2)}$ の値を表示させるコードが以下である.

a=4.0

for n in range(10,21):print n, a**(n+1)/(factorial(n+1)*(1-a/(n+2)))

4.0 と小数にしたのは、2 行目も小数で表示させるためである. 結果は以下のようになる.

- 10 0.157614237614238
- 11 0.0505922244193849
- 12 0.0150878586434142
- 13 0.00419884748889078
- $14\;\; 0.00109481060451078$
- 15 0.000268439138606009
- 16 6.21006015163678e-5
- 17 1.35956872455587e-5
- 18 2.82458876292771e-6
- 19 5.58271661378654e-7
- 20 1.05212195190535e-7

これで、 $\exp(4)$ を 20 次近似多項式で近似したときに誤差は理論上で 1000 万分の 1.06 より小さいことがわかる. n! は factorial(n) で得られるので、20 次近似した値は以下の順に打ち込むと良い.

s=1.0

for n in range(1,21):s=s+a**n/factorial(n)

s がその値である. では次に

$\exp(a), s, \exp(a)-s$

と打ち込んでみよ、PC での組み込み関数 exp(a) と,今計算した s の値がかなり似ていることがわかるであろう.

 $\exp(4)$ の 40 次多項式近似との比較は以下になる. もっと近いことがわかるであろう.

a=4.0

s=1.0

for n in range(1,41):s=s+a**n/factorial(n)

exp(a),s

3.12 おまけ 2: 微分の応用のニュートン法で平方根や対数関数を近似する

3.12.1 ニュートン法の説明

28.12.1 節では,2 分法で \sqrt{a} の近似値を求めている.しかし導関数を持つ関数 f(x)=0 の解を求めるときに,f(x) が 2 次関数やそれに近いときに,より速く収束する方法がある.それがニュートン法というものである.

数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を以下の様に定める.まずは適切な値 x_0 を決めておく. x_n を決めたときに, x_{n+1} を以下の様に決める.

- (i). ある値 x_n を所与とする. xy 平面上の y = f(x) で接点 $(x_n, f(x_n))$ を通る接線は、 $y = f'(x_n)(x x_n) + f(x_n)$ である.
- (ii). この接線が x 軸と交わる点を $(x_{n+1},0)$ とする. 従って、 $0=f'(x_n)(x_{n+1}-x_n))+f(x_n)$ となる. $f'(x_n)\neq 0$ として、変形すると、

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

この x_n をどんどん作っていき、適当なところで打ち切って、f(x)=0 を満たす x の近似値とするのである.

3.12.2 エクセルのシート上と VBA で平方根の近似値を求める.

簡単化のために 0 < a < 1 として \sqrt{a} を求める。a を所与として $f(x) = x^2 - a$ について,f(x) = 0 となる x > 0 の近似値を求める。明らかに f'(x) = 2x であるので,以下の様に書いて数列 x_n を B 列に作っていく.

- (i). A1,B1,C1,D1 セルに見出しを書く. それぞれ, n,x_n,PC 関数との差,a=と書く.
- (ii). E1 セルに \sqrt{a} の a の値を入力する. 0 < a < 1 で好きな値を入れるとよい.
- (iii). A2 セルに 0,B2 セルに 1 を書く.
- (iv). A3 セルに=A2+1, B3 セルに=B2-(B2*B2-\$E\$1)/(2*B2), C3 セルに=B2-sqrt(\$E\$1)
- (v). A3:C3 をコピーして、下方向に 20 行目あたりまで貼り付ける.

a=0.5 なら、n=5 くらいで Excel の sqrt 関数とほぼ同じ結果となることが分かる。a に 0 から 1 までの色々な値を入れて、収束の様子を確かめるとよい.

これを VBA の関数化した mysqrt01(a) を作る. ループを止める条件は, 1000 回を超える場合か $|(x_{n+1}-x_n)/x_n|$ が $1/2^{48}$ より小さくなった時とする. 0 < a < 1 を考えている.

Function mysqrt01(a)

x = 1

For i = 1 To
$$mx_{loop}$$

sa = $(x * x - a) / (2 * x)$

```
If Abs(sa) < end_ratio Then Exit For
    x = x - sa
Next i

mysqrt01 = x
End Function</pre>
```

a=0 や $a\geq 1$ の場合でも成り立つようにこの関数を用いて、mysqrt(x) という関数を作る.

```
Function mysqrt(x)
  If x = 0 Then
    mysqrt = 0
  ElseIf x < 1 Then
    mysqrt = mysqrt01(x)
  ElseIf x = 1 Then
    mysqrt = 1
  Else
    mysqrt = 1 / mysqrt01(1 / x)
  End If</pre>
```

End Function

これでエクセルのシート上で、sqrt 関数と同様に、 $x \ge 0$ の平方根 \sqrt{x} を、=mysqrt(x の値) と入力して得られる.

3.12.3 エクセルのシート上で対数関数の近似値を求める.

簡単化のために 0 < a < 1 として $\ln(a)$ を求める。a を所与として $f(x) = \exp(x) - a$ について,f(x) = 0 となる x > 0 の近似値を求める。明らかに $f'(x) = \exp(x)$ なので,以下の様に書いて数列 x_n を B 列に作っていく。我々はすでに自力で $\exp(x)$ の近似値を返す関数を作ったのでそれを使ってもよいのだが,実際にその関数はほぼエクセルの \exp 関数と同じ値だった。よってここではエクセルの \exp 関数を用いる。

- (i). A1,B1,C1,D1 セルに見出しを書く. それぞれ, n,x_n,PC 関数との差,a=と書く.
- (ii). E1 セルに $\ln(a)$ の a の値を入力する. 0 < a < 1 で好きな値を入れるとよい.
- (iii). A2 セルに 0,B2 セルに 1 を書く.
- (iv). A3 セルに=A2+1, B3 セルに=B2-(exp(B2)-\$E\$1)/exp(B2), C3 セルに=B2-ln(\$E\$1)
- (v). A3:C3 をコピーして、下方向に 20 行目あたりまで貼り付ける.

こちらも前節同様に、2 分法よりもずいぶん早く収束する。VBA プログラムについては、前節を参考にして、myln01(a) という関数と、myln(x) という関数を自分で作ってみるとよい。

これによって、 $\exp(x)$ 関数と $\ln(x)$ 関数の近似値を得ることができた.

また python についても、挑戦してみるとよいだろう.

4 2変数実数値関数の微分と応用

この章の Python は、Web 上の Sympy Live ではなく、Python3.6 に組み込まれている Sympy を動かす コードを用いる。というのは、3D グラフを多用するためである。従って、新たにコードを書く前に、以下の 3 行を先に書いておくこと。

from sympy import *
from sympy.plotting import *
x, y = symbols('x y')

4.1 3次元グラフと等高線

経済学ではx,yともに0以上を仮定した2変数実数値関数f(x,y)を考えることが多い。特に多いのがa,b,M,p,qを正の定数としたときの,

$$x^a y^b, \quad M - px - qy \tag{4.1}$$

の 2 つである. f(x,y)=xy と $g(x,y)=x^{1/2}y^{1/2}$ について、Python で z=f(x,y),z=g(x,y) の 3 次元グラフをそれぞれ別に、xyz 空間に書いてみよう.

plot3d(x*y, (x, 0, 5), (y, 0, 5)) plot3d(x**0.5*y**0.5, (x, 0, 5), (y, 0, 5))

グラフの範囲は $0 \le x \le 5, 0 \le y \le 5$ としている.

しかし 3D グラフはイメージしにくいので,見やすくするために xy 平面上に等高線を書いてその形をイメージすることが一般的である. f(x,y)=xy について,f(x,y)=5,10,15 の 3 つの等高線を書いたものが以下の python コードで得られる. $0.25 \le x \le 2$ の範囲である.

plot(5/x,10/x,15/x,(x,0.25,2))

このままだと、原点が見えないので、原点を書き込むようなグラフにするのは以下である.

 $plot(5/x,10/x,15/x,(x,0.25,2),axis_center=(0,0))$

いずれにしても, 値が大きくなるにつれて等高線が右上方向にシフトしていることが分かるであろう.

4.2 2変数実数値関数の極限値・連続性・偏微分可能性

前節ですでに f(x,y) と書いてはいるが、ここできちんと書いてみよう。実数の集合を \mathbf{R} で表したように、2 つの実数の組み合わせの集合を \mathbf{R}^2 で表す。 \mathbf{R} の部分集合 \mathbf{X} から 1 つの値をとり \mathbf{R} の部分集合 \mathbf{Y} から 1 つの値をとり、その 2 つの値から、1 つの実数値を決める関数 f を

$$f: X \times Y \mapsto R$$

で表し、2 変数実数値関数と呼ぶ。 $X \times Y$ を X と Y の直積という。x の 1 変数実数値関数の場合 f(x) と書いたように、2 変数実数値関数では、 \mathbf{R}^2 の組みあわせを (x,y) とすると、f(x,y) で表す。

経済学では、2 つの区間の直積が定義域となっていることがほとんどなので、この章でも、区間の直積 $I_x \times I_y$ を定義域とした関数 f(x,y) を考えることがほとんどである.

次に高校で学んだであろう,ピタゴラスの定理を復習しよう.xy 平面の 2 点 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ の距離は $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ とした.同様に,2 つの実数の組み合わせ (x_1,y_1) と (x_2,y_2) について,絶対値を

$$|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

で表す、これは常に 0 以上の実数である、

この絶対値の考え方から、1 変数の δ 近傍を拡張して、点 (x_0,y_0) の δ 近傍 $B_\delta(x_0,y_0)$ を、以下の集合で表すものとする.

$$B_{\delta}(x_0, y_0) = \{(x, y) | |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta \}$$

$$(4.2)$$

 (x_0,y_0) の δ 除外近傍も同様にして、上の集合から (x_0,y_0) を除けば良いので、

$$B_{\delta}(x_0, y_0) \setminus (x_0, y_0) = \{(x, y) \mid |0 < (x, y) - (x_0, y_0)| < \delta\}$$

$$(4.3)$$

とする.

1 変数の区間では、内点と端点があった.これと同様に、2 変数の部分集合では、それらを拡張して内点と境界点を定義しよう.集合 X^c は X の補集合を表すとする.

定義 4.1 \mathbf{R}^2 の部分集合 \mathbf{A} について

- (ii). $点(c_1,c_2) \in A$ が A の内点であるとは、 $点(c_1,c_2)$ のある δ 近傍をとったときに、その δ 近傍内の任意の点が A に含まれるときである。つまり、ある $\delta>0$ が存在して、任意の点 (x,y) について、

$$|(x,y)-(c_1,c_2)|<\delta$$

が成り立つことである.

(iii). 点 (c_1, c_2) が \boldsymbol{A} の境界点であるとは、点 (c_1, c_2) の任意の δ 近傍において、ある点 $(x_1, y_1) \in \boldsymbol{A}$ と、ある点 $(x_2, y_2) \in \boldsymbol{A}^c$ が存在することである.つまり任意の $\delta > 0$ について、

$$|(x_1, y_1) - (c_1, c_2)| < \delta, \quad |(x_2, y_2) - (c_1, c_2)| < \delta$$

が成り立つ $(x_1, y_1) \in A$, $(x_2, y_2) \in A^c$ が存在することである.

例えば集合 $\mathbf{X} = \{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ と集合 $\mathbf{Y} = \{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$ を例に説明しよう.

- $\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ に含まれる点は、 $m{X}$ の内点であり、 $m{Y}$ の内点でもある.
- $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$ に含まれる点は、X の境界点であり、Y の境界点でもある.
- $\{(x,y)|x^2+y^2 \ge 1\}$ に含まれる点は, **X** の外点である.
- $\{(x,y)|x^2+y^2>1\}$ に含まれる点は, Y の外点である.

集合 A と、A の境界点の合併集合を \bar{A} で表す、無論 $A \subset \bar{A}$ である.

1変数の区間では開区間と閉区間があった. 同様の定義として,

定義 4.2 内点のみの集合を開集合といい、補集合が開集合となるものを閉集合と呼ぶ。

いくつかの集合を例にしてみよう.

- $\{(x,y)|x>0,y>0\}$ は、開集合である.
- $\{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ は、閉集合である.
- $\{(x,y)|0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ は、開集合である.
- $\{(x,y)|0 < x \le 1, 0 < y < 1\}$ は、開集合でもなく、閉集合でもない。
- \mathbb{R}^2 は,開集合でもあり閉集合でもある.
- \bullet 2 つの開区間 \check{I}_x と \check{I}_y の直積 $\check{I}_x \times \check{I}_y$ は開集合である.
- 2 つの閉区間 \overline{I}_x と \overline{I}_y の直積 $\overline{I}_x \times \overline{I}_y$ は、閉集合である.

2変数関数の極限値を考える. \mathbb{R}^2 で定義された関数

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{(if } x = 0) \\ 1 & \text{(その他のとき)} \end{cases}$$
 (4.4)

と,(x,y)=(0,0) について考えてみよう.あらかじめ y=0 として, $x\neq 0$ で x=0 に f(x,y) を近づけて いく値は,1 変数関数の極限値を用いて

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = 2$$

である.同様に,あらかじめ x=0 として, $y\neq 0$ として y=0 に f(x,y) を近づけていくとき,その極限値も存在して,

$$\lim_{y \to 0} f(0, y) = 1$$

である. 従って今の場合, x = y = 0 に近づける方法を変えることによって,極限値が異なっている. 従って,この f(x,y) については点 (0,0) での極限値は存在しない.

一方で、点(3,3) については、(3,3) 以外から(3,3) へ向かってどのような近づけ方をしても f(x,y) の1 となることが予想させる。この場合、(3,3) への極限値は存在すると言いたい。

このように極限値の存在については、「どのような近づけ方をしても」という考え方が重要となる。 ϵ 論法による定義は (※まだ書いていない) が、それと同値の命題は、次節の命題 4.4 にあるので、それをもって極限値の存在を考えるものとする。

連続関数についても,1 変数の場合を少し拡張したものとなる. ϵ 論法による定義は bbb 節 (※まだ書いていない) で定義するが,連続性に対する命題は,次節の命題 4.5 にあるので,それをもって連続性や連続関数を考えるものとする.

連続関数の和や積が連続関数となるのは、1変数実数値関数の場合と同様である.

2 変数関数の偏微分・偏導関数や C^1 級・ C^2 級などについては,春の講習で行った.微分可能性と偏微分可能性は異なっているが, ϵ 論法による微分可能性については後述 (bbb 節 (※まだ書いていない)) するが,lim sup を用いた定義は次節にあるので,興味があれば参照すると良い.

また以下の定理は重要なので、紹介だけしておく.

定理 4.3 開集合で定義された 2 変数実数値関数 f(x,y) が C^1 級ならば,f(x,y) は微分可能である.

経済学で出てくる関数はこの定理の仮定を満たしていることがほとんどである.よって、微分可能性をほとんど気にしないで、偏微分だけ考えれえばよい.

4.3 [飛ばしてよい]sup で極限値・連続性・微分可能性を表す

前節の、関数の極限値と連続性については、 $\sup \delta$ 除外近傍で考えることができる.

命題 4.4 集合 $X\times Y$ で定義された 2 変数実数値関数 f(x,y) について,点 $(a,b)\in\overline{X\times Y}$ への極限値が α であること,つまり

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x) = \alpha$$

であることは,

$$\lim_{\delta \to +0} \sup_{0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta} |f(x,y) - \alpha| = 0$$

が成り立つことと同値である.

連続性についても δ 近傍を用いて、同様に言える.

命題 4.5 前命題の f(x.y) が、点 $(a,b) \in X \times Y$ で連続であること、つまり、

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

であることは,

$$\lim_{\delta \to +0} \sup_{0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta} |f(x,y) - f(a,b)| = 0$$

と同値である. また任意の $(a,b) \in X \times Y$ で上の式が成り立つときは, f(x,y) は定義域で連続である.

 $\sup_{0<|(x,y)-(a,b)|<\delta}$ は、 $\sup_{(x,y)\in B_\delta(a,b)\setminus(a,b)}$ とも書けるが、前者のほうが書きやすいであろう.

この命題を用いれば、2変数関数でも連続関数の和や積が連続であることが言える (※証明はまだしていない).

前節の(4.4)式が、点(0,0)で不連続であることを、上の命題で示そう。

$$\begin{split} \sup_{0<|(x,y)-(0,0)|<\delta}|f(x,y)-f(0,0)| &= \sup_{0<|(x,y)-(0,0)|<\delta}|1-2|\\ &= 1\\ &\to 1\quad (\delta\to +0) \end{split}$$

これより f(x,y) は点 (0,0) で不連続である.

同様に(4.4)式が、点(3,3)で連続であることを示そう。 $\delta < 3$ とすると、

$$\sup_{0<|(x,y)-(0,0)|<\delta}|f(x,y)-f(3,3)| = \sup_{0<|(x,y)-(0,0)|<\delta}|0|$$
= 0

よって,この左辺の $\delta \to +0$ の極限値は 0 となるので,f(x,y) は (3,3) で連続である. δ は $\delta \to +0$ という極限を考えるので,適当な正数 (今の場合 3) をとってそれ未満と考えても問題ない.

f(x,y) が偏微分可能であることは 1 変数の微分そのものなので、以下の命題が言える.

命題 4.6 開区間の直積 $\check{I}_x \times \check{I}_y$ で定義された 2 変数実数値関数 f(x,y) が,点 (a,b) で偏微分可能であることは,以下の 2 式を満たすある実数 α,β が存在することと同値である.

$$\lim_{\delta \to +0} \sup_{0 < |x-a| < \delta} \left| \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a} - \alpha \right| = 0$$

$$\lim_{\delta \to +0} \sup_{0 < |y-b| < \delta} \left| \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b} - \beta \right| = 0$$

この $\alpha(\text{resp. }\beta)$ が,f(x,y) の (a,b) に関する x(resp. y) の偏微分係数 $f_x(a,b)$ (resp. $f_y(a,b)$) と一致する.上の 2 つの式が定義域の任意の (a,b) でなりたつとき,f(x,y) は偏微分可能であり,さらに偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ がそれぞれ連続であれば,f(x,y) は C^1 級である.

f(x,y) が微分可能であることは、本来は ϵ 論法で定義するのであるがそれは後回し (※ bbb 節・まだ書いていない) とする。命題 4.4 と同様に、 lim と sup で表すことができる。 それは上の命題を含むように拡張したものであり、式の u,v の代わりに x-a,y-b を入れて、少し変更した形となる。

命題 4.7 開区間の直積 $\check{I}_x \times \check{I}_y$ で定義された 2 変数実数値関数 f(x,y) が,点 (a,b) で微分可能であることは,以下を満たすある実数 α,β が存在することと同値である.

$$\lim_{\delta \to +0} \sup_{0 < |(x,y)-(a,b)| < \delta} \left| \frac{f(x,y) - f(a,b) - \alpha(x-a) - \beta(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \right| = 0$$

前節の (4.4) 式では, $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ が言える.つまり点 (0,0) で偏微分係数をもつ.よって f(x,y) は点 (0,0) で偏微分可能であるが,すでに示したように (0,0) で不連続である.つまり偏微分可能であることは連続であるための十分条件ではないのである.

命題 4.6 との微分可能性との違いはここにある. 証明はここではしないが, 前節の定理 4.3 で述べたように 1 変数関数の場合と同様に「微分可能ならば連続」がいえる.

4.4 3次元空間における接平面と、平面上の接線の関係

xyz 空間では、定数 a,b,c,d について ax+by+cz=d は平面を表す。よって、f(x,y)=ax+by+c について、z=f(x,y) も平面を表す式となる。2 つほどグラフを python で書いてみよう。

plot3d(2*x+3*y,(x,0,2),(y,0,2)) plot3d(-2*x+3*y+4,(x,0,2),(y,0,2))

1 変数実数値関数 f(x) では、導関数 f'(x) によって、xy 平面上での点 a での「接線」

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

を求めることができた.同様に 2 変数実数値関数 f(x,y) では,偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ によって,以下のように点 (a,b) での接平面を求めることができる.

定義 4.8 開区間の直積 $\check{I}_x \times \check{I}_y$ で定義された 2 変数実数値関数 f(x,y) が,定義域で C^1 級とする.このとき

平面

$$z = f(a,b) + f_x(a,b) \cdot (x-a) + f_y(a,b) \cdot (y-b)$$
(4.5)

を, z = f(x,y) の点 (a,b) での接平面という.

例として $f(x,y)=-x^2-y^2$ で、グラフと接平面考えて見よう、 $f_x(x,y)=-2x, f_y(x,y)=-2y$ である、点 (a,b) での接平面の式は

$$z = -2a(x - a) - 2b(y - b) - a^{2} - b^{2}$$

となる. (a,b) = (0.5,1) の 3D グラフを z = f(x,y) とともに Python で書いたものが以下である.

plot3d(-x**2-y**2,-(x-0.5)-2*(y-1)-1.25,(x,-3,3),(y,-3,3))

 $-3 \le x \le 3, -3 \le y \le 3$ の範囲で書いている。接平面が z = f(x,y) に接しているのが分かるであろう。 また先の f(x,y) = xy では, $f_x(x,y) = y, f_y(x,y) = x$ である。点 (a,b) での接平面の式は

$$z = b(x - a) + a(y - b) + ab$$

である. (a,b) = (0.5,1) の 3D グラフを z = f(x,y) とともに Python で書いたものが以下である.

plot3d(x*y,(x-0.5)+0.5*(y-1)+0.5,(x,0,3),(y,0,3))

 $0 \le x \le 3, 0 \le y \le 3$ の範囲で書いている。 こちらも接平面が z = f(x,y) に接しているのが分かるであろう。 しかし一般的には 3D グラフは見にくいので,やはり接平面も等高線として xy 平面上に書くことがある。 もちろん点 (a,b) での接平面について知りたいのだから等高線の高さは z = f(a,b) にする。 よって,接平面の式 $z = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b)$ に z = f(a,b) を代入して $f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b)$. これを簡単にすると,

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) = 0 (4.6)$$

これは xy 平面上では直線である. この直線が接平面の等高線である.

f(x,y) の等高線 f(x,y) = f(a,b) を書けば、f(x,y) = f(a,b) の点 (a,b) での接線が、(4.6) 式の直線となっていることが分かる.

これをまとめると,以下が言える.

命題 4.9 f(x,y) は定義 4.8 と同様とする. 定数 u について f(x,y)=u となる (x,y) が定義域に存在するとき,xy 平面上のグラフ f(x,y)=u 上の点 (a,b) での接線は,(4.6) 式となる.

 $f_y(a,b) \neq 0$ のとき,この接線の傾きは $-\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}$ となることは,春の講習でも教えた通りである. $x \geq 0, y \geq 0$ で定義された関数 f(x,y) = xy についてと点 (2,5) について考えよう. f(2,5) = 10 なので,等高線 xy = 10 をグラフに書くとする (y の式に直すと y = 10/x). $f_x(x,y) = y, f_y(x,y) = x$ と (4.6) 式よりその等高線の接線は

$$5 \cdot (x-2) + 2 \cdot (y-5) = 0$$

y の式に直すと、y = -2.5(x-2) + 5 である. python で xy 平面上に等高線と接線のグラフを書くと、

 $plot(10/x,-2.5*(x-2)+5,(x,0.25,4),axis_center=(0,0))$

で得られるので確認するとよい.

4.5 2変数実数値関数の最大化・最小化の1階の条件

まず、 $f(x,y)=-(x-1)^2-(y-2)^2+3$ 、 $g(x,y)=x^2+y^2$ として、z=f(x,y)、z=g(x,y) の 3D グラフを、それぞれ書いてみよう。ただし Sympy Live ではなく、組み込みの Sympy を用いる。

plot3d(-(x-1)**2-(y-2)**2+3) plot3d(x**2+y**2)

このように sympy の plot3d で x,y の範囲を指定しない場合は, $-10 \le x \le 10, -10 \le y \le 10$ の範囲でグラフを書いてくれる.

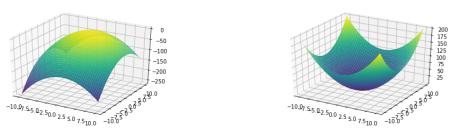


図 4.1 $z = -(x-1)^2 - (y-2)^2$ (左) と $z = x^2 + y^2$ (右) のグラフ

さて f(x,y) が (1,2) で最大値を取るのは明らかであり, $f_x(1,2)=f_y(1,2)=0$ となり,(1,2) での接平面は z=3 となるのも明らかであろう.

g(x,y) が (0,0) で最小値を取るのは明らかであり, $g_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ となり,(0,0) での接平面は z=0 となるのも明らかであろう.

f(x,y) は狭義凹関数であり、g(x,y) は狭義凸関数である。2 変数関数の凹凸性の定義はあとで書く (定義 4.11) ので、最大値を持つ狭義凹関数や、最小値を持つ狭義凸関数のこれらの形を、まずはイメージとして頭に入れておくとよい。

この図や偏導関数によって,最大化問題や最小化問題の 1 階の条件は,1 変数実数値関数の定義 3.16 とほぼ同様に,以下となる.

定義 4.10 開区間の直積 $\check{I}_x \times \check{I}_y$ で定義された 2 変数実数値関数 f(x,y) が定義域で C^1 級とする. このとき,

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

を満たす点 (a,b) を,1階の必要条件を満たす点という.略して1階の条件を満たす点ともいう.

最大化問題・最小化問題の候補は、これ以外だと、微分不可能な点である。また開集合でなく定義域に端点がある場合には、端点も候補になることは、1変数の場合と同様である。

4.6 関数の凹凸性と接平面の関係

2変数実数値関数の凹凸について定義しておこう.

定義 4.11 2 変数実数値関数 f(x,y) について,

(i). f(x,y) が凹関数 (resp. 凸関数) であるとは、任意の 2 点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ について、任意の $\lambda \in [0,1]$ で

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) \ge (1-\lambda)f(x_1, y_1) + \lambda f(x_2, y_2)$$
(resp. \le

が成り立つことである.

(ii). f(x,y) が狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) であるとは、任意の異なる 2 点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ について、任意の $\lambda \in (0,1)$ で

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) > (1-\lambda)f(x_1, y_1) + \lambda f(x_2, y_2)$$
 (resp. <

が成り立つことである.

┙

接平面との関係を書いておこう。1 変数の場合,f(x) が凹関数ならば,xy 平面上で,接線は曲線 y=f(x) の上方にあるか等しかった。2 変数の場合も f(x,y) が凹関数ならば,xyz 空間に接平面と z=f(x,y) のグラフを書いたとき,接平面は z=f(x,y) よりも上方か等しい.

2 変数実数値関数 $f(x,y) = -(x-1)^2 - (y-2)^2 + 3$ で例示してみよう.

 $f_x(x,y)=-2(x-1), f_y(x,y)=-2(y-2)$ なので、 $f(0,0)=3, f_x(0,0)=2, f_y(0,0)=4$ である. よって z=f(x,y) の原点での接平面の式は、

$$z = 2x + 4y + 3$$

である. Python で y=f(x,y) と接平面の 3D グラフを一緒に $-5 \le x \le 5, -5 \le y \le 5$ の範囲で書くコードは以下となる.

plot3d(-(x-1)**2-(y-2)**2+3,2*x+4*y+3,(x,-5,5),(y,-5,5))

この f(x,y) は狭義凹関数であり、図 4.2 を見ると分かるように、接平面のグラフは $z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ は、接点以外では z=f(x,y) のグラフよりも上方にある。そして接点のみで、2 つのグラフの z の値が等しくなっている。式で言うと

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \ge f(x, y)$$

(等号は $(x, y) = (x_0, y_0)$ のみ)

この接平面と z=f(x,y) の上下の関係をまとめると、以下の定理となる。定理も重要であるが、まずは先に書いた 3D グラフによるイメージをつかんでほしい。

定理 4.12 開区間の直積 $\check{I}_x \times \check{I}_y$ で定義された 2 変数実数値関数 f(x,y) が,定義域で C^1 級とする.このとき以下が言える.

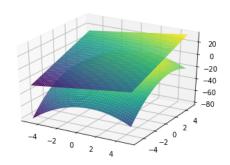


図 4.2 $z=-(x-1)^2-(y-2)^2+3$ と、その (x,y)=(1,2) での接平面のグラフ

(i). f(x,y) が凹関数 (resp. 凸関数) であることは、任意の 2 点 (x,y), (x_0,y_0) について、以下が成り立つことと同値である.

$$f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \ge f(x, y) - f(x_0, y_0)$$
(resp. \le

(ii). f(x,y) が狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) であることは、任意の異なる 2 点 $(x,y),(x_0,y_0)$ について、以下が成り立つことと同値である.

$$f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) > f(x, y) - f(x_0, y_0)$$
(resp.

1 変数実数値関数の場合 (定理 3.25 の (c) 式) と、かなり似ていることを確かめるとよい.なお証明は、n 変数で一般化した定理 7.10 で行っている.

4.7 2変数実数値関数の条件付き最大化問題

最小化も同様に考えられるので省略する。これらについても、春の講習でも行った。(4.1) 式で書いたものが経済学でよく出てくる関数なので、a,b,c,M,p,q を正の定数として、多く出てくる問題は、せいぜいこの程度である。

- 問 (1) $\max_{x \ge 0, y \ge 0} x^a y^b$ s.t. $px + qy \le M$
- 問 (2) $\max_{x \ge 0, y \ge 0} x^a y^b$ s.t. px + qy = M
- 問(3) $\max_{x\geq 0, y\geq 0} (ax+by) \quad s.t. \ px+qy \leq M$
- 問 (4) $\max_{x \ge 0, y \ge 0} (ax + by)$ s.t. px + qy = M
- 問 (5) $\max_{x \ge 0, y \ge 0} (ax + by)$ s.t. $px^2 + qy^2 \le M$
- 閏 (6) $\max_{x \ge 0, y \ge 0} (ax + by)$ s.t. $px^2 + qy^2 = M$

- 問 (7) $\max_{x>0,y>0} (a \ln(x) + b \ln(y))$ s.t. $px + qy \le M$
- 問 (8) $\max_{x>0,y>0} (a \ln(x) + b \ln(y))$ s.t. px + qy = M
- 問 (9) $\max_{x>0,y>0} x^a y^b$ s.t. px + qy = M

xy 平面上に制約式と、最大化したい関数の等高線をいくつか書くと、問 (1) と問 (2)、問 (3) と問 (4)、問 (5) と問 (6)、問 (7) と問 (8) の解は等しいことは明らかである.

問 (2) と問 (9) の解は等しくなる. 実際 (2) の問題で x=0 または y=0 のときには $x^ay^b=0$ となるが、例えば px+qy=M を満たし x>0,y>0 となるものが存在するので、そのとき $x^ay^b>0$ だから、x=0 または y=0 が最大点になることはあり得ない.従って問 (9) と問 (2) の解は等しくなる.

また問(8)の解と問(9)の解は等しくなる。対数関数は狭義単調増加関数なので、制約条件が同じとき、2つの目的関数

$$x^a y^b, \ln(x^a y^b)$$

の最大点は等しくなる. そして $\ln(x^a y^b)$ を直すと $a \ln(x) + b \ln(y)$ となるのである.

以上より実は、問(1)・問(2)・問(7)・問(8)・問(9)の解は全て等しい。

以後この節では,まず問(2)の解を求め,その後問(8)の解をラグランジュ乗数法で求め,問(2)と一致することを示す.その後は問(4)と問(6)の解を求める.

では問 (2) について考えよう. $f(x,y)=x^ay^b$ として、その等高線を書いていき、制約式 px+qy=M と接する場合の接点が最適となる.

接線の定義 4.8 から $f(x,y)=x^ay^b$ として、点 (x,y) を通る等高線の接線の傾きは

$$-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$

であり、これが制約式の直線の傾きと一致することから

$$-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{p}{q}$$
 (4.7)

この式と、制約式をx,yの連立方程式として、計算すればよい、今の場合は、以下の2式の連立方程式となる、

$$\frac{ax^{a-1}y^b}{bx^ay^b} = \frac{p}{q} \tag{4.8}$$

$$px + qy = M (4.9)$$

テストのときはこの後、手で計算しなければならないが、その計算結果は以下となり、この (x,y) が最適点となる.

$$x = \frac{p}{p+q} \cdot \frac{M}{p}, \quad y = \frac{q}{p+q} \cdot \frac{M}{q}$$
 (4.10)

実際 Python で、x,y,a,b,p,q,M が全て正で、 $f(x,y)=x^ay^b$ として $\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}-\frac{p}{q}=0, M-px-qy=0$ を x,y について解くコードは、連立方程式を解く関数 solve を用いて

x,y,a,b,p,q,M = symbols('x,y,a,b,p,q,M',positive=True)

f=x**a*y**b

solve([diff(f,x)/diff(f,y)-p/q,M-p*x-q*y],[x,y])

第1引数は(4.7)式と(4.9)式を移項して

$$\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} - \frac{p}{q} = 0$$
$$px + qy - M = 0$$

として、その左辺をそれぞれ solve の第 1 引数に入れたのである。第 2 引数 [x,y] は、変数 x,y について解くという意味である。なお、このコードは Sympy Live でも動く。

この最大化問題は中級以上のミクロ経済学では頻出なので、(4.10)式の結果を覚えているのが普通である. もちろんここに至るまでの計算もきちんとできるようにしておくとよい.

次に(8)の解を春の講習で行ったラグランジュ乗数法でも行うことができるので、紹介する.

目的関数 $a\ln(x) + b\ln(y)$ も、制約式の関数 M-px-qy も凹関数である。 ラグランジュ関数

$$L(x, y, \lambda) = a \ln(x) + b \ln(y) + \lambda (M - px - qy)$$

を作って, ラグランジュ条件

(i).
$$L_x = \frac{a}{x} - \lambda p = 0$$

(ii).
$$L_y = \frac{b}{y} - \lambda q = 0$$

(iii).
$$\lambda > 0$$

(iv).
$$M - px - qy = 0$$

を満たすx,yが存在すれば、定義域で最大点となる。(i)(ii) の式を変形して、

$$\begin{cases} \frac{a}{x} = \lambda p \\ \frac{b}{y} = \lambda q \end{cases}$$

両式の左辺は正なので、 $\lambda > 0$ である. よって辺々割って

$$\frac{ay}{xb} = \frac{p}{q}$$

これは (4.7) 式と同値である. (iv) の式は (4.8) と同値である. 従って、最大点が (4.10) 式が得られる.

問 (4) については、微分を使わずに 2 つの直線の比較で計算できる。 xy 平面上に px+qy=M を書いておく、y の式ならば、

$$y = -\frac{p}{a}x + \frac{M}{p}$$

次に定数 u を動かして、xy 平面に等高線 ax + by = u を書いていく、y の式ならば、

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{\mu}{a}$$

この式は μ を大きくすると、右上方向にシフトしていく

もし $\frac{a}{b}>\frac{p}{q}$ ならば、点 $(\frac{M}{p},0)$ で 2 つの直線が交わった後、さらに μ を大きくすると、 $x\geq 0, y\geq 0$ の範囲では 2 直線は交差しない. したがって点 $(\frac{M}{p},0)$ が最大点となる.

同様に $\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$ ならば、点 $(0, \frac{M}{q})$ が最大点となる.

 $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$ ならば、 μ を増やしていくと等高線は px+qy=M と一致した後、また交わらなくなるので、制約式を満たす点 (x,y) が、全て最大点となる.

問(6)については、問(2)と全く同様に行って、

$$\begin{cases} -\frac{a}{b} & = -\frac{2px}{2qy} \\ px^2 + qy^2 & = M \end{cases}$$

を解いて $x \ge 0, y \ge 0$ のものを選べばよい. python のコードでは,

x,y,a,b,p,q,M = symbols('x,y,a,b,p,q,M',positive=True)nonlinsolve([a/b-(2*p*x)/(2*q*y),M-p*x**2-q*y**2],[x,y])

で得られる. その結果以下が得られる.

$$x = \frac{a\sqrt{qM}}{\sqrt{p(a^2q + b^2p)}}, \quad y = \frac{b\sqrt{pM}}{\sqrt{q(a^2q + b^2p)}}$$

第Ⅱ部

経済学のための数学 (学部上級用)

表紙に書いたように、例え上級科目でも、計量経済学と統計学以外ならこの II 部を理解しておけば、まず困ることはないだろう。

5 [最初は途中まで読めばよい]n 変数実数値関数の定義から1階微分までの 重要事項

次章を説明するために,この章では n 変数実数値関数の主な定義・定理・命題を述べる.証明は bbb 節で行う (※まだ書いてない).ここでは $\epsilon-\delta$ 論法による定義も含むし,一般的にも書いたので,初読の場合は定義 5.1 と定義 5.2 だけ読んだ後は,飛ばして次章を読んだ方がよいだろう.なお n 変数と書いてあるが,n は 1 以上の場合である.つまり n=1 の場合も含んで成り立つ.

まず前節までで 2 つの区間の直積を $I_x \times I_y$ などと書いていたが,n 個書くのは大変なので,以下のような記号を導入する.

定義 5.1 n 個の区間の直積 $I_1 imes \cdots imes I_n$ を $imes_{i=1}^n I_i$ で表す.同様に n 個の実数の集合を \mathbf{R}^n で表す.

関数の極限値・関数の連続性・偏微分・ C^1 級・凹凸は、2変数の場合と同様に、以下のように定義する。

定義 5.2 (n 変数実数値関数の定義)

- (i). n 個の実数 $x_1 \in \mathbf{R}, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ を取って、関数 f によって実数値をきめるとき、 $f(x_1, \dots, x_n)$ を、n 変数実数値関数と呼ぶ.
- (ii). (x_1,\cdots,x_n) の n 変数実数値関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ を、列ベクトル ${m x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ によって、 $f({m x})$ と書くこともある。
- (iii). また定義域が \mathbf{R}^n よりと同じか小さい \mathbf{X} である場合には, 「 $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n$ を定義域とする n 変数実数値関数 $f(\mathbf{x})$ 」と書くこともある.
- (iv). 特に定義域が区間の直積ならば、定義域を $\times_{i=1}^n I_i$ で表す.

上のxは列ベクトルなのだが、省スペースのため、転置行列の記号 t を用いて、

$$\boldsymbol{x} = {}^{t} (x_1 \quad \cdots \quad x_n)$$

と書くこともある. またベクトルの定義から、和・定数倍・絶対値について以下のように定義する.

定義 5.3 \mathbf{R}^n での 2 点 $\mathbf{x} = {}^t(x_1, \cdots, x_n), \mathbf{y} = {}^t(y_1, \cdots, y_n)$ について,

(i). x = y であるとは、任意の $i = 1, \dots, n$ について、 $x_i = y_i$ のことである.

(ii). x + y は各 x_i, y_i を加えたものとする. つまり,

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

(iii). 任意の実数 α について、 αx は、各 x_i に α を掛けたものとする. つまり、

$$\alpha \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

(iv). x の絶対値を |x| で表し、 $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ とする.

_

従って上のx,yについて,

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

が成り立つ. この絶対値の値は 2 点の距離を表し常に 0 以上であり,x=y と |x-y|=0 が同値となる. 次のベクトルを定義しておくとは,偏微分の表記などに便利である.

定義 5.4 (第 i 基底単位ベクトル) n 項列ベクトル $e_i \in \mathbf{R}^n$ は,第 i 成分のみ 1 で他が 0 のものをで表す. 」 次に極限値を,以下のように $\epsilon-\delta$ 論法で定義する.

定義 5.5 (n 変数実数値関数の極限値の $\epsilon-\delta$ 論法による定義) $X\subset \mathbf{R}^n$ で定義された n 変数実数値関数 $f(\mathbf{x})$ と,点 $\mathbf{c}\in\overline{\mathbf{X}}$ を考える. 任意の $\epsilon>0$ について,ある $\delta>0$ が存在して, $0<|\mathbf{x}-\mathbf{c}|<\delta$ ならば $|f(\mathbf{x})-\alpha|<0$ であるとき,すなわち論理記号を用いて書くと以下が成り立つとき,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0:$$

 $0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}| < \delta \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}) - \alpha| < \epsilon$

f(x) は $x \to c$ で極限値 α を持つという. 記号では以下で表す.

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{c}}f(\boldsymbol{x})=\alpha$$

┙

c の周辺の f(x) と f(c) との差の絶対値を ϵ で測っているので、 ϵ は微小な任意の正数について成り立っていればよい。上の定義の「任意の $\epsilon>0$ について」の代わりに、「ある正数 ϵ_0 があって、 ϵ_0 未満の任意の $\epsilon>0$ について」としても、収束は成り立つ。

また式には、f(x) とあるので、x は X に含まれる点であるが、c はそうではない。X の点であるのみでなく、X の境界点でも構わないことに気をつけること。

 $\epsilon-\delta$ 論法は慣れるまで時間がかかるが,以下のように, \lim,\sup,\inf を用いて同値性が言える.

命題 5.6 (n 変数実数値関数の極限値) 前定義での n 変数実数値関数 f(x) と, $c={}^t(c_1,\cdots,c_n)\in \overline{X}$ について,以下は同値である.

- (i). $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{c}} f(\boldsymbol{x}) = \alpha$ (ii). $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{c}} \sup$ $\sup |f(\boldsymbol{x}) - \alpha| = 0$ $\delta \xrightarrow{\delta \to +0} 0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}| < \delta$
- (iii). $\inf_{\hat{x} \in \mathcal{X}} \sup |f(x) \alpha| = 0$ $\delta > 0$ $0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}| < \delta$

1変数実数値関数同様に、極限値は四則について閉じている.

定理 5.7 (n 変数実数値関数の連続性) $X \subset \mathbf{R}^n$ で定義された n 変数実数値関数 $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})$ と, ある点 $c \in \overline{X}$ について,

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{c}} f(\boldsymbol{x}), \quad \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{c}} g(\boldsymbol{x})$$

がともに実数で存在するとき,以下が成り立つ.

- (i). $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$
- (ii). $\lim_{x \to c} (af(x)) = a \lim_{x \to c} f(x)$ (ただし a は実数定数)
- (iii). $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{c}} (f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})) = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{c}} f(\boldsymbol{x}) \cdot \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{c}} g(\boldsymbol{x})$
- (iv). $\lim_{x \to c} (f(x)/g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) / \lim_{x \to c} g(x)$ (ただし $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$)

関数の連続性も $\epsilon - \delta$ 論法で、以下のように定義する。が、1 変数や 2 変数の場合と同様に以下の命題が成 り立つ.

定義 5.8 (n 変数実数値関数の連続を $\epsilon - \delta$ 論法で定義)

(i). $X \subset \mathbb{R}^n$ で定義された n 変数実数値関数 f(x) と, ある点 $c \in X$ について,

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{c}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{c})$$

が成り立つ時, f(x) は c で連続であるという.

(ii). f(x) が c で連続であることを ϵ 論法で書いたものが以下である.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0:$$

 $|x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$

(iii). 任意の $c \in X$ で f(x) が連続のとき、f(x) は X で連続関数であるという.

命題 5.9 (n 変数実数値関数の連続性) $oldsymbol{X}\subset oldsymbol{R}^n$ で定義された n 変数実数値関数 $f(oldsymbol{x})$ と,ある点 $oldsymbol{c}\in oldsymbol{X}$ に ついて,以下は同値である.

- (i). $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ が成り立つ. つまり f(x) は、c で連続である.
- $\lim \sup |f(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{c})| = 0$ $\delta \xrightarrow{} +0 |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}| < \delta$
- (iii). $\inf_{\delta>0} \sup_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}|<\delta} |f(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{c})| = 0$

1変数実数値関数と同様に,連続関数は四則について閉じている.

定理 5.10 集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ で定義された 2 つの実数値関数 f(x), g(x) が定義域で連続関数の時,a は定数として、以下の 3 つの n 変数実数値関数はそれぞれ、X で連続である.

$$f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}), af(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})$$

さらに、 $x \in X$ で $g(x) \neq 0$ ならば、 $\frac{f(x)}{g(x)}$ も X で連続関数である.

偏微分については,2 変数関数の偏微分でも学んだように1 変数実数値関数の微分可能性と同様である. よって以下が言える.

定義 5.11 (n 変数実数値関数の偏微分・偏導関数・ C^1 級) 開集合 $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^n$ で定義される,n 変数実数値関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ について,

(i). 点cで偏微分可能であるとは、 $i=1,\cdots,n$ について、

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{c}+h\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{c})}{h}$$

が存在することである. この式を

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(c_1,\cdots,c_n), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$$

などで表し、点cでの第i偏微分係数という.

(ii). 定義域の任意の点で偏微分可能の時, $f(x_1, \cdots, x_n)$ は偏微分可能であるといい,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\cdots,x_n)$$

を, $f(x_1, \dots, x_n)$ の第 i 偏導関数という.

- (iii). 定義域で $f(x_1, \cdots, x_n)$ が偏微分可能で、n 個の第 i 偏導関数 $(i=1, \cdots, n)$ が全て連続関数であるとき、 $f(x_1, \cdots, x_n)$ は C^1 級であるという.
- (iv). (iii) のとき、各i 偏導関数を横に並べた行ベクトル

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(oldsymbol{x}) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(oldsymbol{x}) \right)$$

を f(x) の偏導関数ベクトルという.

微分可能性は以下で定義される.

定義 5.12 開集合 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ で定義される, n 変数実数値関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ について,

(i). 点 $c\in \mathcal{O}$ で、微分可能であるとは、任意の $i=1,\cdots,n$ について、ある α_1,\cdots,α_n が存在して、以下 が成り立つときである.

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{c}} \left| \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{c}) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - c_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}|} \right| = 0$$
 (5.1)

この $\alpha_i(i=1,\dots,n)$ が,c での第 i 偏微分係数と一致する.

- (ii). 任意の $\mathbf{c} \in \mathcal{O}$ で微分可能の時, $f(x_1, \dots, x_n)$ は \mathcal{O} で微分可能であるという.
- (iii). 微分可能の場合は, 偏導関数ベクトル

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\right)$$

を, f'(x) で表す.

(5.1) 式を満たす $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ が c での偏微分係数であるのは明らかである。また以下がなりたつ。

定理 5.13 (n 変数実数値関数の連続・偏微分・微分) 開集合 $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^n$ で定義された関数 $f(\mathbf{x})$ について,

- (i). f(x) が微分可能ならば、偏微分可能である.
- (ii). f(x) が微分可能ならば、連続である.
- (iii). f(x) が C^1 級ならば、微分可能である.

(i) は定義ですでに述べている形である. (ii) と (iii) の証明は bbb 節で証明する (※まだ書いてない). 次に合成関数について,1 変数実数値関数の場合を拡張したものが以下である.

定理 5.14 (合成関数の連続と微分可能性) 開集合 $\mathcal{O}_x \in \mathbf{R}^n$ を定義域とした,m 個の n 変数実数値関数 $f^{<i>}(\mathbf{x})(i=1,\cdots,m)$ について,それぞれの関数の値域を $f^{<i>}(\mathcal{O}_x)$ で表す.一方開集合 $\mathcal{O}_u \subset \mathbf{R}^n$ で定義される,m 変数実数値関数 $g(u_1,\cdots,u_m)$ があるとする. u_1,\cdots,u_m にそれぞれ $f^{<1>}(\mathbf{x}),\cdots,f^{<m>}(\mathbf{x})$ を代入したものを考える. $\times_{i=1}^n f^{<i>}(\mathcal{O}_x) \subset \mathcal{O}_u$ のとき, \mathcal{O}_x を定義域とした n 変数実数値関数

$$h(\mathbf{x}) = g(f^{<1>}(\mathbf{x}), \dots, f^{}(\mathbf{x}))$$
 (5.2)

は存在して,以下が成り立つ.

- (i). f, g ともに定義域で連続ならば、h も定義域で連続である.
- (ii). f,g ともに定義域で微分可能ならば、h も定義域で微分可能である。h の第 i 偏導関数は

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial u_j}(f^{<1>}(\boldsymbol{x}), \cdots, f^{}(\boldsymbol{x})) \cdot \frac{df^{}}{dx_i}(\boldsymbol{x})$$
(5.3)

_

よって、上の定理の f,g,h について、 f,g ともに定義域で C^1 級ならば、h も C^1 級となる。またこの定理 の表記が面倒である。そこで、次章のように列ベクトル・行ベクトル・行列などの積を利用すると、明快な形で書ける。

6 [最初は飛ばしても良い]n 変数 m 実数値関数の定義と偏導関数:

3行 3列やそれ以上の行列の演算に慣れていなければ、この章は飛ばして良い、2行 2列までの行列の演算については、14章にあるので、まずそれで慣れると良い、

前章のn変数実数値関数は,n変数から1つの値を返すものであった.これをm個まとめて,n変数からm個の値を返すものを,n変数 m 実数値関数とする.

定義 6.1 (n 変数 m 項列ベクトル実数関数の定義) $X \subset \mathbf{R}^n$ で定義された, n 変数 m 項ベクトル値関数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^m$ とは, m 個の n 変数実数値関数 $\mathbf{f}^{<i>}(\mathbf{x})(i=1,\cdots,m)$ があって, それを縦に並べた, m 項列 ベクトルと考える. つまり

$$\mathbf{f}(x_1, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} f^{<1>}(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f^{}(x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix}$$

または x_1, \dots, x_n をxで表して,

$$m{f}(m{x}) = egin{pmatrix} f^{<1>}(m{x}) \\ dots \\ f^{}(m{x}) \end{pmatrix}$$

ras.

さらに、行列形式でn変数から、 $m \times k$ 実数値を返す関数も定義しておく.

定義 6.2 (n 変数 $m \times k$ 行列関数の定義) $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n$ で定義された,n 変数 $m \times k$ 行列実数関数 $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^m$ とは, $m \times k$ 個の n 変数実数値関数 $\mathbf{a}^{< i, j >}(\mathbf{x})(i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, k)$ があって,それを (i, j) 成分にお いた行列と考える.つまり,

$$\mathbf{A}(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} a^{<1,1>}(x_1,\dots,x_n) & \cdots & a^{<1,k>}(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{< m,1>}(x_1,\dots,x_n) & \cdots & a^{< m,k>}(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$$

または x_1, \dots, x_n をxで表して,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a^{<1,1>}(\boldsymbol{x}) & \cdots & a^{<1,k>}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{< m,1>}(\boldsymbol{x}) & \cdots & a^{< m,k>}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

responding to the contract of the contract of

定義 6.3 (n 変数 $m \times k$ 行列関数の連続と微分可能性) $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^n$ で定義された,n 変数 $m \times k$ 行列実数関数 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ について, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の各成分である $m \times k$ 個の n 変数実数値関数 $a^{< i, j >}(\mathbf{x}) (i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, k)$ がそれぞれ,

- (i). 定義域で連続であるとき, A(x) が連続であるという.
- (ii). 定義域で微分可能であるとき, A(x) は定義域で微分可能であるという.

┙

定義域 X が開集合の場合は、以下が言える。

命題 6.4 上の定義の関数 A(x) について,定義域 X が開集合とする.A(x) の各成分である $m \times k$ 個の n 変数実数値関数 $a^{<i,j>}(x)(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,k)$ がそれぞれ定義域で C^1 級ならば,f(x) も定義域で C^1 級であり,かつ定義域で微分可能である.

行列式は、和と積だけの演算なので、以下が簡単に言える.

系 6.5 開集合 $\mathcal{O} \in \mathbf{R}^n$ で定義された,n 変数 $m \times m$ 行列実数関数 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が,定義域で C^1 級とする.このとき,n 変数実数値関数

$$\det(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}))$$

は,定義域で C^1 級である.同様にこのとき, $|\det({m A}({m x}))|$ も, ${m x}$ について C^1 級である.

行列式を定義しているので、行列 ${m A}$ のサイズが、 $m \times k$ ではなくて、 $m \times m$ となっていることに注意すること.

以上の準備から,n変数 m項列ベクトル実数関数の導関数を,行列で表すことができる.

定義 6.6 (ヤコビ行列・定義 5.11 の拡張) $X \in \mathbb{R}^n$ を定義域とする,n 変数 m 項列ベクトル実数関数の $f(x) \in \mathbb{R}^m$ が,定義域で偏微分可能のとき,f(x) の各 i 行にある,実数値関数 $f^{<i>}f(x)$ の偏導関数ベクトル $\frac{\partial}{\partial x}f^{<i>}f(x)$ は,n 項行ベクトルである.それを $i=1,\cdots,m$ の順に縦に並べた $m \times k$ 行列実数関数

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f^{<1>}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x} f^{}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^{<1>}(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^{<1>}(x)}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^{}(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^{}(x)}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

を、ヤコビ行列といい $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ で表す. 他にも、

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x), \quad \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}, \quad \frac{\partial f}{\partial (x_1, \dots, x_n)}(x_1, \dots, x_n)$$

などで表す. またm項列ベクトルyが. xとfによって,

$$y = f(x)$$

と表されている場合には,

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}$$

と表すこともある。特に n=m のときはヤコビ行列の行列式を、ヤコビアンやヤコビ行列式といい、 $J_f(x)$ などで表す。

例題 6.7 3 変数 2 項列ベクトル実数関数 $\mathbf{f}(x_1,x_2,x_3)$ が,以下で表されているとき,ヤコビ行列をそれぞれ求めよ.

(問 1)
$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1x_2x_3 \end{pmatrix}$$
, (問 2) $\boldsymbol{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \ln(x_1) + \sqrt{x_2} + \frac{1}{x_3} \\ \ln(x_1x_2x_3) \end{pmatrix}$

-

(解答) 答えは以下となる.

(問 1)
$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \end{pmatrix}$$
, (問 2) $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1/x_1 & 1/(2\sqrt{x_2}) & -1/x_3^2 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 \end{pmatrix}$,

(解答終)

さてこのヤコビ行列を用いると、前章の定理 5.14 を簡単に表現できる.

系 6.8 (前章の定理 5.14 の拡張でベクトルによる表現) $X \in \mathbb{R}^n$ で定義された m 項列ベクトル実数関数 $f(x) \in \mathbb{R}^m$ と、開集合 $U \in \mathbb{R}^m$ で定義された k 項列ベクトル実数関数 $f(x) \in \mathbb{R}^k$ があり、f(x) の値域ベクトル Y = f(X) について、 $Y \subset U$ とする、このとき、

(i). n 変数 k 項列ベクトル実数値関数

が存在する. これを g と f の合成関数といい, $g \circ f(x)$ で表す.

- (ii). f,g がともに定義域で連続のとき、合成関数 $g \circ f(x)$ も X で連続である.
- (iii). X,U がともに開集合であり、f,g がともに定義域で C^1 級のとき、合成関数 $g\circ f(x)$ も X で C^1 級であり、ヤコビ行列 $\frac{\partial}{\partial x}g\circ f(x)$ が、

$$\left. rac{\partial}{\partial oldsymbol{u}} oldsymbol{g}(oldsymbol{u})
ight|_{oldsymbol{u} = oldsymbol{f}'(x)} \cdot rac{\partial}{\partial oldsymbol{x}} oldsymbol{g}(oldsymbol{f}(oldsymbol{x}))$$

などで表される. なお $\frac{\partial}{\partial u}g(u)\big|_{u=f'(x)}$ は $k\times m$ の行列で,g を u で偏微分したヤコビ行列に,u を f(x) で評価したものである.また f'(x) は, $m\times n$ の行列なので,このヤコビ行列は $k\times n$ の行列となる.

_

証明は省略する (bbb 節で).

f を、n 変数実数値関数 f(x) で置き換えたものが、前章の定理 5.14 となる.

ヤコビ行列は他にも、陰関数の存在・逆関数の存在・重積分の変数変換公式など、これから様々な場面で登場する。それらは後回しにしておき、とりあえず簡単な命題を示しておく。

系 6.9 開集合 $\mathcal{O} \in \mathbf{R}^n$ で定義された,n 変数 m 項列ベクトル実数関数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ が,定義域で C^1 級とする.このとき, \mathbf{f} のヤコビ行列式

$$\det(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}))$$

やその絶対値 $|\det(f'(x))|$ は、定義域で連続である。

7 [最初は軽く読めば良い]n 変数実数値関数の凹凸性と偏導関数:次章・次々章のための準備

凹関数・凸関数は n 変数実数値関数の最大化・最小化でも,1 変数実数値関数の場合と同様に,重要な役割を果たす.まず定義域として凸集合というものを定義しておく.

定義 7.1 (凸集合の定義) $X \subset \mathbb{R}^n$ について、X での任意の 2 点 $a,b \in X$ と、任意の $\lambda \in [0,1]$ について、

$$(1-\lambda)\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{X}$$

が成り立つとき、X を凸集合という.

練習 7.2 以下の \mathbb{R}^2 の部分集合が、全て凸集合であることを確かめよ. xy 平面に集合を表す点を斜線を引いて表し、任意の 2 点を結んだ線分を書いて、その線分が全て斜線に含まれることを確かめれば良い.

- (i). $\{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$
- (ii). $\{(x,y)|x^2+y^2 \le 1\}$
- (iii). $\{(x,y)|y \ge x^2\}$

1 変数や 2 変数実数値関数の場合でも凹凸の定義をした. n 変数実数値関数の凹凸性を一般的に書くと以下となる.

定義 7.3 (n 変数実数値関数の凹凸性) 凸集合 $X \subset \mathbf{R}^n$ で定義される,n 変数実数値関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ について、

(i). $f(x_1, \dots, x_n)$ が凹関数 (resp. 凸関数) であるとは、定義域に含まれる任意の 2 点 c, d と、任意の $\lambda \in [0,1]$ について、以下が成り立つことである.

$$f((1-\lambda)\mathbf{c} + \lambda \mathbf{d}) \ge (1-\lambda)f(\mathbf{c}) + \lambda f(\mathbf{d})$$
(resp. $f((1-\lambda)\mathbf{c} + \lambda \mathbf{d}) \le (1-\lambda)f(\mathbf{c}) + \lambda f(\mathbf{d})$)

(ii). $f(x_1, \dots, x_n)$ が狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) であるとは、定義域に含まれる任意の異なる 2 点 c, d について、任意の $\lambda \in (0,1)$ について、以下が成り立つことである.

$$f((1-\lambda)\mathbf{c} + \lambda \mathbf{d}) > (1-\lambda)f(\mathbf{c}) + \lambda f(\mathbf{d})$$
(resp. $f((1-\lambda)\mathbf{c} + \lambda \mathbf{d}) < (1-\lambda)f(\mathbf{c}) + \lambda f(\mathbf{d})$)

_

このように列ベクトルの形で書くと,1 変数での定義と似た形になってかなり便利である.さて,定義域は 凸集合という一般的な形で書いたが,経済学での n 変数実数値関数は区間の直積 $\times_{i=1}^n I_i$ が定義域であること がほとんどである. $\times_{i=1}^n I_i$ は凸集合なので,実際の計算で,区間の直積 $\times_{i=1}^n I_i$ を定義域として考えることに 問題はない.

┙

定義域が同じ 2 つの n 変数実数値関数の和や定数倍については 1 変数実数値関数で述べたことと、同様のことが成り立つ。

命題 7.4 凸集合 $X \in \mathbb{R}^n$ で定義された 2 つの n 変数実数値関数, f(x), g(x) について,

- (i). f(x), g(x) ともに定義域で凹 (resp. 凸) ならば、f(x) + g(x) も定義域で凹 (resp. 凸) である.
- (ii). f(x), g(x) ともに定義域で狭義凹 (resp. 狭義凸) ならば、f(x) + g(x) も定義域で狭義凹 (resp. 狭義凸) である.
- (iii). f(x) が定義域で凹 (resp. 凸) で、a>0 ならば、af(x) も定義域で凹 (resp. 凸) である.
- (iv). f(x) が定義域で狭義凹 (resp. 狭義凸) で、a>0 ならば、af(x) も定義域で狭義凹 (resp. 狭義凸) である.
- (v). f(x) が定義域で凹 (resp. 凸) で、a < 0 ならば、af(x) は定義域で凸 (resp. 凹) である.
- (vi). f(x) が定義域で狭義凹 (resp. 狭義凸) で,a<0 ならば,af(x) も定義域で狭義凸 (resp. 狭義凹) である.

証明は1変数実数値関数の場合と同様にできるので、省略する.

n 変数実数値関数の凹凸はすぐには判断できない。とはいえ次の命題から,1 変数実数値関数で凹関数や凸関数となるものを知っていれば,それらを変数を変えて加えた形のものが,やはり凹関数や凸関数となることが言える。

命題 7.5 (定義域の異なる凹凸関数の和) 凸集合 $X\subset \mathbf{R}^m$ を定義域とする m 変数実数値関数 $f(x_1,\cdots,x_m)$ と, 凸集合 $Y\subset \mathbf{R}^n$ を定義域とする n 変数実数値関数 $g(y_1,\cdots,y_n)$ について, 凸集合 $X\times Y\subset \mathbf{R}^{m+n}$ を定義域とする m+n 変数実数値関数

$$h(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = f(x_1, \dots, x_m) + g(y_1, \dots, y_n)$$

について以下が成り立つ.

- (i). f,g とも定義域で凹 (resp. 凸) ならば、h も定義域で凹 (resp. 凸) である.
- (ii). f,g とも定義域で狭義凹 (resp. 狭義凸) ならば、h も定義域で狭義凹 (resp. 狭義凸) である.

証明は簡単なので省略する.例えば,x の関数 e^x, x^2, x^4 は全て狭義凸関数なので,x,y,z の 3 変数実数値関数

$$e^x + y^2 + z^4$$

も狭義凸関数である。命題 3.21 から、任意の実数 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 (ただし $a_1a_2a_3\neq 0$) について、x,y,zの 3 変数実数値関数

$$e^{a_1x+b_1}+(a_2y+b_2)^2+(a_3z+b_3)^4$$

は狭義凸関数となる。同様に、以下の2つのx,y,zの3変数実数値関数

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{1-z}$$
, $\ln(x) + \ln(y) + \ln(z)$

も, それぞれ定義域で狭義凹関数となる.

このように、学部生で学ぶ経済学の上級の範囲で出てくる多変数実数値関数の凹凸についても、1 変数関数の凹凸を知っていれば簡単にわかる場合が多い。実際に、上級の経済理論に出てくるn 変数実数値関数でも、ここまででほぼ十分でもある。もう少し知りたい場合だと、例えば以下のような合成関数で、n 変数実数値関数の凹凸と、1 変数実数値関数の凹凸を組み合わせたものが言える。

命題 7.6 (合成関数の凹凸)凸集合 O を定義域とする u の m 変数実数値関数 g(u) と,凸集合 $X \subset R^m$ を定義域とする n 変数 m 項列ベクトル値関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ を考える. $f(X) \subset I_u$ とすると,X を定義域とする n 変数実数値関数

$$g \circ \boldsymbol{f}(x_1, \cdots, x_n) = g(\boldsymbol{f}(x_1, \cdots, x_n))$$

が存在して,以下が成り立つ.

(i). $f(x_1, \dots, x_n)$ が $m \times n$ の定数行列 \mathbf{A} と,m 項定数列ベクトル \mathbf{b} によって,

$$f(x_1, \dots, x_n) = Ax + b = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + b_n \end{pmatrix}$$
(7.1)

と表される場合. q が定義域で凹関数 (resp. 凸関数) ならば, $q \circ f$ も定義域で凹 (resp. 凸) である.

- (ii). m=1 とする. f が定義域で凹関数 (resp. 凸関数) で,g が定義域で凹関数かつ単調増加のとき, $g\circ f$ は定義域で凹関数 (resp. 凸関数) である.
- (iii). f の各成分の m 個の各実数値関数が,それぞれ定義域で凹関数 (resp. 凸関数) とする。g については定義域で凹関数でかつ, u_1,u_2,\cdots,u_m それぞれの変数について単調増加とする。このとき $g\circ f$ は,定義域で凹関数 (resp. 凸関数) である.
- (iv). m=1 とする. f が定義域で狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) とする. g が定義域で凹関数で狭義単調増加のとき、 $g \circ f$ は定義域で狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) である. $g \circ f$ は定義域で凹関数 (resp. 凸関数) である.
- (v). f の各成分の m 個の各実数値関数が、それぞれ定義域で狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) とする。 g については定義域で凹関数かつ u_1,u_2,\cdots,u_n それぞれの変数について狭義単調増加とする。このとき、 $g\circ f$ は定義域で狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) である。

注意: (ii) と (iv) は m = 1 なので, f ではなく f で表している.

証明 (i) の凹関数の証明: X での任意の異なる 2 点 c, d と任意の $\lambda \in (0,1)$ について, $f((1-\lambda)c + \lambda d) = (1-\lambda)f(c) + \lambda f(d)$ が成り立つ. よって,

$$g \circ \boldsymbol{f}((1-\lambda)\boldsymbol{c} + \lambda \boldsymbol{d}) = g(\boldsymbol{f}((1-\lambda)\boldsymbol{c} + \lambda \boldsymbol{d}))$$

$$= g((1-\lambda)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) + \lambda \boldsymbol{f}(\boldsymbol{d}))$$
 $(g が凹関数なので) \geq ((1-\lambda)g(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})) + \lambda g(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{d}))$

$$= (1-\lambda)g \circ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) + \lambda g \circ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{d})$$

これより、命題が成り立つ.

١

(iv) の狭義凹関数の証明: 命題 3.21 の (iii) の証明と同様にできるが、一応書いておくので比較すると良い.

$$g \circ f((1-\lambda)\boldsymbol{c} + \lambda \boldsymbol{d}) = g(f((1-\lambda)\boldsymbol{c} + \lambda \boldsymbol{d}))$$
 (f が狭義凹関数で g が狭義単調増加なので) $> g(f((1-\lambda)\boldsymbol{c} + \lambda \boldsymbol{d}))$
$$= g((1-\lambda)f(\boldsymbol{c}) + \lambda f(\boldsymbol{d}))$$
 (g が凹関数なので) $\geq ((1-\lambda)g(f(\boldsymbol{c})) + \lambda g(f(\boldsymbol{d}))$
$$= (1-\lambda)g \circ f(\boldsymbol{c}) + \lambda g \circ f(\boldsymbol{d})$$

(ii) の証明は (iv) と同様にできる. (iii) は (ii) と命題 7.4(i) から言える. (iv) は (iv) と命題 7.4(ii) から言える.

例題 7.7 以下の 3 つの関数 h(x) が全て狭義凹関数であることを、微分せずに確かめよ.

- (i). 定義域はx > 1で、 $h(x) = \sqrt{1 1/x}$
- (ii). a, b とも正の定数. 定義域は x > 0 で、 $h(x) = \ln(a\sqrt{x} + b)$
- (iii). 定義域は0 < x < 1で、 $h(x) = -\frac{1}{1-x^2}$

(解答)(i) は,f(x)=1-1/x, $g(u)=\sqrt{u}$ での g(f(x)) である.x>1 のとき -1/x が狭義凹関数で狭義 単調増加なので f(x) も同様.f(x)>0 であり,u>0 の範囲で g(u) は狭義単調増加なので,前命題 (ii)(b) より,h(x) は狭義凹関数.

(ii) では, $f(x)=a\sqrt{x}+b, g(u)=\ln(u)$ の g(f(x)) である.f(x),g(u) ともに定義域で,狭義凹関数で狭義単調増加なので,前命題 (ii)(b) より,h(x) は狭義凹関数.

(iii) では, $f(x)=1-x^2, g(u)=-1/u$ の g(f(x)) である. f(x) は定義域で,狭義凹関数で狭義単調減少. f(x)>0 g(x) は u>0 の範囲で,狭義凹関数で狭義単調増加. よって前命題 (ii)(b) より,h(x) は狭義凹関数.

(解答終)

このように一見複雑に見えるが、2 変数関数の場合も含めて、この命題から2 階微分なしに関数の凹凸が分かる場合もあるので、意外と便利である。

練習 7.8 命題 7.4・命題 7.5・命題 7.6 から,以下の x,y,z による 3 変数実数値関数は全て定義域で凹関数である.これらについて,それぞれの最大点を求めよ.ただし (ii) については,最大点が複数存在することに気をつけよ.

- (i). $-x^2 (y-1)^2 (z-2)^4$
- (ii). $-(x+y+z)^2 x \frac{1}{2}y^2$
- (iii). 定義域はx > 0, y > 0, z > 0で、 $\ln(x+y+z) x 2y^2 + \frac{1}{3}\ln(z)$
- (iv). 定義域はx > 0, y > 0, z > 0で、 $4\sqrt{x+y} x e^y 2z + \ln(z+1/z)$

すでにいくつか出てきたが凹凸性に証明については、 $f((1-\lambda)a+\lambda b)$ や $f((1-\lambda)a+\lambda b)-(1-\lambda)f(a)$

.

 $\lambda f(\mathbf{b})$ を計算することが多いので、その性質を述べておく.

命題 7.9 (関数の凹凸性と同値な性質) 凸集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ で定義される,n 変数実数値関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ について, $a, b \in X$ を固定したときの, $\lambda \in [0,1]$ の 2 つの関数 $g(\lambda), H(\lambda)$ を

$$g(\lambda) = f((1 - \lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}), \quad H(\lambda) = f((1 - \lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) - [(1 - \lambda)f(\mathbf{a}) + \lambda f(\mathbf{b})]$$

とする.

- (i). f(x) が凹関数 (resp. 凸関数) であることは、任意の $a,b\in X$ についての上記の $g(\lambda),H(\lambda)$ が凹関数 (resp. 凸関数) であることと同値である.
- (ii). f(x) が狭義凹関数 (resp. 凸関数) であることは、任意の異なる 2 点 $a,b \in X$ について $\lambda \in [0,1]$ の関数 $g(\lambda), H(\lambda)$ が、狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) であることと同値である.

注意: $H(\lambda)$ は $g(\lambda)$ に, λ の線形関数を加えたものなので,前命題より $g(\lambda)$ についてのみ示せば十分である.

証明 (ii) の狭義凹関数のみ証明する. \Longrightarrow は自明である. \Longleftrightarrow を対偶で証明する. f(x) が狭義凹関数でないならば、ある異なる 2 点 a,b とある $\lambda_0 \in (0,1)$ があって、

$$f((1 - \lambda_0)\boldsymbol{a} + \lambda_0\boldsymbol{b}) \le (1 - \lambda_0)f(\boldsymbol{a}) + \lambda_0f(\boldsymbol{b})$$

がなりたつ. この λ_0 によって, $g(\lambda)$ については,

$$g((1-\lambda_0)0+\lambda_0\cdot 1)=g(\lambda_0)=f((1-\lambda_0)\boldsymbol{a}+\lambda_0\boldsymbol{b})\leq (1-\lambda_0)f(\boldsymbol{a})+\lambda_0f(\boldsymbol{b})=(1-\lambda_0)g(0)+\lambda g(1)$$
なので $g(\lambda)$ は狭義凹関数ではない.

次は関数に微分可能性を仮定する. 凹関数や凸関数が C^1 級のとき、2 変数関数 f(x,y) について、z=f(x,y) のグラフと点 (c_1,c_2) での接平面のグラフ $z=f_1(c_1,c_2)(x_1-c_1)+f_2(c_1,c_2)(x_2-c_2)$ との関係と同様に、以下が言える.

定理 7.10 開凸集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ で定義された,n 変数実数値関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ が定義域で C^1 級とする.

(i). f が凹 (resp. 凸) であることは、任意の 2 点 v, c について、以下が成り立つことと同値である.

$$f'(\boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{c}) \ge f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{c})$$
 (resp. $f'(\boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{c}) \le f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{c})$)

(ii). f が狭義凹 (resp. 狭義凸) であることは、任意の異なる 2 点 v,c について、以下が成り立つことと同値である。

$$f'(\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{c}) > f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{c})$$
 (resp. $f'(\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{c}) < f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{c})$)

-

左辺の意味は偏導関数ベクトル $f'(\mathbf{c})$ は行ベクトルであり、列ベクトル $\mathbf{v}-\mathbf{c}$ との内積である. つまりこの 命題の不等式の左辺は

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{c}) \cdot (v_j - c_j)$$

である。命題のように表記すると、1変数実数値関数での凹凸と似た式になっていることを確認せよ。 これを証明するために、まず次の補題を証明しておく。

補題 7.11 開凸集合 $X\subset R^n$ で定義された n 変数実数値関数 f(x) が,定義域で C^1 級とする.この時任意の 2 点 a,b を固定した時, $\lambda\in[0,1]$ の実数値関数

$$H(\lambda) = f((1 - \lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) - [(1 - \lambda)f(\mathbf{a}) + \lambda f(\mathbf{b})]$$

も定義域で C^1 級で,

$$H'(\lambda) = f'((1-\lambda)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) - [f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})]$$

証明 f の定義域は開集合なので、a,b ともに定義域の内点である。 したがって、ある微小な $\delta>0$ が存在して、上の $H(\lambda)$ は開区間 $\check{I}=(-\delta,1+\delta)$ で定義される。

さらに定理 5.14 より $H(\lambda)$ は \check{I} で C^1 級であり,

$$\begin{split} \frac{df}{d\lambda}(1-\lambda)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}((1-\lambda)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}) \cdot \frac{d}{d\lambda}((1-\lambda)a_j + \lambda b_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(1-\lambda)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}) \cdot (b_j - a_j) \\ (ベクトルの内積で表して) &= f'(1-\lambda)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \end{split}$$

一方、 $-[(1-\lambda)f(\boldsymbol{a})+\lambda f(\boldsymbol{b})]$ を λ で微分すると、 $-[f(\boldsymbol{b})-f(\boldsymbol{a})]$ になるのは明らか、よって命題が成り立つ。

定理 7.10 の証明 : (ii) の狭義凹関数のみ証明する.

 \implies の証明: 定義より任意の異なる 2 点 $a,b \in X$ をとって, [0,1] を定義域とする λ の 1 変数実数値関数

$$H(\lambda) = f((1 - \lambda)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}) - [(1 - \lambda)f(\boldsymbol{a}) + \lambda f(\boldsymbol{b})]$$

をとる.補題 7.11 より,これは閉区間 [0,1] で C^1 級である.H(0)=H(1)=0 なのでロルの定理より,ある $c\in(0,1)$ で H'(c)=0 となる点が存在する.また命題 7.9 から, $H(\lambda)$ も λ について狭義凹関数となる.以上より,この $H(\lambda)$ は $\lambda=c$ で最大点をとる定理 3.23(ii) の (c) の場合にあたり,その結果 H'(0)>0 である.よって

$$H'(0) = f'(a)(b-a) - [f(b) - f(a)] > 0$$

任意の異なる 2 点 a, b についてこの式が成り立つので、命題が成り立つ.

┙

 \leftarrow の証明: 任意の異なる 2 点 a,b について、任意の $\lambda \in (0,1)$ を取って、 $c=(1-\lambda)a+\lambda b$ とする. a,b,c 全て異なる点なので仮定より、

$$f'(c)(a-c) > f(a) - f(c)$$

$$f'(c)(b-c) > f(b) - f(c)$$

cの定義より, $a-c=-\lambda(b-a),b-c=(1-\lambda)(b-a)$ である.これを 2 つの不等式の左辺に代入してそれぞれ書き直すと,

$$-\lambda f'(\mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{a}) > f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{c}) \tag{7.2}$$

$$(1 - \lambda)f'(\mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{a}) > f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{c})$$

$$(7.3)$$

(7.2) 式の両辺に $(1-\lambda)$ 倍したものと、(7.3) 式の両辺に λ 倍したものを、両辺それぞれ加えると、

$$0 > (1 - \lambda)f(\boldsymbol{a}) + \lambda f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{c})$$

cを戻して変形して,

$$f((1-\lambda)\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}) > (1-\lambda)f(\boldsymbol{a}) + \lambda f(\boldsymbol{b})$$

が成り立つ. a,b,λ の決め方より、命題が成り立つ.

8 n変数実数値凹凸関数の制約なしの最大化・最小化

開区間で定義された 1 変数の場合,凹関数や狭義凹関数の最大点は「微分=0」を満たす点であった.定理 7.10 より,n 変数実数値関数の場合も同様であることが簡単に言える.この章と次章は,前章・前々章をあまり読まなくともある程度は理解できるように,定理の文章は 2 変数の偏微分の方法と同様の表記で書き,証明 については,列ベクトル形式で書くとする.

定理 8.1 開凸集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ で定義された n 変数実数値関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ が,X で C^1 級とする.

(i). f が凹関数 (resp. 凸関数) で、ある $(c_1,\cdots,c_n)\in \pmb{X}$ で、

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(c_1, \dots, c_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$
(8.1)

を満たす点が存在すれば、この点が f の最大点 (resp. 最小点) であり、この条件を満たす点のみが最大点 (resp. 最小点) となる.

(ii). f が狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) で,ある $(c_1, \dots, c_n) \in X$ で,(8.1) 式を満たす点が存在すれば,この点が f の唯一の最大点である.

証明 (i) の凹関数のみ証明する. まず $f'(c)=\begin{pmatrix}0&\cdots&0\end{pmatrix}$ となる c が存在する場合を考える. 定理 7.10 より, c 以外の任意の $x\in X$ について,

$$0 \ge f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{c})$$

つまり $f(x) \le f(c)$ なので c が最大点となる.

次に $f'(\mathbf{c}) \neq \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ を満たす任意の $\mathbf{c} \in \mathbf{X}$ を考える。このとき,1 以上 n 以下のある整数 i があって, $\frac{\partial f}{\partial x_i} f(\mathbf{c})$ が正 (resp. 負) である。f の定義域が開集合であることと f が C^1 級であることから,ある $\delta > 0$ が存在して, $|\mathbf{x} - \mathbf{c}| < \delta$ を満たす任意の \mathbf{x} について, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ が正 (resp. 負) である。従って,実数 $h \in (-\delta, \delta)$ について,h の 1 変数実数値関数

$$f(\boldsymbol{c} + h\boldsymbol{e}_i)$$

は狭義単調増加 (resp. 狭義単調減少) となるので、例えば h を 0 から少し動かした $f(c+\frac{\delta}{2}e_i)$ (resp. $f(c-\frac{\delta}{2}e_i)$) は f(c) よりも大きい.よって c は最大点にはならない.

この定理に関して経済学でよく出てくるのは、以下のように、統計学や計量経済学での回帰分析の最小2乗推定量の導出である.

例題 8.2 $n\geq 2$ の整数とし、 x_1,\cdots,x_n と y_1,\cdots,y_n の 2n 個の実数が所与として与えられており、 x_1,\cdots,x_n が全て等しくなることはないとする.この時、 α と β の 2 変数実数値関数 $Q(\alpha,\beta)$ を

$$Q(\alpha, \beta) = (y_1 - \alpha - \beta x_1)^2 + \dots + (y_n - \alpha - \beta x_n)^2$$

とするとき,Qを最小にする α と β を求めよ.

(解答) u^2 は u についての凸関数なので、命題 7.5 の (i) の (a) より、2 変数 α 、 β の実数値関数 $(y_1-\alpha-\beta x_1)^2$ は、凸関数である。 $i\geq 2$ の $(y_i-\alpha-\beta x_i)^2$ も同様に、 α 、 β についての凸関数である。 命題 7.4 より、これらの和である $Q(\alpha,\beta)$ も凸関数である。

よって前定理より

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = 0$$

を満たす α, β が存在すれば、それが $Q(\alpha, \beta)$ の最小点となる。それぞれの偏導関数を計算すると、

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) &= 2(y_1 - \alpha - \beta x_1)(-1) + \dots + 2(y_n - \alpha - \beta x_n)(-1) = 0\\ \frac{\partial Q}{\partial \beta}(\alpha, \beta) &= 2(y_1 - \alpha - \beta x_1)(-x_1) + \dots + 2(y_n - \alpha - \beta x_n)(-x_n) = 0 \end{cases}$$

である. 両辺 -2n で割って $\bar{x}=\sum_{i=1}^n x_i/n, \bar{y}=\sum_{i=1}^n y_i/n$ として、上の 2 つの式をそれぞれ変形すると、

$$\alpha + \bar{x}\beta = \bar{y} \tag{8.2}$$

$$\bar{x}\alpha + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2/n\right)\beta = -\sum_{i=1}^{n} x_i y_i/n \tag{8.3}$$

(8.2) 式を $-\bar{x}$ 倍したものと (8.3) 式を加えると,

$$\left[\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}/n - \bar{x}^{2}\right] \beta = \sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}/n - \bar{x}\bar{y}$$

右辺は, $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ と変形できる.左辺の大カッコの中は, $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ と変形できる. x_i についての仮定から,この左辺の大カッコの中は非 0 となる.よって,両辺をこの式で割って,

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

が得られる. この式を (8.2) 式に代入すれば,

$$\alpha = \bar{y} - \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \bar{x}$$

前命題 (i) より、この α , β が $Q(\alpha,\beta)$ の最小点となり、これ以外に最小点は存在しない。

(解答終)

9 n 変数実数値凹凸関数の制約付き最大化:ラグランジュ乗数法

ここでは 4.7 節の議論を一般化する. 学部の経済学の講義科目ではあまり出てこないが、ゼミなど、特に数学をよく使うゼミでは必要となるので、簡単に説明する. ここでは、2 変数を n 変数に一般化する. また等式制約も不等式制約へと一般化する.

前章同様に、5章・6章を読んでいなくてもある程度読めるように、定理の本文は2変数の偏微分の方法と同様の表記で書くこととする.

また、最小化問題ではなく最大化問題だけを取り扱った。というのも、関数 f の最小化問題は、関数 -f の最大化問題を解けばよいためである。また証明は長くなるので、この章の証明は bbb 節で行う (まだ書いてない)。

この節では 4 つの定理 (定理 $9.1 \cdot$ 定理 $9.2 \cdot$ 定理 $9.3 \cdot$ 定理 9.5) を説明するが,まずは 1 番目と 2 番めだけ 読めばよい.実際定理 9.3 は長い上に,実際の計算でも違う方法で計算可能だからである.その方法は,端点 である $x_i = 0$ の部分をあらかじめ計算しておいて,残りは 2 番目の定理で計算するというものである (命題 9.4 の証明を参考にするとよい).定理 9.5 は複数の制約式がある場合で,不等式と等式を混ぜて一般的に書いたものである.

よってまずは、最も簡単な定理9.1と、次の定理9.2の方法をマスターすることを目標とすると良い。

定理 9.1 開凸集合 $X\subset R^n$ で定義された n 変数実数値関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ が C^1 級かつ凹関数とする. n 個の定数 a_1,\cdots,a_n の少なくとも 1 つはで,b も定数として,等式制約付き最大化問題

$$\max_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n), \quad s.t. \ a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$$
(9.1)

について考える. (x_1, \dots, x_n) がこの問題の最大点となることは、ラグランジュ関数

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n - b)$$

$$(9.2)$$

を作ったときに、制約式を満たす (x_1, \cdots, x_n) が以下のラグランジュ条件を全て満たすことと、同値である.

(i). $i=1,2,\cdots,n$ について, $\frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1,\cdots,x_n,\lambda)=0$ つまり,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n - b)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda a_i = 0$$

- (ii). $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ (つまり制約式)
- (iii). 実数 λ が存在する.

上記のラグランジュ関数を,

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda [b - (a_1x_1 + \dots + a_nx_n)]$$

として, (i) を

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda a_i = 0$$

としても構わない. 経済学だとこちらにすることが多い.

次に、制約式が x_1, \dots, x_n の線形関数でない場合や、制約式を不等式に拡張する.

定理 9.2 開凸集合 $X\subset \mathbb{R}^n$ で定義された 2 つの n 変数実数値関数 $f(x_1,\cdots,x_n),g(x_1,\cdots,x_n)$ が、f,g と もに C^1 級かつ凹関数とする.

(i). 等式制約付き最大化問題

$$\max_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n), \quad s.t. \ g(x_1, \dots, x_n) = 0$$
(9.3)

について考える. (x_1, \dots, x_n) がこの問題の最大点となることは、ラグランジュ関数

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, \dots, x_n)$$

$$(9.4)$$

を作ったときに、制約式を満たす (x_1, \dots, x_n) が以下のラグランジュ条件を全て満たすことと、同値である.

(a) $i=1,2,\cdots,n$ について、 $\frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1,\cdots,x_n,\lambda)=0$ つまり、

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$

- (b) $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ (つまり制約式)
- (c) $\lambda > 0$
- (ii). 不等式制約付き最大化問題

$$\max_{x_1,\dots,x_n} f(x_1,\dots,x_n), \quad s.t. \ g(x_1,\dots,x_n) \ge 0$$

$$(9.5)$$

について考える. (x_1, \dots, x_n) がこの問題の最大点となることは、(i) と同じラグランジュ関数を作ったときに、制約式を満たす (x_1, \dots, x_n) が以下のラグランジュ条件を全て満たすことと、同値である.

(a) $i=1,2,\cdots,n$ について、 $\frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1,\cdots,x_n,\lambda)=0$ つまり、

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$

- (b) $g(x_1, \dots, x_n) \ge 0$ (つまり制約式)
- (c) $\lambda \geq 0$ かつ $\lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda g(x_1, \dots, x_n) = 0$

定理 9.2(i) が 2 変数の場合の拡張になっていることを確認すること.

経済学では変数の定義域が 0 以上の場合が多い.この場合の定義域は開凸集合ではない.全ての変数が正の範囲の集合は開凸集合である全てが正の場合では前定理からであり,さらに,境界点 (ある $i=1,\cdots,n$ について $x_i=0$ を満たす点) が最適になる場合の条件を加えたものとなっている.それが以下の定理である.

定理 9.3 $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \cdots, x_n \ge 0$ で定義された 2 つの n 変数実数値関数 $f(x_1, \cdots, x_n), g(x_1, \cdots, x_n)$ が、f, g ともに C^1 級かつ凹関数とする.

(i). このとき, 等式制約付き最大化問題

$$\max_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n), \quad s.t. \ g(x_1, \dots, x_n) = 0$$
(9.6)

について考える. (x_1, \dots, x_n) がこの問題の最大点となることは, (9.5) 式のラグランジュ関数を作ったときに、制約式を満たす (x_1, \dots, x_n) が以下のラグランジュ条件を全て満たすことと、同値である.

 $({\bf a}) \quad i=1,2,\cdots,n \ \text{について}, \ \ \frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1,\cdots,x_n,\lambda) \leq 0 \ \text{かつ} \ x_i \cdot \frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1,\cdots,x_n,\lambda) = 0 \ \text{つまり},$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} \le 0\\ x_i \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) = 0 \end{cases}$$

$$(9.7)$$

- (b) $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ (つまり制約式)
- (c) $\lambda > 0$
- (ii). このとき,不等式制約付き最大化問題

$$\max_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n), \quad s.t. \ g(x_1, \dots, x_n) \ge 0$$
(9.8)

について考える. (9.5) 式のラグランジュ関数を作ったときに、制約式を満たす (x_1, \dots, x_n) が以下の ラグランジュ条件を全て満たすことは、この (x_1, \dots, x_n) が制約付き問題の最大点となることと同値

- (a) (i) 同様に $i = 1, 2, \dots, n$ について, (9.7) 式が成り立つ.
- (b) $g(x_1, \dots, x_n) \ge 0$ (つまり制約式) (c) $\lambda \ge 0$ かつ $\lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda g(x_1, \dots, x_n) = 0$

この制約付き最大化問題の例として、高校で学んだ相加相乗平均の一般化を考えよう。相加相乗平均とは x,y が 0 以上のとき, $\frac{x-y}{2} \ge 2\sqrt{xy}$ が成り立つことである.これを n 変数に拡張したものが以下である.

命題 9.4 2 以上の整数 n について,n 個の実数 $a_i (i=1,\cdots,n)$ が全て 0 以上の時,

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \tag{9.9}$$

であり、等号が成り立つのは $a_1 = \cdots = a_n$ のときのみである.

注意: 定理 9.3 でも可能であるが、ここでは端点と内点を分けて考えることにより、定理 9.2 を用いて示し ている.

証明 まず,少なくとも 1 つの a_i が 0 のときを考える. $({ extstyle 9.9})$ 式の右辺は 0 となり左辺は 0 以上なので, (9.9) 式の不等号は成り立つ. 不等号が等号で成り立つのは $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ のみなのは明らかなの で,上の命題が成り立つ.

次に、全ての i について $a_i > 0$ のときを考える。 $x_i = a_i / \sqrt[3]{a_1 \cdots a_n}$ とすると、(9.9) 式は、

$$x_1 + \dots + x_n \ge n$$

と同値であり、また $x_1 \cdots x_n = 1$ が常に成り立ち、この式はこの両辺の対数を取れば、 $\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n) = 0$ と同値である. したがって,

$$\min_{x_1 > 0, \dots, x_n > 0} x_1 + \dots + x_n, \quad s.t. \ \ln(x_1) + \dots + \ln(x_n) = 0$$

の最小点が $x_1=x_2=\cdots=x_n$ で、最小値が n であることを示せばよい.最大化問題に直せば、

$$\max_{x_1 > 0, \dots, x_n > 0} -(x_1 + \dots + x_n), \quad s.t. \ \ln(x_1) + \dots + \ln(x_n) = 0$$

の最大点が $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のみで、最大値が-nであることを示せばよい.

 $-(x_1 + \cdots + x_n)$ も $\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n)$ も凹関数なので、定理 9.2 の (i) より、ラグランジュ関数

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = -(x_1 + \dots + x_n) + \lambda(\ln(x_1) + \dots + \ln(x_n))$$

を作ったときのラグランジュ条件は,

- (i). $i = 1, \dots, n$ について, $-1 + \lambda \cdot \frac{1}{x_i} = 0$
- (ii). $\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n) = 0$
- (iii). $\lambda > 0$

である. (i) からは $\lambda = x_i$ なので $\lambda > 0$ が得られて (iii) が成り立ち、かつ $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \lambda$ が言え る. (ii) に代入して $n\ln(\lambda)=0$ から、 $\lambda=1$. 結果として $x_1=\cdots=x_n=1$ かつ $\lambda=1$ が得られる. よって この制約付き最大化問題の最大点は $(x_1,\cdots,x_n)=(1,\cdots,1)$ のみであり,最大値は明らかに -n である. \square

今までは制約式が1本だけであったが、複数ある場合にして、最も一般的な形でまとめたものが以下である。

定理 9.5 開凸集合 $oldsymbol{X}\subset oldsymbol{R}^n$ で定義された n 変数実数値関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ と J 個の n 変数実数値関数 $g^{< j>}(x_1, \cdots, x_n)$ $(j=1,2,\cdots,J)$ と K 個の n 変数実数値関数 $h^{< k>}(x_1,\cdots,x_n)$ $(k=1,2,\cdots,K)$ があ り,1+J+K 個の関数全て, C^1 級かつ凹関数とする.このとき制約付き最大化問題

$$\max_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n), \quad s.t. \begin{cases} g^{< j>}(x_1, \dots, x_n) = 0 & (j = 1, \dots, J) \\ h^{< k>}(x_1, \dots, x_n) \ge 0 & (k = 1, \dots, K) \end{cases}$$
(9.10)

について考える. (x_1, \dots, x_n) がこの問題の最大点となることは、実数 $\lambda_1, \dots, \lambda_J$ と $\alpha_1, \dots, \alpha_K$ を用いて ラグランジュ関数

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_J, \alpha_1, \dots, \alpha_K) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^J \lambda_j g^{< j > }(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^K \alpha_k h^{< k > }(x_1, \dots, x_n)$$
(9.11)

を作ったときに、制約式を全て満たす (x_1, \dots, x_n) が以下のラグランジュ条件を全て満たすことと、同値で ある.

(i). $i = 1, 2, \dots, n \text{ kovt}$,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{J} \lambda_j \frac{\partial g^{< j>}}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \frac{h^{< k>}}{\partial x_i} = 0$$

(ii).
$$j = 1, \dots, J$$
 について、 $\lambda_j \ge 0$
(iii).
$$\begin{cases} g^{< j>}(x_1, \dots, x_n) \ge 0 & (j = 1, 2, \dots, J) \\ h^{< k>}(x_1, \dots, x_n) = 0 & (j = 1, 2, \dots, K) \end{cases}$$
 (つまり制約式)

(iv).
$$k=1,\cdots,K$$
 について, $\alpha_k \geq 0$ かつ $\alpha_k \frac{\partial L}{\partial \alpha_k} = \alpha_k h^{< k>}(x_1,\cdots,x_n) = 0$

10 凹凸不明の2変数実数値関数の極大化・極小化

関数が定義域で凹でないならば、前章のような最大化については一般論は言えない。同様に凸でないならば最小化についての一般論は言えない。そこで凹凸不明の場合の関数については、最大化・最小化ではなく極大化・極小化を考える。さらにn 変数関数だと面倒なので、2 変数関数で考えることとする。まずは1 変数関数の場合同様に、極大値と極小値の定義を行う。

定義 10.1 $X \in \mathbb{R}^2$ を定義域とする 2 変数実数値関数 $f(x_1, x_2)$ について,

(i). (c_1,c_2) が極大点 (resp. 極小点) であることは、 (c_1,c_2) のある δ 近傍,

$$B_{\delta}(c_1, c_2) = \{(x_1, x_2) | \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2} < \delta \}$$

があって、任意の $(x_1, x_2) \in B_{\delta}(c_1, c_2)$ について、

$$f(c_1, c_2) \ge f(x_1, x_2)$$
 (resp. $f(c_1, c_2) \le f(x_1, x_2)$) (10.1)

が成り立つことである. このときの $f(c_1, c_2)$ の値を極大値 (resp. 極小値) という.

(ii). (10.1) 式の不等式が \geq (resp. \leq) ではなく > (resp. <) で成り立つとき, (c_1,c_2) は狭義極大点 (resp. 狭義極小点) という.

┙

2 変数の場合の δ 近傍については,(4.2) 式で説明している.この定義は 1 変数の場合とほとんど変わりがないので問題はないであろう.

開集合で定義された C^2 級の 1 変数関数 f(x) について,c で f''(c) < 0(resp. f''(c) > 0) であることは,c のある近傍で f(x) が凹 (resp. 凸) であることの十分条件であった.これと同様のことを述べたい.まずは ヘッセ行列を定義する.

定理 10.2 開集合 $\mathcal{O} \in \mathbf{R}^2$ を定義域とする 2 変数実数値関数 $f(x_1,x_2)$ が定義域で C^2 級とする. このとき, i での偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ について,さらに x_j での偏導関数 $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ を, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ で表す.このとき,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

を f のヘッセ行列といい, $H(x_1,x_2)$ で表し,その行列式をヘシアンという.

経済学ではヤングの定理というが,以下が言える.

定理 10.3 $f(x_1,x_2)$ は前定理と同様とする. このとき、任意の x_1,x_2 で以下が成り立つ.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2)$$

証明は省略する (bbb 節).

例題 10.4 以下の 2 問についての $f(x_1, x_2)$ について、それぞれヘッセ行列を求めよ.

問
$$(1)f(x_1,x_2) = x_1x_2^2$$
 問 $(2)f(x_1,x_2) = x_1 + x_2^2$

(解答)問 (1) について; まずは $\frac{\partial f}{\partial x_1}=x_2^2, \frac{\partial f}{\partial x_2}=2x_1x_2$ を計算する.後はそれぞれを x_1,x_2 で偏微分して

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = 2x_1$$

が得られる.残りは $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ を x_2 で偏微分するか, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ を x_1 で偏微分して,どちらにしても, $2x_2$.以上より,

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2x_1 \\ 2x_1 & 2 \end{pmatrix}$$

間(2)についても同様の計算から,

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(解答終)

ヘッセ行列式と凹凸の関係は以下である.

定理 10.5 開集合 $\mathcal{O} \in \mathbf{R}^2$ を定義域とする 2 変数実数値関数 $f(x_1,x_2)$ が定義域で C^2 級とする. ある点 (c_1,c_2) でのヘッセ行列

$$H(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c_1, c_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c_1, c_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(c_1, c_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(c_1, c_2) \end{pmatrix}$$

について、以下の (a)(b) がともに成り立つとき、 (c_1,c_2) のある δ 近傍

$$B_{\delta}(c_1, c_2) = \{(x_1, x_2) | \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2} < \delta \}$$

があって、 $B_{\delta}(c_1,c_2)$ で $f(x_1,x_2)$ は狭義凸関数 (resp. 狭義凹関数) である.

- (i). $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c_1, c_2) > 0$ (resp. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c_1, c_2) < 0$)
- (ii). $\det(H(c_1, c_2)) > 0$

証明は省略する (bbb 節で). 従って, 凹凸不明の場合の極大値と極小値の定義と合わせれば, 以下が言える.

系 10.6 $f(x_1,x_2)$ は前定理と同じとする. ある c_1,c_2 が

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, c_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(c_1, c_2) = 0$$

を満たしかつ, 前定理の条件 (a)(b) を満たすとき, f は (c_1,c_2) で狭義極小 (resp. 狭義極大) となる.

例題 10.7 x,y の 2 変数関数 $f(x,y)=x^3+x^2y+y^2-2x$ について、極大値・極小値を求めよ.

(解答) f を x,y でそれぞれ偏微分して

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy - 2 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2y = 0$$

を解くと、 $(x,y)=(\pm 1,-1/2)$ の 2 点がこれを満たす. ヘッセ行列を求めると、

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x^2 + 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$$

これより,

$$H(\pm 1, -1/2) = \begin{pmatrix} 5 & \pm 2 \\ \pm 2 & 2 \end{pmatrix}$$
 (複合同順)

なので、(x,y) = (1,-1/2), (-1,-1/2) のどちらの場合でも、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 5 > 0, \quad \det(H(\pm 1, -1/2)) = 5 \cdot 2 - 4 = 6 > 0$$

なので、どちらも狭義極小点となる。 $f(\pm 1,1/2)$ をそれぞれ計算して、結局以下が結論となる。

(x,y)=(-1,-1/2) のとき、狭義極小値 3/4 をとり、(x,y)=(1,-1/2) のとき、狭義極小値 -5/4 をとる。 (解答終)

なおこの f(x,y) は,

$$\lim_{x \to \infty} f(x,0) = \infty, \lim_{x \to -\infty} f(x,0) = -\infty$$

であるから、最大値も最小値も取らないことが分かる.

11 凹凸不明の n 変数実数値関数の極大化・極小化

前章の、2 変数実数値関数の拡張である. 比較してほぼ同様に書けることを確認すると良い. ただし、定理 11.4 については、正値定符号行列と負値定符号行列の理論の理解が必要である. これについては、私の行列と 行列式 PDF を参考にすると良い. なお表記はベクトル形式で書き、証明は前章同様に行わない.

定義 11.1 $X \in \mathbb{R}^n$ を定義域とする n 変数実数値関数 f(x) について,

(i). $c \in X$ が極大点 (resp. 極小点) であることは、c のある δ 近傍、 $B_{\delta}(c) = \{x | |x-c| < \delta\}$ があって、任意の $x \in B_{\delta}(c)$ について、

$$f(c) \ge f(x)$$
 (resp. $f(c) \le f(x)$) (11.1)

が成り立つことである. このときの f(c) の値を極大値 (resp. 極小値) という.

(ii).

(iii). $c \in X$ が狭義極大点 (resp. 狭義極小点) であることは、c のある δ 近傍除外近傍、 $B_{\delta}(c) \setminus c = \{x \mid 0 < |x-c| < \delta\}$ があって、任意の $x \in B_{\delta}(c) \setminus c$ について、

$$f(\mathbf{c}) > f(\mathbf{x}) \quad (\text{resp. } f(\mathbf{c}) < f(\mathbf{x}))$$
 (11.2)

が成り立つことである.

┙

定理 11.2 開集合 $\mathcal{O}\in \mathbf{R}^n$ を定義域とする n 変数実数値関数 $f(\mathbf{x})$ が定義域で C^2 級とする. このとき, $i=1,\cdots,n; j=1,\cdots,n$ について, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_i}$ を (i,j) 成分においた n 次正方行列関数

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

を f のヘッセ行列といい,H(x) で表す,またその行列式 $\det(H(x))$ をヘシアンという.

2変数実数値関数同様に,以下が成り立つ.

定理 11.3 f(x) は前定理と同様とする. 任意の $i, j (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n)$ で以下が成り立つ.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

┙

証明は省略する (bbb 節). ヘッセ行列式と凹凸の関係は以下である.

定理 11.4 開集合 $\mathcal{O} \in \mathbf{R}^n$ を定義域とする n 変数実数値関数 $f(\mathbf{x})$ が定義域で C^2 級とする. ある点 \mathbf{c} でのヘッセ行列 $H(\mathbf{c})$ が正値定符号行列 (resp. 負値定符号行列) のとき, \mathbf{c} のある δ 近傍 $B_{\delta}(\mathbf{c}) = \{\mathbf{x} | |\mathbf{x} - \mathbf{c}| < \delta\}$ があって, $B_{\delta}(\mathbf{c})$ で $f(\mathbf{x})$ は狭義凸関数 (resp. 狭義凹関数) である.

証明は省略する (bbb 節で). 従って, 凹凸不明の場合の極大値と極小値の定義と合わせれば, 以下が言える.

系 11.5 f(x) は前定理と同じとする。ある c があって,H(c) が正値定符号 (resp. 負値定符号行列) のとき,f(x) は c で狭義極小 (resp. 狭義極大) となる。

12 積分の簡単な入門

学部のミクロ経済学・マクロ経済学などでは積分はほとんど出てこないので、上級に回した. しかしゼミによっては多少学ぶだろうし、統計学や計量経済学では必ず学ぶので、まずはここで簡単に紹介する. 1変数実数値の積分のより詳しいものは 18 章にて議論する.

12.1 曲線で囲まれる面積と定積分

まず,この節では以下の仮定をすることがあるので,書いておく.

仮定 12.1 有界閉区間 [a,b] で定義された 2 つの実数値関数 f(x),g(x) が、 [a,b] で $f(x)\geq g(x)$ とする. \Box

積分のもともとの動機とは、仮定 12.1 の f(x), g(x) について、xy 平面上の 4 つの曲線 y=f(x), y=g(x), x=a, x=b で囲まれる面積を求めたいということにある.

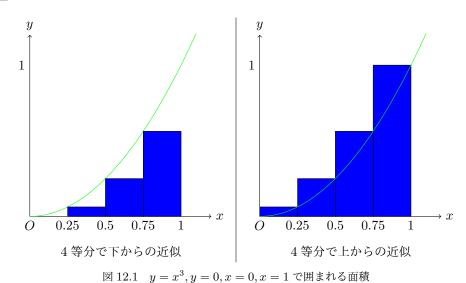
そこでまずは $f(x)=x^3, g(x)=0, a=0, b=1$ としてみよう。さて,長方形の面積は,縦の長さと横の長さの積である。コンピューターは 2 進法なので,m は正整数として [0,1] を 2^m 等分した数列 $x_i=i/2^m$ $(i=0,\cdots,2^m)$ を考えて,それぞれの区間 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,2^m)$ について,長方形の面積で近似する。図 12.1 は 4 等分で,図 12.2 は 4 等分の図に 8 等分の図を重ねたものである。

 2^m 等分したときの,下からと上からの長方形の面積の和を,それぞれ s_m, S_m とする.図 12.2 の左図より 4 等分と 8 等分を比べると, s_2 から s_3 は赤色の面積分だけ増加している.同じ図の右図より,4 等分と 8 等分を比べると, S_2 から S_3 へ青色の分だけ減少している.

同様に考えて、任意のmについて

$$s_m \le s_{m+1} \le S_{m+1} \le S_m$$

が常に成り立つ.



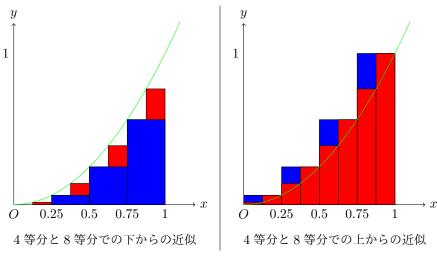


図 12.2 $y = x^3, y = 0, x = 0, x = 1$ で囲まれる面積

具体的には $y=f(x)=x^3, y=0, x=0, x=1$ で囲まれる面積が存在するならば、任意の m についての 区間

$$[s_m, S_m]$$

内に存在する. m が増加すると s_m は等しいか増加する. 一方 S_m は m が増加すると,等しいか減少する. 従って s_m, S_m ともに $m \to \infty$ で同じ数に収束するならば,それを面積として考えるのが良さそうである.実際以下の定理が知られている.

定理 12.2 m は正整数とする. 有界閉区間 [a,b] で定義された有界関数 f(x) について,

(i). [a,b] を 2^m 等分した各区間

$$I_i = \left[a + (i-1)\frac{b-a}{2^m}, a + i\frac{b-a}{2^m} \right] \quad (i = 1, 2, \dots, 2^m)$$

における, f(x) の上限と下限をそれぞれ $\sup_{I_i} f(x), \inf_{I_i} f(x)$ とする. S_m, s_m を

$$S_m = \sum_{i=1}^{2^m} \sup_{I_i} f(x) \cdot \frac{b-a}{2^m}, \quad s_m = \sum_{i=1}^{2^m} \inf_{I_i} f(x) \cdot \frac{b-a}{2^m}$$

とすると,以下が成り立つ.

$$s_m \le s_{m+1} \le S_{m+1} \le S_m$$

(ii). f(x) が [a,b] で連続の時,以下が実数で成り立つ.

$$\lim_{m \to \infty} s_m = \lim_{m \to \infty} S_m \tag{12.1}$$

証明は省略する (bbb 節で行う).

この定理の (12.1) 式の収束値が、定義 bbb で定義される、f(x) の a から b までの定積分

$$\int_{a}^{b} f(x)dx, \quad \int_{[a,b]} f(x)dx$$

の値となるのである. S_m, s_m の作り方から,定積分の値は負にもなりうるので,定積分の意味は,「x=a, x=b, y=f(x), x 軸で囲まれる符号付きの面積」と考えればわかりやすい. なおこの定理より,仮定 12.1 を満たす 2 つの連続関数 f(x), g(x) については,x=a, x=b, y=f(x), y=g(x) で囲まれる領域

$$\{(x,y)|a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x)\}$$

の面積が,

$$\int_{a}^{b} (f(x) - g(x)) dx$$

で得られる.

このように面積とは、極限値なのである.

では、上で例に上げた [0,1] における $f(x)=x^3$ について、定理の s_m,S_m を求めてみよう。 f(x) は狭義単調増加関数なので、a=0,b=1 での各 $I_i=[a+(b-a)(i-1)/2^m,(b-a)i)/2^m]$ で、

$$\inf_{I_i} f(x) = f\left(a + \frac{b-a}{2^m}(i-1)\right), \quad \sup_{I_i} f(x) = f\left(a + \frac{b-a}{2^m}i\right)$$

なので、a = 0, b = 1 を代入して

$$s_m = \sum_{i=1}^{2^m} f((i-1)/2^m) \cdot \frac{1}{2^m}, \quad S_m = \sum_{i=1}^{2^m} f(i/2^m) \cdot \frac{1}{2^m}$$

がいえる. ところで、たまたま今の場合さらに簡単にできて、

同様に

$$s_m = \frac{1 - 1/2^m}{4}$$

が言える.よって $m \to \infty$ のとき $A \to \infty$ だから, s_m, S_m ともに $\frac{1}{4}$ に収束しそうである.

実際 m=2,3,20 について, s_m,S_m の値を Sympy Live で書かせてみよう.m=2,3 とは図 12.2 の 4 等分・8 等分の値になる.Sympy Live ではデフォルトで,文字,m は整数扱いされ,文字 f,g,h は関数扱いされる.よって単に,以下のコードを順に打ち込むとよい.最後の 2 行は evalf() によって,小数で表示したものである.

g=(1-1/2**m)/4

h=(1+1/2**m)/4

g.subs(m,2)

h.subs(m,2)

g.subs(m,3)

h.subs(m,3)

g.subs(m,20)

h.subs(m,20)

g.subs(m,20).evalf()

h.subs(m,20).evalf()

定積分 $\int_a^b f(x)dx$ の計算方法を述べるために、まずは原始関数を定義する.

定義 12.3 区間 I で定義された関数 f(x) について,F'(x)=f(x) となる F(x) を,f(x) の原始関数という.

命題 12.4 以下の C は、任意の定数である。x の 1 変数実数値関数の原始関数について、以下が成り立つ。

(i).
$$x^n$$
 の原始関数は、
$$\begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C & \text{ (if } n \neq -1) \\ \ln(x) + C & \text{ (if } n = -1) \end{cases}$$

(ii). e^x の原始関数は, $e^x + C$

このような C を積分定数という. 原始関数を用いて以下が言える.

定理 12.5 [a,b] で定義された連続関数 f(x) と、その原始関数 F(x) によって、以下が常に成り立つ。

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

証明は面倒なので,これについては次節でイメージによる説明を行う.

手計算の場合は間に $[F(x)]_a^b$ を挟んで書くとよい. 先の 1/4 の導出を例にすると以下である.

$$\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1$$

$$= \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

定積分の積分定数 C は書く必要はない. C=0 と考えればよい. というのも, $C\neq 0$ の場合でも結局

C=0 の場合と同じになるからである。実際上の場合では、

$$\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} + C \right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1^4}{4} + C \right) - \left(\frac{0^4}{4} + C \right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

定理 12.5 から,定積分は f(x) < 0 のときでも求めることができる. $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$ と同様の計算で,

(i).
$$\int_{-1}^{0} x^{3} dx = -\frac{1}{4}$$

(ii).
$$\int_{-1}^{1} x^{3} dx = 0$$

(ii).
$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$

が成り立つ. このことからも、定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は、y=f(x),y=0,x=a,x=b で囲まれる「符号付きの 面積」を表すと解釈できる.

例えば [0,1] で定義された関数 $f(x)=x,g(x)=x^2$ は、定義域で $f(x)\geq g(x)$ である. よって y=f(x), y = g(x), x = 0, x = 1 で囲まれる面積は、以下で求められる.

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{6}$$

また $\int_a^b f(x) dx$ が存在するならば,[a,b] 内の任意の c < d について, $\int_c^d f(x) dx$ が存在するのは明らかで

定積分で原始関数の関係から、積分区間無しで ∫ マークをつけたものを不定積分という.

定義 12.6 区間で定義された関数 f(x) の原始関数を F(x) とするとき,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

で表し、左辺を f(x) の不定積分とよぶ.

定積分で原始関数が出てくるイメージ

ここではあくまで、イメージを語ることとし、証明はしない.

[a,b] で定義された連続関数 $f(x) \ge 0$ について、 $t \in [a,b]$ について、y = f(x), y = 0, x = a, x = t で囲ま れる面積は $\int_a^t f(x)dx$ である. これを S(t) とする. h>0 として, y=f(x), y=0, x=t, x=t+h で囲ま れる面積は S(t+h)-S(t) であらわされるが,これは区間 [t,t+h] での f(x) の上限値 $\sup_{x\in[t,t+h]}f(x)$ と,同 区間の下限値 $\inf_{x \in [t,t+h]} f(x)$ を用いると,

$$h \cdot \inf_{x \in [t, t+h]} f(x) \le S(t+h) - S(t) \le h \cdot \sup_{x \in [t, t+h]} f(x)$$

が言える. h > 0 なので、上の式は以下と同値であり、

$$\inf_{x \in [t, t+h]} f(x) \le \frac{S(t+h) - S(t)}{h} \le \sup_{x \in [t, t+h]} f(x)$$

 $h \to +0$ を考えて

$$f(t) \le \lim_{h \to +0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} \le f(t)$$

つまり, $\lim_{h\to +0} \frac{S(t+h)-S(t)}{h} = f(t)$ となる.h<0 のときも同様に考えて,結局 S'(t)=f(t) が言える. よって,S(t) は,S'(t)=f(t) を満たすものであり,x で表せば,S(x) は f(x) の原始関数でかつ S(a)=0 である.f(x) の原始関数の 1 つを F(x) とすると,ある定数 C で

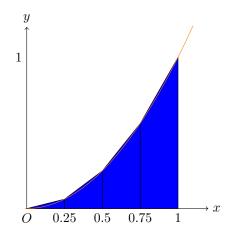
$$S(x) - F(x) = C$$

と表される。これより S(b)-F(b)=S(a)-F(a) が言える。S(a)=0 から S(b)=F(b)-F(a) がいえる。よって、 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ が言えた。

12.3 VBA で定積分の近似値を求める.

Excel VBA について簡単に述べておこう.まず Alt キーを押しながら F11 キーを押すと,Excel にある Visual Basic Editor が立ち上がる.挿入>標準モジュール を選択すると,真っ白なシートが開いてそこに プログラムを書いていくのである.このレジュメでの VBA コードについては値を返す function と値を返さ ない sub の 2 種類を利用する.実行方法は以下で示す.保存するときは,マクロ有効ブックの形式で保存すること.

では、まずは a,b,n,m を所与 (a < b) として、 $\int_a^b x^n dx$ の近似値を求めるプログラムを紹介する.ここでは [a,b] を 2^m 等分ではなくて m 等分として近似し、上からの近似と下からの近似の、2 つの平均値を返すとする.つまり、m 個の台形で近似するのである.図 12.1 の 4 等分の場合では、



となる. $f(x)=x^n$ で, $i=0,1,\cdots,m$ について $x_i=a+\frac{b-a}{m}\cdot i$ とすると, 求める値は, m 個の台形の和

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \{ f(x_{i-1}) + f(x_i) \} \frac{b-a}{m} = \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) \right\} \frac{b-a}{m}$$

なので、以下のような VBA プログラムで値が得られる. 標準モジュールに書き込むとよい.

```
Function intabxn(a, b, n, m)
   Dim x, S, i
   S = 0
   For i = 1 To m - 1
        x = a + (b - a) * i / m
        S = S + x ^ n
   Next i
   intabxn = (S + a ^ n / 2 + b ^ n / 2) * (b - a) / m
```

End Function

ワークシート上で、=intabxn(0,1,3,4) と入力すれば、図 12.1 の左の青色部分の面積と、右の青色部分の面積の平均値が得られる。=intabxn(0,1,3,1000) と 1000 等分すれば、ほぼ $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$ とほぼ同様の値がでてくるであろう。n>0 のいろいろな x^n について、=intabxn(0,1,n,m) で m を十分大きくとった場合、 $\int_0^1 x^n dx$ が理論値 $\frac{1}{n+1}$ に近づくことを確認するとよい。

また,b>1 として, $\int_1^b \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^b = \ln(b)$ が理論値なので,1 から2 までを1000 等分して得られる近似値=intabxn(1,2,-1,1000) が,理論値 $\ln(2)$ (約0.693147) と近くなることを確認すること.

次に無理数 π の近似値を求めてみる. π の定義を半径 1 の円の面積とする. まず xy 平面上に原点中心の単位円 $x^2+y^2=1$ を書いて, $x\in[0,1]$ で考える.

 $x^2+y^2=1$ を $y\geq 0$ で書き直した場合, $y=\sqrt{1-x^2}$ なので, [0,1] で定義された関数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ について, y=f(x), y=0, x=0, x=1 で囲まれた面積を考える.

その 4 倍が π ということになる。ではその面積が存在しているとして,長方形の和として,上からと下からで近似する。[0,1] の切り分け方は前節同様 m 等分とする。今度は関数ではなくてインプットボックスで m を入力して,下からの近似・2 つの平均値・上からの近似値の 3 つを表示するものとする。 pi_test1 という名前で以下のようなコードで実行できる。

```
Sub pi_test1()
    Dim m, S, i
    m = CLng(InputBox("正整数 m を入力せよ"))
    S = 0
    For i = 1 To m - 1
        x = i / m
        S = S + Sqr(1 - x * x)/m
    Next i

maxS = S + Sqr(1 - 0 * 0) / m
    minS = S
    MsgBox 4 * minS & vbCr & 4 * (maxS + minS) / 2 & vbCr & 4 * maxS
End Sub
```

Sqr は VBA で平方根を返す関数である. 今はどのように Sqr 関数が得られるかは考慮しないで、この関数を用いる. Excel のシート上で平方根を返す関数は sqrt 関数なので気を付けること. このプログラムはワー

クシートには何も書き出さないので、Visual Basic Editor 上で実行させても不都合はない。そこで、矢印キーでカーソールをプログラムを書いた標準モジュールの、Sub pi_test() の行と End Sub の行の間に持ってきて、F5キーを押すとよい。するとプログラムが実行される。

理論的には $m \to \infty$ で maxS の値も minS の値も同じ値に収束し,その 4 倍が π である.実際 m=1000 として四捨五入すれば 3.14 あたりまでは正しい近似となっている.しかし π のよりよい近似については,別の方法を考えた方がよさそうである.その方法は別の章で述べる.

12.4 Python で前節の定積分の近似値を求める.

まず有効桁数 20 ケタで (21 桁目を四捨五入) π の近似値を Python で求めてみよう. Sympy Live で

pi.evalf(20)

と打ち込むと得られる.

次に前節の intabxn と同じ動きをするものを書いておこう. これは Sympy Live で直接打ち込むのは面倒なので、適当なテキストエディターなどで、以下のコードを打ち込み、

```
def intabxn(a, b, n, m):
    S=0
    for i in range(1,m):
        x=a+(b - a)*i/m
        S+=x**n
    return (S+a**n/2+b**n/2)*(b-a)/m
```

コピーし、Sympy Live 上に貼り付けて、Enter する. 何もエラーメッセージがでなければ、intabxn(a, b, n, m) という関数が正しく読み込まれたことを意味する. その後、コンソール上で、intabxn(0,1,3,1000) と打ち込めば、m=1000 とした場合の、図 12.1 の左の青色部分の面積と、右の青色部分の面積の平均値が得られる.

次に前節 pi_test1 と同様のものを Python で書く.

- (i). エディターで以下のコードを書き、保存し、その後コンソールで実行する. コンソール上 $pi_test1(100)$ と入力して Enter すれば、100 等分したときの、3 つの値が表示される.
- (ii). 1000 だと大きすぎて Sympy Live では Time Out になってしまうことがある。大きい値 (といってもせいぜい 10 万前後) を使いたい場合は、組み込みの python を利用するとよい。コンソールで最初にfrom sympy import * と入力して Enter した後に、下のコードをコンソールにコピーして貼り付けて、Enter を 2 回押す。その後コンソールに、pi_test1(1000) と入力した後に Enter するとよい。

```
def pi_test1(m):
```

```
S=0
for i in range(1,m):
    x=i/m
    S+=sqrt(1-x**2)/m
maxS=S+1/m
```

```
minS=S
```

print((4*minS).evalf(),(4*(maxS+minS)/2).evalf(),(4*maxS).evalf())

13 動学的最大化入門 (有限な離散時間)

13.1 経済学的な例題: 大学生の最適時間選択

経済学では、制約付き最大化問題を解くことが重要とは何回か話した。ここでは時間 t が $t=1,2,\cdots,T$ と、ある大きな T が存在して、そのときに、制約付き最大化問題を解くことを考える。

大学1年次は終わっているだろうから、今は大学2年生の4月とする.

例えば、t = 2.3.4 年次の 4 月に、それぞれ以下の決断をし、1 年間実行する.

- まず、全生活時間に占める勉強時間の割合がそれぞれ $s_t \in [0,1]$ とする. 睡眠時間を含む自由時間の割合は、その残りとし $1-s_t$ とする.
- t年生から t+1年生に進級できる確率 p_t は

$$p_t = 4(1 - s_t)s_t \cdot s_{t-1}$$

となるとする.

- なお 1 年次の勉強量 s_1 はすでに終わっているので $s_1 = a \in (0,1)$ とする. $s_t \in [0,1]$ なので、確率 $p_t \in [0,1]$ であり、0 を下回ったり 1 を超えたりする心配はしないでよい.
- $(1-s_t)$ が掛かっているのは、まったく寝ないで勉強することはあまり意味がないということを意味している。また s_{t-1} は前年の勉強の蓄積を意味し、過去 1 年間に勉強していればしているほど、次年度への進級確率が高くなるとする。
- 次年度に進めなければ退学とする。2年次の4月において、卒業する確率を、

$p_2p_3p_4$

とし、これを最大化するのが、2 年次 4 月時点の最適問題である。よって、最適な s_2, s_3, s_4 を選ぶのが目的である。

では解き方について考えよう. まずある p_t が 0 になった場合を考える. $p_2p_3p_4=0$ である. 次に全ての $p_t>0$ の場合を考える. 上の問題の対数を取って,

$$\ln(p_2) + \ln(p_3) + \ln(p_4) \tag{13.1}$$

を最大化したい.

これを解く方法として有力なのが、後ろ向き帰納法 (backward induction) というものである. 基本的には「いつもここから最適化」という考え方で行う.

- (i). まず t 期について、状態変数 s を定める. t-1 期までで得られた実数であり、t 期において操作できないものとする。今の場合それは t-1 期での勉強時間 s_{t-1} のことである。
- (ii). 最後の第 4 期から最大化する. 4 年次 4 月の状態評価関数 $J_4[s]$ を,

$$J_4[s] = \max_{s_4 \in [0,1]} \ln(p_4)$$

と定義する. s を所与として、4 年次の最初に最適な s_4 を決めて実行するのである. s や s_1, s_2, s_3 や は過去の値なので、気にすることはない. 4 年次 4 月に「ここから最適化」を行うのである.

(iii). $\ln(p_4)$ を直して、 $s_3 = s$ を代入して

$$J_4[s] = \max_{s_4 \in [0,1]} (\ln 4 + \ln(1 - s_4) + \ln(s_4) + \ln(s))$$

目的関数は s_4 に関して凹関数なので「微分=0」で解くと、

$$\frac{-1}{1 - s_4} + \frac{1}{s_4} = 0$$

 $s_4 = 1/2$ が最適. $J_4[s]$ に代入して

$$J_4[s] = \ln(s)$$

(iv). 次に, $J_3[s]$ を求める. この s は第 2 期の勉強時間である. 最大化したい関数の (13.1) 式の形から, 3 期の状態評価関数は,

$$J_3[s] = \max_{s_3 \in [0,1]} (\ln(p_3) + J_4[s_3])$$

となる. 4 期のときにはすでに最適化が終わっているので、3 期のときに s_3 を選ぶ目的関数がこれになる. J_4 の中が s_3 となっているのは J_4 の中の s とは、今から選ぶ s_3 の値そのものだからである. $p_3=4(1-s_3)s_3s$ なので書き下すと、

$$J_3[s] = \max_{s_3 \in [0,1]} (\ln 4 + \ln(1 - s_3) + \ln(s_3) + \ln(s) + \ln(s_3))$$

 s_3 について凹関数なので「微分 = 0」で

$$\frac{-1}{1-s_3} + \frac{2}{s_3} = 0$$

を解いて、 $s_3=2/3$ が最適. 上の式に代入して

$$J_3[s] = \ln(s) + 4\ln 2 - 3\ln 3$$

(v). 第2期を考える.

$$J_2[s] = \max_{s_2 \in [0,1]} (\ln(p_2) + J_3[s_2])$$

なので, 今まで同様に書き下して

$$J_2[s] = \max_{s_2 \in [0,1]} (\ln 4 + \ln(1 - s_2) + \ln(s_2) + \ln(s_2) + \ln(s_2) + 4\ln 2 - 3\ln(3))$$

 s_2 について凹関数なので「微分 =0」で求めると、3 期同様やはり $s_2=2/3$ が最適. 上の式に代入して、

$$J_2[s] = \ln(s) + 8\ln(2) - 6\ln(3)$$

今の場合は、2 年次 4 月時点での、最適卒業確率である。まず今の $J_2[s]$ の s に、1 年次の勉強量 a を代入して

$$J_2[a] = \ln(a) + 8\ln(2) - 6\ln(3)$$

が得られる.

(vi). 以上より $s_2=s_3=2/3, s_4=1/2$ が、これが対数を取ったときの問題 (13.1) 式の最適解である。元々の確率の対数なので、2年時の 4 月時点で見込める卒業確率は、 $J_2[a]$ の指数関数を取って、

$$e^{(J_2[a])} = a \cdot 2^8 / 3^6$$

最適解が $s_2=s_3=2/3, s_4=1/2$ となるのは意外であっただろう。それは、卒業後のことを考慮していないからである。 s_4 が増加すれば卒業後に何かしら良いことが起こるということが関数に入っていれば、最適な s_4 の値は今より大きくなったことであろう。

進級確率 p_t の最後にかかっているもの前年のみというのは、現実性に欠けるかもしれない。そこで 1 年からそれまでの平均を最後に掛けると、

$$p_t = 4(1 - s_t)s_t \sum_{i=1}^{t-1} s_i/(t-1)$$

となる. これも同様にして動学的最大化問題として解けるが、手計算はなかなか厳しい.

そこで PC を利用する. $p_t=4(1-s_t)s_ts_{t-1}$ の場合も含めて、ゼミでは Excel のソルバーを使って、答えが出てくるかどうか調べることとする.

13.2 動学的最大化は目的関数が凸でも可能

M>0 とする. n 変数の制約付き最大化問題

$$\max_{x_1 > 0, \dots, x_n > 0} (x_1^2 + \dots + x_n^2), \quad s.t. \ x_1 + \dots + x_n = M$$

を考えると、目的関数は凸関数なので、前章のラグランジュ乗数法では簡単には求めることはできない。

そこで $1,2,\cdots,n$ を時間とみて,動学的最大化問題として解くことにする. $x_0=0$ を作り,t 期の状態変数 s を $s=\sum_{i=0}^{t-1}x_i$ とする.どの期においても,明らかに $s\leq M$ である.

(i). n 期の状態評価関数 $J_n[s]$ は

$$J_n[s] = \max_{0 \le x_n \le M - s} x_n^2, \quad s.t. \quad s + x_n = M$$

である. これは $x_n=M-s$ しかありえず,これが最適解であり,代入して $J_n[s]=(M-s)^2$ が言える.

(ii). n-1 期の状態評価関数 $J_n[s]$ は、目的関数の形から、

$$J_{n-1}[s] = \max_{0 \le x_{n-1} \le M-s} (x_{n-1}^2 + J_n[s + x_{n-1}])$$
$$= \max_{0 \le x_{n-1} \le M-s} \{x_{n-1}^2 + (M - s - x_{n-1})^2\}$$

と書ける。 $x^2+(M-s-x)^2$ は x についての凸関数なので,この最大化については単に微分=0 をしてはいけない。 実際 $y=x^2+(M-s-x)^2$ でグラフを書けばわかるように,微分=0 の点 x=(M-s)/2 で最小値をとるのである。従って, x_{n-1} の最大点は,結局 $x_{n-1}=0$ または M-s である。その結果どちらにせよ $J_n[s]=(M-s)^2$ となる.

- (iii). 以下同様にして,n-2 から 1 までの t について最適解を求めると,どの t についても, $x_t=0$ または M-s のとき最適で, $J_t[s]=(M-s)^2$ が言える.
- (iv). よって $J_1[s]=(M-s)^2$ であり, $s=x_0=0$ を代入した $J_1[0]=M^2$ が最適値となる.以下では最適解を求める.
- (v). (iii) より第 1 期から第 n-1 期までの n-1 個の x_t について、複数の期の最適解が M になることはない。それは制約条件に反するためである。

- (vi). 1 期から n-1 期までのどれか 1 つの i について $x_i=M$ となった場合は,残りの n-2 個の x_t の最適解は 0 である.このとき,n 期の状態変数 s の値は M となるので, $x_n=M-s$ に s=M を代入して, $x_n=0$ が最適となる.
- (vii). 後は 1 期から n-1 期までの 1 つも M にならない場合,すなわち全て 0 である場合のみ考える.この 時 n 期の状態変数 s の値は 0 となるので, $x_n=M-s$ に s=0 を代入して, $x_n=M$ が最適.
- (viii). 以上より,最適解は,1 から n までのある一つの整数 i について $x_i = M$ となり,残りの i については $x_i = 0$ となるものが最適である.よって n 通りの最適解が存在する.

M=1として、これもゼミで Excel のソルバーで解いてみる。近似値は得られるが、単に 1 組のみ得られ、全ての解は得られないことに気を付けなければならない。 PC は決して万能ではないので、考察とともに使わなければならない。

13.3 相加相乗平均の証明

この定理はすでに証明しているのだが、動学的最大化問題として解いてみる。端点解は省略して、添字を t に変える。問題は

$$\max_{x_1 > 0, \dots, x_n > 0} -(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \quad s.t. \quad \prod_{t=1}^{n} x_t = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$$

であった. $x_0 = 1$ を作って, $t = 1, \dots, n$ 期について, t 期での状態変数 s を

$$s = \prod_{i=0}^{t-1} x_i$$

と x_0 から x_{t-1} までの積とする. このとき,以下の様に解ける.

(i). まずn期の状態評価関数は

$$J_n[s] = \max_{r > 0} (-x_n), \quad s.t. \ s \cdot x_n = 1$$

である. これは $x_n = 1/s$ しかありえないので、それが最適であり、

$$J_n[s] = -1/s$$

(ii). 次に, n-1期の状態評価関数を求める.

$$J_{n-1}[s] = \max_{x_{n-1}>0} \left(-x_{n-1} + J_n[s \cdot x_{n-1}] \right)$$
$$= \max_{x_{n-1}>0} \left\{ -x_{n-1} - \frac{1}{sx_{n-1}} \right\}$$

 x_{n-1} について凹関数なので「微分=0 より」 $x_{n-1}=1/\sqrt{s}=s^{-1/2}$ が最適. よって,

$$J_{n-1}[s] = -2/\sqrt{s} = -2s^{-1/2}$$

(iii). 次に, n-2 期の状態評価関数を求める.

$$J_{n-2}[s] = \max_{x_{n-2}>0} \left(-x_{n-2} + J_{n-1}[s \cdot x_{n-2}] \right)$$
$$= \max_{x_{n-2}>0} \left\{ -x_{n-2} - \frac{2}{\sqrt{sx_{n-2}}} \right\}$$

 x_{n-2} について凹関数なので「微分=0 より」

$$-1 - \frac{2}{\sqrt{s}} \cdot \frac{-1}{2} x_{n-1}^{-3/2} = 0$$

計算して $x_{n-2}=s^{-1/3}$ が最適. このとき $J_{n-2}[s]=-3s^{-1/3}$

- (iv). 同様に解いていき, $k=1,2,\cdots,n-1$ について $x_{n-k}=s^{-1/(k+1)}$ が最適である.状態評価関数は $J_{n-k}[s]=-(k+1)s^{-1/(k+1)}$ となる (正式には数学的帰納法より).
- (v). よって $J_1[s] = -ns^{-1/n}$ となる. これに初期値 $s=x_0=1$ を代入すると、最大化問題の最適値 $J_1[1]=-n$ が得られる. 最適解については以下の順で得られる.
 - (a) t=1 の場合を考える. 最適解の式 $x_{n-k}=s^{-1/(k+1)}$ に, k=n-1 と s=1 を代入して, t=1 の最適解 $x_1^*=1$ が最適解.
 - (b) t=2 の場合を考える. 最適解の式に k=n-2 と $s=x_1^*=1$ を代入して, t=2 の最適解 x_2^* は 1 が最適解.
 - (c) t=3 の場合を考える. 最適解の式に k=n-3 と $s=x_1^*x_2^*=1$ を代入して, t=3 の最適解 x_3^* も 1 が最適解.
 - (d) 以下同様にして、 x_1 から x_{n-1} まで、最適解が全て 1 となる.この時 n 期の状態変数 s はそれらの積なので s=1 となり、 $x_n=1/s$ に代入して、 x_n の最適解も 1.したがって全て 1 が最適解であり、この時確かに最適値 -n が達成される.

このように、ラグランジュ乗数法と全く同様の結果が得られた.

n に具体的な整数を与えれば、Excel のソルバーで最適解の近似値が得られる.

第川部

Ⅱ部より簡単で、たまに出会うもの

この III 部では、経済学ではあまり出てこないが過去 40 年で高校数学に入っていたものを中心に概観する. もちろん全てが入っていたわけではないが、そう難しいものでもないので、気楽に読んでほしい.

また、この III 部では、k, m, n は正の整数とする.

14 行列入門 (2×2まで)

14.1 数ベクトルと行列: 定義と和と定数倍

数ベクトルや行列については、このレジュメはあくまで入門である、もう少し詳しくは、

http://www.ic.daito.ac.jp/~tkadoda/math/index.htm

の[1] 行列と行列式を参照するとよい. なお, この章でのベクトルとは, 以下の様に, 数を縦に並べた列ベクトルと, 横に並べた行ベクトルに限定する.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

左は 2 次の列ベクトル, 右は 2 次の行ベクトルという. 日本ではこのような () でくくる. 他の国では [] で表すところもある.

さらに拡張して、縦に m 個横に n 個並べたものを m 行 n 列の行列や $m \times n$ の行列という. $n \times n$ の行列は n 次正方行列という. 2 次正方行列ならば、例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

などがあげられる. 行列の内部の数字を, 成分または要素という.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

としたときに、 \mathbf{A} の (1,1) 成分とは、 \mathbf{A} の 1 行 1 列の数字のことであり、今の場合 1 である。 \mathbf{A} の (1,2) 成分が 2、(2,1) 成分が 3、そして (2,2) 成分が 4 である。

2 つの行列 \pmb{A}, \pmb{B} について, $\pmb{A} = \pmb{B}$ と書かれた時には, \pmb{A}, \pmb{B} ともに同じ行列の形 $(m \times n)$ であり,かつ各成分が等しいことを表す.例えば

$$\binom{1}{2} = \binom{10x}{5y} \longleftarrow 1 = 10x, \quad 2 = 5y$$

2 つの行列の和は、行列のサイズが同じときのみ計算可能とする. 計算方法は、各成分の和をとる. 上の A については、

$$\mathbf{A} + \begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 300 & 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 300 & 400 \end{pmatrix} + \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 101 & 202 \\ 303 & 404 \end{pmatrix}$$

また行列 \boldsymbol{X} と、数 a の積は、 \boldsymbol{X} 各成分に数 a を掛けたものとする.上の \boldsymbol{A} の場合

$$5\mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot 5 = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$$

14.2 2つのベクトルの積

n 次行ベクトル a と n 次列ベクトル x の積は、各成分の積和とする、つまり

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow ax = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \sum_{i=1}^n a_ix_i$$

例えば、
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
 とすると、

$$bc = 10 \cdot 3 + 20 \cdot 4 = 110$$

となることを確認せよ.

また $m \neq n$ のとき,m次行ベクトルaとn次列ベクトルxについては,axは計算不能である.

14.3 行列の積

 $m \times n$ の行列 ${\bf A}$ と $n \times k$ の行列 ${\bf B}$ については,積 ${\bf AB}$ は計算可能とする. 積は $m \times k$ の行列となる. つまり ${\bf C} = {\bf AB}$ とするとき, ${\bf C}$ は $m \times k$ の行列であり, $i=1,2,\cdots,n$ と $j=1,2,\cdots,k$ について, ${\bf C}$ の (i,j) 成分は, ${\bf A}$ の i 行目の行ベクトルと ${\bf B}$ の j 列目の列ベクトルの積である. 2×2 の場合を例に書こう.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} (10 & 20) \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} & (10 & 20) \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ (30 & 40) \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} & (30 & 40) \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 10a + 20c & 10b + 20d \\ 30a + 40c & 30b + 40d \end{pmatrix}$$

 2×2 と 2×1 の行列についても述べておこう.上の A と, $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ については積 Ax は 2×1 の行列 (つまり列ベクトル) となり,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} (10 & 20) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ (30 & 40) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 10u + 20v \\ 30u + 40v \end{pmatrix}$$

行列の積は、積の順序を交換してはいけない. 例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

実際左辺と右辺はそれぞれ以下となる.

$$\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

14.4 単位行列:積と逆行列

n 次正方行列 $\bf A$ について, $\bf A$ の (i,i) 成分 $(i=1,2,\cdots,n)$ を, $\bf A$ の対角成分といい,それ以外の成分を非対角成分と呼ぶ.

n次正方行列で対角成分が1で非対角成分が0のものを,単位行列という.2次の単位行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である.単位行列は,実数で言うと 1 にあたる役割と似ている.ある実数に 1 を掛けても変化しない.それと同様の働きを持つ.

まずn次正方行列 \mathbf{I}_n と $n \times m$ の行列 \mathbf{A}_{nm} の積 $\mathbf{I}_n \mathbf{A}_{nm}$ は計算可能であり、

$$I_n A_{nm} = A_{nm}$$

が成り立つ. また $k \times n$ の行列 \boldsymbol{B}_{kn} について、積 $\boldsymbol{B}_{kn}\boldsymbol{I}_n$ も計算可能で

$$oldsymbol{B}_{kn}oldsymbol{I}_n=oldsymbol{B}_{kn}$$

が成り立つ. $2 \times 1 \times 2 \times 2$ の場合を見てみると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$$

実数 a について $a \neq 0$ のときに,ab = ba = 1 となる b を a の逆数と言い a^{-1} であらわした.行列でも同様に定義する.

定義 14.1 I は n 次単位行列, A は n 次正方行列とする. このとき,

$$AB = BA = I$$

となる B が存在するとき、これを A の逆行列といい、 A^{-1} で表す.

a=0 のときに逆数が存在しないように、逆行列も数字によっては存在しない場合もある。 2×2 の場合は簡単で、

$$ad - bc \neq 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

が知られている. ad-bc=0 のときは, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は存在しない.

14.5 逆行列と連立方程式

a,b,c,d,u,v が実数定数で、x,y についての連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases} \tag{14.1}$$

を中学のころ解いたことであろう. これを行列で解くことにする. 上の式を行列であらわすと,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

となる. $ad-bc \neq 0$ ならば、両辺の左から逆行列を掛けて

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

両辺それぞれ計算すると,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{14.2}$$

例えば定数 a, b が $a^2 + b^2 = 5$ で

$$\begin{cases} ax + by = 10 \\ -bx + ay = 20 \end{cases}$$

のときは,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a \cdot a - b \cdot (-b)} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} a \cdot 10 - b \cdot 20 \\ b \cdot 10 + a \cdot 20 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10a - 20b \\ 20a + 10b \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2a - 4b \\ 4a + 2b \end{pmatrix}$$

が言える。このように文字のままの時などは、今まで学んだ方法よりも、行列で計算した方が分かりやすい。 また ad-bc=0 のときは、連立方程式 (14.1) 式の解は、存在しないか、解が無数にあるかのどちらかとなる。

また (14.2) 式の続きをかくと,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} du - bv \\ -cu & av \end{pmatrix}$$
$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} u & b \\ v & d \\ \det \begin{pmatrix} a & u \\ c & v \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

と, 行列式の比で書くことができる. これをクラメールの公式という.

命題 14.2 (クラメールの公式) x,y の連立方程式 (14.1) 式について, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする. $\det(A)\neq 0$ のとき,

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} u & b \\ v & d \end{pmatrix}}{\det(A)}, \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} a & u \\ c & v \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

┙

14.6 平面ベクトルの定義と、平行・内積・垂直

まず平面ベクトルを定義しよう. 2点 $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ があるときに、ベクトル \overrightarrow{AB} を

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \tag{14.3}$$

とする. したがって任意の点 A, B, C について,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

が成り立つ。2つの平面ベクトルがあり,一方が他方の定数倍になっているときに,2つの平面ベクトルは平行であるという。例えば,あるsが存在して,

$$\overrightarrow{AB} = s \overrightarrow{CD}$$

ならば, \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{CD} は平行である.従って $0 \le s \le 1$ について $\overrightarrow{AP} = s \overrightarrow{AB}$ が成り立つなら,P は線分 AB 上にあることを確認すること.

また上の式をもう少し一般的に書けば、以下の(i)(ii)が同値であることが分かる.

(i).
$$s=t=0$$
 以外で $s\overrightarrow{AB}'+t\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} 0\\0 \end{pmatrix}$ となる s,t が存在する

(ii). 3 点 A, B, C はある直線上にある (同じ点になっていることも含む)

この (i) は $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ としたときに, $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ と同値であることが,少し計算するとわかる.

平面ベクトルの内積を定義しよう. これは単なる積和である.

定義 14.3 2 つの平面ベクトル $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ について,その積和 $a_1b_1 + a_2b_2$ を \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OB} の内積と言い $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ であらわす.つまり,

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = a_1b_1 + a_2b_2$$

_

原点Oと $A(a_1,a_2)$ の距離は、ピタゴラスの定理より $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ なので、以下が言える.

命題 14.4 \overrightarrow{OA} の長さ $|\overrightarrow{OA}|$ は、以下の様に表すことができる.

$$\left|\overrightarrow{OA'}\right| = \sqrt{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})}$$

余弦定理と内積の定義から以下が言える.

命題 14.5 平面上の 4 点 A,B,C,D について, \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{CD} のなす角を θ とすると,

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \left| \overrightarrow{AB} \right| \left| \overrightarrow{CD} \right| \cos \theta$$

 $(\cos$ に関しては次節も参照のこと) 上の式について、 θ が ± 90 度のとき $\cos\theta = 0$ だから、以下が言える.

定義 14.6 2つの平面ベクトル \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} の内積が 0 のとき, \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{CD} は垂直であるといい,

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$$

であらわす.

上の定義から, \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} の一方が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ でも,2 つのベクトル \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} は垂直である.

14.7 平面上の直線と法線ベクトル

xy 平面における任意の直線は点 $A(x_0,y_0)$ を通る任意の直線は、ある定数 a,b,c (ただし $a^2+b^2\neq 0$) によって

$$ax + by + c = 0$$

で表すことができる. $b \neq 0$ の場合は

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

であり、傾き $-\frac{a}{b}$ の直線となる. b=0 の場合は $x=-\frac{c}{a}$ という形のものになる.

この直線上のある 1 点 $A(x_0, y_0)$ と任意の点 P(x, y) を考えると,

$$ax + by + c = 0$$
$$ax_0 + by_0 + c = 0$$

である. 辺々引くと

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

前節の定義より、これは、 $\binom{a}{b}$ と \overrightarrow{AP} が垂直であることを表す。垂直な線というのを古い言葉で法線 (ほうせん) ともいうので $^{14.1}$ 、以下の様に表す。

^{14.1} 道路工事などで法面 (のりめん) という言葉が用いられる.

定義 14.7 xy 平面上の直線 ax + by + c = 0 について、 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を、この直線の法線ベクトルという.

よって、2 つの直線 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ について、2 直線が垂直であることは、前節のベクトル垂直から、法線ベクトルが垂直であることと同値である。 つまり

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

である.一方この 2 直線が水平であることは,法線ベクトルが平行であることと同値である.今の場合 $a_1=b_1=0$ ではないので,前節より

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

を満たす s(ただし $s \neq 0)$ が存在することであり、計算すると

$$a_1b_2 - b_1a_2 = 0$$

同値である.

14.8 行列の1次変換

a,b,c,d を定数とする. 1 組の値 x,y が与えられたときに、新しい値

$$\begin{aligned}
 x' &= ax + by \\
 y' &= cx + dy
 \end{aligned}
 \tag{14.4}$$

が得られるとしよう. これは 2 変数 (x,y) から 2 変数 (x',y') への写像である. ともに 1 次式でありこれを 1 次写像もしくは 1 次変換という. 上の式を行列であらわすと,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であらわされるので,行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を (14.4) 式での 1 次変換を表す行列,もしくは単に 1 次変換行列という.

1 次変換を図形であらわしてみよう. xy 平面で, $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ があったとする. ただし $x_1y_2-x_2y_1\neq 0$ とする. このときかならず三角形 OAB が存在し,その内部と境界線上の点 (x,y) は,ベクトルを用いて以下であらわされる.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = p \overrightarrow{OA} + q \overrightarrow{OB} \quad (p \ge 0, q \ge 0, p + q \le 1)$$

この三角形の内部と境界線上の点を,(14.4) 式による 1 次変換によってどのように写るかを考えてみよう。 O,A,B が写る点をそれぞれ O',A',B' とする.まず明らかに O'(0,0) である.そして,

$$\overrightarrow{O'A'} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{O'B'} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overrightarrow{OB'}$$

である. これより, $p \ge 0, q \ge 0, p+q \le 1$ の条件の下で,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \overrightarrow{OA} + q \overrightarrow{OB} \end{pmatrix}$$
$$= p \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overrightarrow{OA} + q \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overrightarrow{OB}$$
$$= p \overrightarrow{O'A'} + q \overrightarrow{O'B'}$$

がなりたつ。すなわち三角形 (もしくは線分)O'A'B' の境界線と内部となる。三角形もしくは線分と書いた理由は,ad-bc の値に依存する。OAB が三角形を表していたとしても, $ad-bc\neq 0$ のときはこの (x',y') は,三角形の境界線と内部を表し,ad-bc=0 のときは,線分を表す.

もう少し詳しく ad - bc が 0 か非 0 かについて考えてみよう.

(x,y) が平面全体を表し、(14.4) 式による (x',y') への 1 次変換を考える. 任意の (x,y) は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であらわされる. 1次変換で (x', y') へは,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

と表される. ここで ad-bc=0 ならば、ある実数 s,t(ただし s=t=0 以外) があって

$$s \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. もし $s \neq 0$ ならば

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x \frac{-t}{s} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$
$$= (-tx/s + y) \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

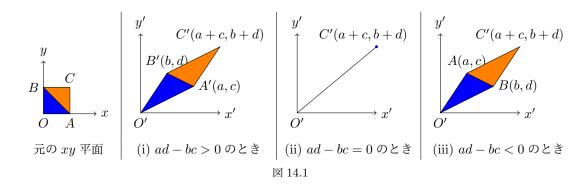
となり、点 B'(b,d) とすれば、これは直線 O'B' を表す. $t \neq 0$ の場合も同様なので、結局 ad-bc=0 のときは、平面全体から、直線に写ることが分かる.

 $ad-bc \neq 0$ のときはそうはならずに、平面全体から平面全体へ写る.

2つの議論をまとめて、xy 平面での領域 $D=(x,y)|0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1$ を考える。 O(0,0),A(1,0),B(0,1),C(1,1) としたとき,D は正方形 OACB の内部と境界線がである.これが

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって x'y' 平面でどのように写るかをイメージした図が,図 14.1 である.なお図では正方形を,2 つの三角形 OAB 部分とそれ以外に分けている.(i)(iii) の青線部分とオレンジの部分はそれに対応している部分である.A(1,0) が A'(a,c) へ,B(0,1) が B'(b,d) へ,C(1,1) が C'(a+c,b+d) にそれぞれ写っている.なお図では a,b,c,d すべて正としている.



xy 平面で,三角形 OAB の頂点の順は反時計回りに OAB であった.ad-bc>0 のときは OA'B' も反時計回りであるが,ad-bc<0 のときは OA'B' も時計回りとなり,OAB とは逆の順序になる.とはいえど ちらにしても O'A'B' は三角形である.しかし ad-bc=0 のときは,三角形ができずに,三角形 OAB は,x'y' 平面では線分上の点に写る.

さらに点と点の対応を見ると、ad-bc が非 0 のときは、D 上の 1 点と、D' 上のある 1 点がそれぞれ 1 対 1 に対応しているが、0 のときはそうではない.

さらに面積を計算すると、a,b,c,dの値にかかわらず、また三角形 O'A'B' ができない場合も含めて、

(三角形
$$O'A'B'$$
 の面積) = $|ad-bc|$ (三角形 OAB の面積) (ひし形 $O'A'B'C'$ の面積) = $|ad-bc|$ (正方形 $OACB$ の面積)

が成り立つ. ad-bc だと負の場合があるが |ad-bc| だとどんな a,b,c,d でも 0 以上である.

このように ad-bc が非 0 か 0 かによって、大きな違いがある.しかもこれは逆行列が存在するか否か同じ条件である.よって特別にこれを行列式と定義する.

定義 14.8 2×2 の行列 $m{A}$ について,その行列式を $\det(m{A})$ であらわす.計算方法は $m{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & d \end{pmatrix}$ のとき,

$$\det(\mathbf{A}) = ad - bc$$

一次変換については、15.3節にも応用があるので、参考にするとよい.

15 三角関数入門

15.1 ラジアンの導入

角度については、30 度・60 度・90 度などと習ってきたことだろうが、ここでは新たにラジアンという単位を導入する。単位の換算は簡単で、

「
$$x$$
 度= $\frac{2\pi}{360}x$ ラジアン」

である. 0 度は 0 ラジアン, 90 度が $\pi/2$ ラジアン, 180 度が π ラジアンで, 360 度は 2π ラジアンとなる. また π については 12.3 節で書いたように, 半径 1 の円の面積と定義している.

角度の表記についてであるが、今まで例えば 30 度のときは 30° と書いてきた、ラジアンについては単位は書かないものとする。角度が 3 とあったら、それは 3 ラジアンであることを意味する。以下全てラジアンで考えるものとする。

$15.2 \sin, \cos, \tan$

高校では,まず角 B が直角である直角三角形 ABC を考えて,辺 AB,BC,CA をそれぞれ c,a,b としたときに,

$$\sin A = \frac{a}{b}, \cos A = \frac{c}{b}, \tan A = \frac{a}{c} \tag{15.1}$$

とした.そしてその後これを拡張して,xy 平面上に原点を中心とした半径 1 の円を書き,点 (1,0) を半時計回り (以下では回転は全て半時計回りとするので明記しない) に,円周上を θ 動かした点の座標を $(\cos(\theta),\sin(\theta))$ とした.

任意の θ について以下が成り立つのは明らかである.

$$-1 \le \cos(\theta) \le 1, -1 \le \sin(\theta) \le 1, \{\cos(\theta)\}^2 + \{\sin(\theta)\}^2 = 1$$

また 1 回転は 2π ラジアンなので、任意の θ と、任意の整数 n について

$$cos(\theta + 2n\pi) = cos(\theta), sin(\theta + 2n\pi) = sin(\theta)$$

が成り立つ. これより、 \cos 関数は周期 2π を持つという. \sin も同様である.

 $0 < \theta < \pi$ をイメージして θ 回転と $-\theta$ 回転を考えれば,

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta), \sin(-\theta) = -\sin(\theta), \tag{15.2}$$

が成り立つことが分かる.次に (15.1)式で $0 < \theta < \pi/2$ をイメージすれば、

$$cos(\pi/2 - \theta) = sin(\theta), sin(\pi/2 - \theta) = cos(\theta)$$

が成り立つことが分かる. 上記2式より以下が言える.

$$\cos(\pi/2 + \theta) = -\sin(\theta), \sin(\pi/2 + \theta) = \cos(\theta) \tag{15.3}$$

これは点 (0,1) を θ 回転させた点が $(-\sin(\theta),\cos(\theta))$ となることを意味する. 上の式を 2 回繰り返すと,以下が言える.

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta), \sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$$

 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ で定義したので、従って任意の θ と任意の整数 n について

$$\tan(\theta + n\pi) = \tan(\theta)$$

なので、 \tan 関数は周期 π を持つ.

15.3 加法定理と1次変換

誤解がなければ、 $\cos(\theta)$ 、 $\sin(\theta)$ 、 $\tan(\theta)$ を、それぞれ $\cos\theta$ 、 $\sin\theta$ 、 $\tan\theta$ と表記する。 cos 関数と sin 関数の加法定理は以下である.

定理 15.1 (加法定理)

- (i). $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ (複合同順)
- (ii). $\sin(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$ (複合同順)

この式に $\alpha = \beta = \theta$ を代入すれば、以下が成り立つ.

定理 15.2 (倍角の定理)

(i).
$$\cos(2\theta) = (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 = 2(\cos\theta)^2 - 1 = 1 - 2(\sin\theta)^2$$

(ii). $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

tan については以下である.

定理 15.3 (i).
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha + \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$
(複合同順) (ii). $\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - (\tan \theta)^2}$

このあたりは、習ったとしていてもただ単に暗記したことであろうから、加法定理を 1 次変換の考え方から 導出する.

点 (1,0) を θ 回転させると、 $(\cos\theta,\sin\theta)$ に移動する。点 (0,1) を θ 回転させると、前節の (15.3) 式より、 $(-\sin\theta,\cos\theta)$ に移る。xy 平面上の任意の点 (x,y) は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表される. ので、点(x,y)を θ 回転させた点(x',y')は、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1,0) を $(\alpha + \beta)$ 回転させた点は $(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$ である. この点は、(1,0) を β 回転させた

 $(\cos \beta, \sin \beta)$ を α 回転させたものと等しいので,

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix}$$

であり、加法定理の $(\alpha+\beta)$ の方が成り立つ。 β の代わりに $-\beta$ を代入し、(15.2) 式を代入すれば、 $(\alpha-\beta)$ の方の加法定理が言える。

そこで, 行列

$$\begin{pmatrix}
\cos\theta & -\sin\theta \\
\sin\theta & \cos\theta
\end{pmatrix}$$

が、(角 θ の)回転変換を表すので、(平面の)回転行列とか、回転変換行列などと言う。

15.4 三角関数の導関数

角度にラジアンを導入して, 導関数を簡単に表すことができる. 具体的には以下である.

定理 15.4 任意の実数 θ について,

- (i). $\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta$
- (ii). $\frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta$

これを導くためには、 $\sin \theta$ の $\theta = 0$ での微分係数が 1 であること、つまり

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \tag{15.4}$$

を証明すればよい.その後は前節の加法定理を利用することで導くことができる.さらに言えば上の極限値の証明については, $h \neq 0$ のとき $\sin(h)/=\sin(-h)/(-h)$ なので,h>0 で証明すれば十分である.高校では以下の様に図で説明することになっている.

- (i). xy 平面で、 $O(0,0), A(1,0), B(\cos(h), \sin(h))$ を取る.
- (ii). 直線 OB と直線 x=1 の交点を $D(1, \tan(h))$ とする.
- (iii). 三角形 OAB の面積 < おうぎ形 OAB の面積 < 三角形 OAD の面積より,

$$\frac{1}{2}\sin h<\frac{1}{2}h<\frac{1}{2}\tan h$$

左の不等式より $\frac{\sin(h)}{h} < 1$ で,右の不等式と $\tan(h) = \sin(h)/\cos(h)$ より, $\cos(h) < \frac{\sin(h)}{h}$ なので,

$$\cos(h) < \frac{\sin(h)}{h} < 1$$

正数 h を, 0 に近づけていくと $\cos(h)$ は 1 に近づく. よって,

$$\lim_{h \to +0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

この証明で、半径 1 で角 h の扇形の面積を $\frac{1}{2}h$ とした。というのもこの扇形の面積は、半径 1 の円の面積の $h/(2\pi)$ 倍だからである。半径 1 の円の面積は π であると定義したわけなので、扇形の面積はその $h/(2\pi)$ 倍、すなわち $\frac{1}{2}h$ となったわけである。

 $\tan(\theta)$ の導関数については、商の微分から以下が言える.

定理 15.5
$$\frac{d}{d\theta} \tan(\theta) = \frac{1}{(\cos(\theta))^2}$$

16 複素数入門

この節では、a,b,c,d は実数とする。n は 0 以上の整数とする。

x に関する2次方程式

$$x^2 = -1$$

を満たす実数xは存在しないことは、すでに知っているだろう。そこで実数を拡張した複素数という集合を作り、その中ではこれが解を持つということにしたい。

定義 16.1 $z^2 = -1$ の一方の解を i で表し、他方の解を -i であらわす. i を虚数単位という.

定義 16.2 (複素数の定義) 集合 $C = \{a+bi|a,b\ b \neq 0\}$ の各要素を複素数といい,C を複素数の集合という. また複素数 a+bi の中でも特に, $b \neq 0$ のものを虚数という.

複素数の演算については、中学 1 年で学んだ文字と式の計算と、 $\mathbf{i}^2 = -1$ を組み合わせればよい。例えば以下が成り立つ。

- (a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi) = (a + c) + (b + d)i
- (a + bi)(c + di) = (c + di)(a + bi) = (ac bd) + (ad + bc)i

これによって、実数係数の2次方程式の解が以下のように得られる.

命題 16.3 $a \neq 0$ とする. x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解について、判別式 $D = b^2 - 4ac$ とすると、

- (i). D>0 のときは、2 つの異なる実数解 $\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ をもつ.
- (ii). D = 0 のときは、重解 $-\frac{b}{2a}$ をもつ.
- (iii). D < 0 のときは,2 つの異なる虚数解 $\frac{-b \pm \sqrt{|D|} \mathrm{i}}{2a}$ をもつ.

(iii) の |D| は -D と書いても構わない.手計算で計算する場合は,例えば $x^2-2x+3=0$ については以下の様にするとよい.

$$x^{2} - 3x + 5 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^{2} - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

実数では数直線上の1点と同一視した。それと同様に複素数は平面上の1点と同一視する。複素数を表す平面を複素平面と呼ぶ。それはxy平面と似ているが,横軸が実数を表す数直線で実軸と言い,縦軸を虚軸という。数直線では軸の名前を書かなかったように,複素平面でも軸の名前は書かないので気を付けること。なお実軸と虚軸の交点は0を表す。

絶対値については、平面上の点と点の距離から以下が言える.

定義 16.4 複素数 z = a + bi について,

- (i). 共役複素数 \bar{z} を, $\bar{z} = a bi$ と定義する.
- (ii). 絶対値 |z| を, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ と定義する.

平面図形での単位円から,以下が言える.

命題 16.5 複素数 z について,|z|=1 を表す点を複素平面で書くと,0 を中心とした半径 1 の円となる. 」 xy 平面での点 (1,0) の θ 回転を考えると,以下が言える.

命題 16.6 複素数 z について,|z|=1 を満たすものは, $-\pi<\theta\leq\pi$ を満たす θ によって, $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ であらわされる.

ところで、 $(\cos \theta + i \sin \theta)^2$ を計算すると、

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = (\cos \theta)^2 - (\sin \theta)^2 + 2i \cos \theta \sin \theta$$

(倍角の定理より) = cos(2\theta) + i sin(2\theta)

が成り立つ. 1 次変換の回転変換と対応しているのである. そこで全く同様に考えていくと,任意の整数 n について.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \tag{16.1}$$

が成り立つ.

さて今の場合 |z|=1 を考えていた.この図形は原点までの距離が1 である.|z|=r としてr>0 で動かしていくと,原点以外の複素数を表すことができる.これが極形式と呼ばれるものである.

定義 16.7 任意の複素数 $z \neq 0$ は、一組の (r,θ) (ただし r > 0 かつ $\theta \in (-\pi,\pi]$) によって、

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{16.2}$$

一意にあらわされる. この右辺を z の極形式もしくは極座標形式と呼ぶ.

 θ の範囲を $-\pi < \theta \le \pi$ にしたのは、この場合が分かりやすいためである。高校でも学んだように、 $0 < \theta < 2\pi$ としてもかまわない。

経済学では、極限が重要となる。春の講習で行った実数列の極限と同様に、複素数列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える。その複素数列がある複素数 α に収束するとき、

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$$

であらわす。実数列の収束と全く同様の表記であり、収束しない複素数列を、発散すると表すことも同様である。

そして以下の命題が複素数の関係で重要である.

命題 16.8 複素数 z について,

(i). |z| < 1 \Leftrightarrow if $\lim_{n \to \infty} z^n = 0$

- $\begin{array}{ll} \text{(ii).} & \lim_{n\to\infty}1^n=1\\ \text{(iii).} & \text{(i)(ii)} 以外の場合, \ z^n は n\to\infty$ で発散する.
- (iv). (iii) の中でも z=1 以外の |z|=1 については、任意の n について、 z^n は |z|=1 上に存在する.

r が実数の時, |r|<1 ならば $\lim_{n\to\infty}r^n=0$ となる. (i) はそれを含んだ拡張となっている. (iv) については (16.1) 式から明らかである.

17 線形 2 階差分方程式と行列の固有値

この章でもm, n, kは0以上の正整数とする.

17.1 線形差分方程式

実数列 x_n を考える. $x_n=3n+5$ のように x_n が n の関数として陽表的に表されるものではなくて, x_n が, それ以前の値 x_{n-1},x_{n-2},\cdots の関数として再帰的にあらわされるものを, x_n の差分方程式という. 漸化式ともいう. 例えば,

$$x_n = 3x_{n-1}, \quad x_n = x_{n-1} + 6x_{n-2}, \quad x_n = x_{n-1}^2, \quad x_n = \frac{x_{n-1} + 1}{x_{n-2}}$$

など色々なものが考えられる.これらの式から x_n を陽表的に求めることができる場合もあれば,できない場合もある.

陽表的にもとめることを,「差分方程式を解く」という.特に上の4つのうちの最初の2つの様に,線形式であらわされるものを線形差分方程式という.

定義 17.1 数列 x_n と実数 a_1, \dots, a_k について,

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k} = 0 (17.1)$$

という式を, x_n の k 階線形差分方程式と呼ぶ.

k階線形差分方程式は必ず解ける. ここでは入門として1階と2階の場合のみ取り上げる.

まず、1 階差分方程式 $x_n-rx_{n-1}=0$ を考えよう。これは $x_n=rx_{n-1}$ であり、 x_n は、前の値 x_{n-1} の r 倍だから、 x_n は等比数列である。陽表的に書くと $x_n=ar^n$ となる。ただし a の値については、この条件では未定である。

命題 17.2 r は実数とする. 1 階差分方程式 $x_n - rx_{n-1} = 0$ の一般解は以下であらわされる.

$$x_n = ar^n$$
 (a は定数)

未定の a については、 x_0 や x_1 などどれでもよいが数列 $\{x_n\}$ の中の 1 つの項が分かれば、値が得られる。初期値が分かりやすいので、以下のように書くことができる。

系 17.3 r は実数とする.初項が与えられた 1 階差分方程式 $\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_n - rx_{n-1} = 0 \end{cases}$ の解は,

$$x_n = \alpha r^n$$

と一意に定まる.

次に2階の差分方程式を解く前に、特性方程式を定義しておこう.

定義 17.4 (17.1) 式の差分方程式について, λ の k 次方程式

$$\lambda^{k} + a_{1}\lambda^{k-1} + \dots + a_{k-1}\lambda + a_{k} = 0 \tag{17.2}$$

を,特性方程式という.

命題 17.5 $a \neq 0$ とする. 2 階差分方程式

$$ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} = 0 \quad (n \ge 2)$$
(17.3)

の一般解は、特性方程式 $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ によって、以下であらわされる.

(i). 特性方程式が異なる 2 解 λ_1, λ_2 を持つとき ($b^2 - 4ac \neq 0$ のとき), x_n の一般解は

$$x_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n$$
 $(\alpha_1, \alpha_2$ は定数)

(ii). 特性方程式が重解 $\lambda_0 = -\frac{b}{2a}$ を持つとき $(b^2 - 4ac = 0$ のとき), x_n の一般解は

$$x_n = \alpha_1 \lambda_0^n + \alpha_2 n \lambda_0^n \quad (\alpha_1, \alpha_2$$
は定数)

(iii). 特に (i) で $b^2-4ac<0$ のときは $p=-\frac{b}{2a}, q=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ として、特性方程式が異なる 2 つの虚数解 p+qi, p-qi を持つが、これを極座標形式 (定義 16.7) で表すと、p,q より $r=\sqrt{p^2+q^2},\cos(\theta)=\frac{p}{r},\sin(\theta)=\frac{q}{r}$ を満たす $r>0,\theta\in(0,\pi)$ が 1 組定まる.この r,θ によって

$$x_n = r^n [\alpha_1 \cos(n\theta) + \alpha_2 \sin(n\theta)]$$
 $(\alpha_1, \alpha_2$ は定数)

(iii) について詳しくは、23.2 節の 2 階線形微分方程式で示す.

この命題において,数列 $\{x_n\}$ の中で 2 つ値が分かっていれば,一意に x_n は定まる.その中でも x_0, x_1 が分かりやすいだろうから以下が言える.

 \mathbf{x} 17.6 (17.2) 式の差分方程式で、 x_0, x_1 の値が与えられた場合には、(17.3) 式の解は一意に定まる.

命題 17.5 を見ると、特性方程式の解の絶対値が全て 1 未満であれば、 x_n は 0 に収束する.正しくは以下である.

系 17.7 (17.3) 式の 2 階差分方程式について,その特性方程式の解が全て 1 未満の場合, x_0,x_1 の値に関わらず $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ.

どんな初期値の場合でも必ず0に収束するのである。同様のことは一般のk階差分方程式でも成り立つ。

例題 17.8 差分方程式 $x_0=1, x_1=2, x_n+x_{n-1}+x_{n-2}=0$ の解を、命題 17.5(i)(iii) の両方の形式で表わせ.

(解答)この特性方程式 $\lambda^2+\lambda+1=0$ は異なる 2 解 $\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \lambda_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ を持つ. 命題 17.5(i) より、

$$x_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n$$

と書ける. $x_0 = \alpha_1 + \alpha_2, x_1 = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2$ を α_1, α_2 について解く. 上の式に n = 0, 1 を代入して,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

クラメールの公式 (14.2) より,

$$\begin{split} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 - 2 \\ -\lambda_1 + 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-\sqrt{3}i} \begin{pmatrix} \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} - 2 \\ -\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-2\sqrt{3}i} \begin{pmatrix} -5 - \sqrt{3}i \\ 5 - \sqrt{3}i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 - 5\sqrt{3}i \\ 3 + 5\sqrt{3}i \end{pmatrix} \end{split}$$

従って求める x_n は,

$$x_n = \frac{3 - 5\sqrt{3}i}{6} \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^n + \frac{3 + 5\sqrt{3}i}{6} \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^n$$

これが命題 17.5 の (i) の形式である.この式の, $\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)$ を極形式で表すと, $\cos(\pm 2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pm 2\pi/3)$ (複合同順) である.よって上の式はさらに,

$$x_n = \frac{3 - 5\sqrt{3}i}{6} \left(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)\right)^n + \frac{3 + 5\sqrt{3}i}{6} \left(\cos(-2\pi/3) + i\sin(-2\pi/3)\right)^n$$

$$= \frac{3 - 5\sqrt{3}i}{6} \left(\cos(2n\pi/3) + i\sin(2n\pi/3)\right) + \frac{3 + 5\sqrt{3}i}{6} \left(\cos(-2n\pi/3) + i\sin(-2n\pi/3)\right)$$

$$= \cos(2n\pi/3) + \frac{5\sqrt{3}}{3} \sin(2n\pi/3)$$

これが命題 17.5 の (iiii) の形式である.

この2階の場合の説明は、次節で行列の固有値・固有ベクトルを説明した後の、次次節で行う.

17.2 行列の固有値と固有ベクトルと正方行列の n 乗: (2 × 2) まで

固有値と固有ベクトルは,正方行列 A の n 乗を求めたり,前節の線形差分方程式や,後述の線形微分方程式の基礎にもなり,重要な概念である.一般的な n 次の形で書くが,計算自体は高校教科書範囲であった 2×2 までとする.

定義 17.9 n 次正方行列 A について、ある数 λ と、ある n 次列ベクトル $x \neq 0$ が存在して、

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

を満たすとき、 λ を A の固有値といい、x をそのときの固有ベクトルという.

上の
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$
 は、
$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$
 (17.4)

と同値であり、仮に $(A-\lambda I)$ に逆行列が存在すると、x=0 となってしまう. よって固有値の求め方は以下となる.

定義 17.10 I は n 次単位行列とする. 前定義の A について,

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

を満たす λ が存在すれば、それがAの固有値である。上の式を固有方程式といい、左辺は固有多項式という。

では 2×2 の場合を例にしよう。 $m{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよう。固有多項式は, $\det(m{A} - \lambda m{I}) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 5 & -7 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(-7 - \lambda) - 4 \cdot 5 = \lambda^2 + 6\lambda - 27$

従って λ の2次方程式 $\lambda^2 + 6\lambda - 27 = 0$ を解く. $(\lambda + 9)(\lambda - 3) = 0$ より $\lambda = -9,3$ である.

 $\lambda = -9$ のときの固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると $\begin{pmatrix} 17.4 \end{pmatrix}$ 式に代入して

$$\begin{pmatrix} 1+9 & 4 \\ 5 & -7+9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2(5x+2y) \\ 5x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これは結局 5x+2y=0 と同値である。 $\mathbf{0}$ 以外で 1 つ選ぶと, $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ であり,これが固有ベクトル (の 1 つ) である.

同様にして $\lambda=3$ のときの固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると, $\begin{pmatrix} 17.4 \end{pmatrix}$ 式に代入して

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 4 \\ 5 & -7-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -2(x-2y) \\ 5(x-2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これは x-2y=0 と同値である. ${\bf 0}$ 以外で 1 つ選ぶと, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり,これが固有ベクトル (の 1 つ) である.

よって, $m{A}$ の固有値は-9 と3 であり,そのときのそれぞれの固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

固有ベクトルが存在すれば、その定数倍も固有ベクトルである。この例で書いたようにどれか 1 つを書けばよい。PC で計算させると、 $x^2+y^2=1$ となるように基準化した固有ベクトルを返すことが多い。

次に固有値と固有ベクトルを用いて $m{A}$ を n 回掛けた $m{A}^n$ について,今の $m{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ を例にして述べよう.

上で書いた固有値と固有ベクトルをまとめると,

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = -9 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

である。それぞれ列ベクトルなので、上の式の右に下の式を並べて 2×2 の行列にすることを、左辺と右辺それぞれで行うと、以下が成り立つ。

$$\boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

 $m{P}=egin{pmatrix} 2 & 2 \ -5 & 1 \end{pmatrix}$ とすると、これは逆行列 $m{P}^{-1}$ が存在するので、これを両辺から左に掛けて

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -9 & 0\\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{17.5}$$

が言える. この式の左辺の2乗を計算すると,

$$(P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)P^{-1}AP)(P^{-1}AP = P^{-1}A^2P)$$

である. 右辺については, 簡単に

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (-9)^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

が言える. これを参考にして (17.5) 式を n 回掛ければ,以下が言える.

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{P} = \begin{pmatrix} (-9)^n & 0\\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{n} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} (-9)^{n} & 0 \\ 0 & 3^{n} \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-9)^{n} & 0 \\ 0 & 3^{n} \end{pmatrix} \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

さらに右辺を計算すれば A^n の各成分の式が得られる.このように 2 次正方行列の場合には,特性方程式の解が異なれば,このように,固有値と固有ベクトルを用いて A^n が陽表的にあらわされるのである.さらに $n \to \infty$ についても考えることができる.このとき A^n の各成分は発散するのは簡単に分かる.

これにさらに、重解を持つ場合を含めたり、 α , β , γ が複素数で、複素数係数の 2 次方程式 $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ が重解を含めて 2 解を持つことまで拡張すると、以下が言える。

命題 17.11 成分が実数である 2 次正方行列 A について,

(i). 特性方程式の 2 解が異なる場合: 固有値を λ_1, λ_2 とする (λ_1, λ_2) は複素数の範囲). それぞれに対応する固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とする. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ は逆行列を持ち, さらに

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

と書くことができる. これを A は P で対角化できるという. またこれより,以下が言える.

$$oldsymbol{A}^n = oldsymbol{P} egin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} oldsymbol{P}^{-1}$$

従って, A^n の各成分は λ_1^n と λ_2^n の線形結合,つまり適当な複素数 α_1,α_2 によって, $\alpha_1\lambda_1^n+\alpha_2\lambda_2^n$ の形で,表される.

(ii). 特性方程式が重解を持つ場合: その固有ベクトルを λ_1 とする. 1 つの固有ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ は必ず存在

する. さらに適切な x_2,y_2 を選ぶことによって, $m{P}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ が逆行列を持ち,かつ

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & q \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

と書くことができる.これを $\bf A$ は $\bf P$ で上三角化できるという.q は 0 以外ならどのような実数でもよいのだが,q=1 が便利であり,その場合でも適当な x_2,y_2 を選ぶことができる.よって q=1 とすると以下が言える.

$$m{A}^n = m{P} egin{pmatrix} \lambda_1^n & n \lambda_1^{n-1} \ 0 & \lambda_1^n \end{pmatrix} m{P}^{-1}$$

従って、 A^n の各成分は λ_1^n と $n\lambda_1^{n-1}$ の線形結合 $\alpha_1\lambda_1^n+\alpha_2n\lambda_1^{n-1}$ の形となっている. さらに α_2 を取り直せば、 $\alpha_1\lambda_1^n+\alpha_2n\lambda_1^n$ の形で、各成分を表すことができる.

重解を持つ場合を例にしよう. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&1\\-1&2\end{pmatrix}$ とする. 特性方程式は $\det\begin{pmatrix}4-\lambda&1\\-1&2-\lambda\end{pmatrix}=0$ である. 計算すると $\lambda^2-6\lambda+9=0$ なので, $\lambda=3$ で重解を持つ.まずは固有ベクトルを求める.

$$\begin{pmatrix} 4-3 & 1 \\ -1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は、x+y=0 と同値なので、 $\begin{pmatrix} 1\\ -1 \end{pmatrix}$ が固有ベクトル. 次に、この固有値 3 と固有ベクトルを用いて、

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる x,y を求める. 具体的に書くと

$$\begin{pmatrix} 4-3 & 1 \\ -1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

これは x+y=1 と同値なので、上の満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の 1 つは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 以上より、以下の 2 つの式が成り立つ。

$$\boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

それぞれの列ベクトルを横に並べて,

$$\boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
 とすれば、

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

これを右からずっと n 個両辺に掛けて, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}3^n&n\\0&3^n\end{pmatrix}$. これより,

$$\boldsymbol{A}^{n} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} 3^{n} & n \cdot 3^{n-1} \\ 0 & 3^{n} \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{n} & n3^{n-1} \\ 0 & 3^{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & n \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & -3+n \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= 3^{n-1} \begin{pmatrix} n+3 & n \\ -n & 3-n \end{pmatrix}$$

命題のどちらにしても、全ての固有値が絶対値で1未満になるかどうかが、 A^n の挙動に関係してくる.

系 17.12 2次正方行列 A について、その特性方程式の解の絶対値が、2 つとも 1 未満ならば、 $n \to \infty$ のとき、 A^n の各成分は 0 に収束する。

17.3 定係数 2 階線形差分方程式と行列との関係

今までの 2 つの節をまとめる. 実数 $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ が, $n \ge 2$ として差分方程式 $x_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} = 0$ を満たすとする. これを行列であらわすと,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -c \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

となる. n 回繰り返すと以下が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

よって, $\begin{pmatrix} -b & -c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ を求めると x_n を求めることができる. $\begin{pmatrix} -b & -c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有方程式は

$$\det\begin{pmatrix} -b - \lambda & -c \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{17.6}$$

である.この固有方程式は,2階線形差分方程式の特性方程式そのものであることに注意すること.

 $(i)b^2-4c \neq 0$ ならば、上の固有方程式 ((17.6) 式)の 2 つの異なる解を λ_1,λ_2 とすると、命題 17.11 の (i) より、 $\begin{pmatrix} -b & -c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ の各成分は λ_1^n と λ_2^n の線形結合となる.

また x_n は $\begin{pmatrix} -b & -c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ の (2,1) 成分に x_1 を掛けたものと, $\begin{pmatrix} -b & -c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ の (2,2) 成分に x_0 を掛けたものの和である.

以上より x_n は λ_1 と λ_2 の線形結合 $\alpha_1\lambda_1^n+\alpha_2\lambda_2^n$ という形となる. α_1,α_2 の値は x_0,x_1 に依存する. 具体的には

$$\begin{cases} x_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ x_1 = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 \end{cases}$$

を満たす α_1,α_2 となる. x_0,x_1 を気にしないで一般解の場合を考えれば、命題 17.5 の (i) が言える.

 $(ii)b^2-4c=0$ ならば、固有方程式 ((17.6) 式)の重解を λ_1 とすると、命題 17.11 の (ii) より、 $\begin{pmatrix} -b & -c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ の各成分は λ_1^n の線形結合となる.

あとは (i) と同様にして, x_n は λ_1^n と $n\lambda_1^n$ の線形結合 $\alpha_1\lambda_1^n+\alpha_2n\lambda_1^n$ であらわされる.これより命題 17.5 の (ii) が言える.

第IV部

積分 (1 変数・2 変数が中心):計量経済学・確率論・統計学で出会うもの

この 3 科目を深く理解したい場合に,IV 部は非常に有用である.上記 3 科目以外を知りたい場合は,この IV 部を飛ばして先に進んでも良い.実際,学部の経済学の理論で積分が出てくる場面は,微分に比べて驚く ほど少ない.1 変数の積分では,25 節の連続時間における動学的最大化問題のみであろう.2 変数以上の積分が出てくることはほぼ,上記 3 科目以外では皆無である.

さらに3変数以上の積分については、上記3科目での、n変数同時正規分布の密度関数や、線形変換がほとんどである。それらでは微分積分というよりも、線形代数の知識が重要になるので、このPDFではなく、

http://www.ic.daito.ac.jp/~tkadoda/math/index.htm

の [1] 行列と行列式 PDF の方に載せた. 興味あれば、IV 部を読んだあとに読むと良い. IV 部では定数・変数は全て実数である.

18 1変数の積分をもう少し

この章は12章の続きである.

18.1 定積分計算の簡単化

有界関数というものを定義しておこう.

定義 18.1 区間 I で定義された関数 f(x) について、ある実数 M>0 が存在して、任意の $x\in I$ について |f(x)|< M が成り立つとき、f(x) は I で有界関数であるという.

例えば x>1 で定義された関数 f(x)=1/x は有界であるが, x>0 で定義された関数 g(x)=1/x は有界ではない.

定理 3.1 より,有界閉区間で定義された関数 f(x) は最大値・最小値を持つので,有界であるのはあきらかであるう

有界閉区間 I で定義された有界関数 f(x) が I で連続とする. $a,b,c\in I$ について,まず以下は明らかであるう.

(i). $\int_a^b f(x)dx$, $\int_b^c f(x)dx$ が存在するならば, $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ 計算の都合から,以下を仮定する.

定義 18.2 有界閉区間 I で定義された有界関数 f(x) について,

- (i). $a,b \in I(ただし a < b)$ で $\int_a^b f(x)dx$ が存在するならば、 $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$
- (ii). $\int_a^a f(x)dx = 0$

さて n が 0 以上の定数の時, x^n の積分を考えよう. $y=x^n$ のグラフをイメージすれば以下は簡単に得られる.

- (i). a>0,n が偶数の時, $\int_{-a}^a x^n dx=2\int_0^a x^n dx$
- (ii). a > 0, n が奇数の時, $\int_{-a}^{a} x^{n} dx = 0$

これを一般化する.

定義 18.3 0 を含む区間 I で定義された関数 f(x) について、任意の $x \in I$ について、

- (i). f(-x) = f(x) を満たす f(x) を、偶関数と呼ぶ.
- (ii). f(-x) = -f(x) を満たす f(x) を、奇関数と呼ぶ.

簡単な計算から以下が言える.

- (i). 偶関数と偶関数の積は偶関数であり,
- (ii). 奇関数と奇関数の積も偶関数である.
- (iii). 奇関数と偶関数の積は奇関数である.

偶関数と奇関数についての定積分は以下が成り立つ.

命題 18.4 b>0 とする. 区間 [-b,b] で定義された有界関数 f(x) が $\int_0^b f(x)dx$ を持つとする.

- (i). f(x) が偶関数の場合,任意の $a \in [0,b]$ で $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$
- (ii). f(x) が奇関数の場合, 任意の $a \in [0,b]$ で $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

練習 18.5 以下の式が成り立つことを確認せよ.

- (i). $\int_{-2}^{2} x^2 \sin(x) dx = 0$
- (ii). $\int_{-5}^{5} x \cos(x) dx = 0$
- (iii). $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(x) dx = 2 \int_{0}^{\pi} x^2 \cos(x) dx$
- (iv). $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) dx = 2 \int_{0}^{\pi} x \sin(x) dx$

-

18.2 部分積分と置換積分

区間 I で定義された 2 つの 1 変数実数値関数 F(x), g(x) がともに I で微分可能とする. F(x) の導関数を f(x) であらわす. このとき積の微分から

$${F(x)g(x)}' = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

が言える. 移項して

$$f(x)g(x) = \{F(x)g(x)\}' - F(x)g'(x)$$

これで両辺を [a,b] で定積分したものが部分積分の公式である.

定理 18.6 (部分積分の公式) 区間 [a,b] で定義された 2 つの連続関数 f(x),g(x) について, f(x) の原始関数 を F(x) とし, g(x) は定義域で C^1 級とする. このとき以下が成り立つ.

$$\int_{a}^{b} f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} F(x)g'(x)dx$$

次に

$$\int_0^1 (6x+7)^8 dx$$

を考えてみよう. 慣れている人は見たらすぐに $(6x+7)^8$ の原始関数が $\frac{(6x+7)^9}{9}\frac{1}{6}$ であることが分かるが、慣れていない人は次の方法で行う.

- (i). u=6x+7 とすると積分する関数が u^8 と分かりやすい形になるので,このような変数 u を考える. 6x+7 は x について C^1 級で狭義単調増加である.
- (ii). x の式に直す. $x = \frac{u-7}{6}$
- (iii). $\frac{dx}{du}$ を計算し、定義域で 0 にならないことを確認する。今の場合は $\frac{dx}{du} = \frac{1}{6}$ で 0 でない。
- (iv). 頭の中で (iii) の左辺をあたかも分数の様に考えて, $dx = \frac{1}{6}du$ と考えておく (あくまでも頭の中で).
- (v). x = 0,1 に対応する u の値を計算する. それぞれ 7,13
- (vi). 後述の置換積分の公式に当てはめる.

$$\int_0^1 (6x+7)^8 dx = \int_7^{13} u^8 \frac{1}{6} du$$

(vii). 右辺を計算して $\frac{13^9-7^9}{54}$ が言える.

この方法をまとめたものが以下となる.

定理 18.7 (置換積分の公式) 区間 [a,b] で定義された連続関数 f(x) を考える。また [a,b] で定義された狭義 単調で C^1 級関数 h(x) によって,u=h(x) とする。仮定より h(x) は逆関数を持つのでそれを g(u) とする。 つまり $u=h(x) \Longleftrightarrow x=g(u)$. さらに g(u) は定義域で $g'(u) \neq 0$ とする。このとき以下が成り立つ。

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(g(u))g'(u)du$$

この仮定より g(u) は、定義域で g'(u) > 0 か g'(u) < 0 のどちらかである。そのうち g'(u) < 0 のときには h(a) > h(b) となり、やや面倒である。それを避けて書いたものが以下となる。

系 18.8 区間 [a,b] で定義された連続関数 f(x) を考える。区間 $I_u=[c,d]$ で定義された狭義単調関数 g(u) が I_u で C^1 級かつ, $g'(u)\neq 0$ とする。さらに I_u の値域 $g(I_u)$ が [a,b] であるとき,以下が成り立つ。

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))|g'(u)|du$$

٦

-

定理 18.7 の場合と違って、系 18.8 の右辺の c,d では、必ず c < d となる.以下でそれを確かめよう.

先の例を少し変えて $\int_0^1 (-6x+7)^8 dx$ を考える. u=-6x+7 と考えて、先の例と同様に定理 18.7 から求めると、

$$\int_0^1 (-6x+7)^8 dx = \int_7^1 \frac{u^8}{8} \cdot \frac{1}{-6} du$$

が成り立つ. 系 18.8 からは, 以下が言える.

$$\int_0^1 (-6x+7)^8 dx = \int_1^7 \frac{u^8}{8} \left| \frac{1}{-6} \right| du$$

どちらとも $\int_1^7 \frac{u^8}{8} \frac{1}{6} du$ となり, 等しいことが分かる.

18.3 区分的に連続な関数

 $f(x) = \begin{cases} x & \text{(if } x \le 1) \\ x^2 - 1 & \text{(if } x > 1) \end{cases}$ とする.この f(x) は x = 1 で不連続であるが, $\int_0^1 f(x) dx$ も $\int_1^2 f(x) dx$ は 存在する。そこで「ところどころで不連続な関数」を定義したい

定義 18.9 区間 I で定義された関数 f(x) について、不連続点が有限個の点のみのとき、この f(x) を I で区分的に連続な関数と呼ぶ.

命題 18.10 区間 [a,b] で定義された有界関数 f(x) が,区分的に連続のとき,定積分 $\int_a^b f(x) dx$ は存在する. \Box

18.4 広義積分(1)積分区間が非有界のとき

今までの定積分では有界閉区間での関数を取り扱ってきた.この節では定義域の区間が非有界のものを考える.

定義 18.11 (i). $[a,\infty)$ で定義された有界関数 f(x) について,

$$\lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} f(x) dx$$

が存在するとき、これを $\int_a^\infty f(x)dx$ であらわす.

(ii). $(-\infty,b]$ で定義された有界関数 f(x) について,

$$\lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x) dx$$

が存在するとき、これを $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ であらわす.

┙

最も分かりやすいのは、 $\alpha > 1$ としたときの、 $x^{-\alpha}$ である、1 < bとして

$$\int_{1}^{b} x^{-\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{1}^{b}$$

$$= \frac{b^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha+1}$$

$$\to \frac{0-1}{-\alpha+1} \quad (b \to \infty)$$

よって,

$$\int_{1}^{\infty} x^{-\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1} \quad (\text{if } \alpha > 1)$$
(18.1)

今は定義に合わせてこのように書いたが、慣れてくると上の式のようにbを入れずに、直接 ∞ を入れて

$$\int_{1}^{\infty} x^{-\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{1}^{\infty}$$
$$= \frac{0-1}{-\alpha+1}$$

と書くことがほとんどである.1 行目から 2 行目の変形は, $\lim_{x\to\infty}x^{-\alpha+1}=0$ を計算している. 次に分かりやすいのは指数関数である.r>0 のとき, e^{-rx} を考える.

$$\int_0^\infty e^{-rx} dx = \left[\frac{e^{-rx}}{-r} \right]_0^\infty$$
$$= \frac{0-1}{r}$$

1 行目から 2 行目で $\lim_{x\to\infty}e^{-rx}=0$ を計算している. よって,

$$\int_0^\infty e^{-rx} dx = \frac{1}{r} \quad (\text{if } r > 0)$$
 (18.2)

次はxのべき乗と, e^{-x} の積である. $\int_0^1 e^{-x} dx = 1$ となるのは上の式から得られる. 部分積分を用いて,

$$\int_0^\infty x e^{-x} dx = \left[x \frac{e^{-x}}{-1} \right]_0^\infty - \int_0^\infty 1 \frac{e^{-x}}{-1} dx$$
$$= 0 - 0 + \int_0^\infty e^{-x} dx$$
$$= 1$$

次に x^2 との積は,

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = \left[x^2 \frac{e^{-x}}{-1} \right]_0^\infty - \int_0^\infty 2x \frac{e^{-x}}{-1} dx$$
$$= 0 - 0 + 2 \int_0^\infty x e^{-x} dx$$
$$= 2$$

次に x^3 との積は,

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = \left[x^3 \frac{e^{-x}}{-1} \right]_0^\infty - \int_0^\infty 3x^2 \frac{e^{-x}}{-1} dx$$
$$= 0 - 0 + 3 \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$$
$$= 3 \cdot 2 = 3!$$

これ以降数学的帰納法より $n \ge 1$ の整数について

$$\int_{0}^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx = (n-1)!$$

また n が任意の正整数なので、実数 $p \ge 1$ についても、

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$$

が存在することも言える. この関数については0 のときも存在するのだが、それは次節で説明する.

18.5 広義積分(2)被積分関数が非有界のとき

p>0 とする. x>0 で定義された関数 $x^{-\alpha}$ は,定義域では連続だが $x\to +0$ のとき, ∞ に発散する.このような場合にも定積分を定義できるように,定義を拡張する.

定義 18.12 (i). 区間 (a,b] で定義された関数 f(x) について、 $\lim_{h\to +0}\int_{a+h}^b f(x)dx$ が存在する場合、これを $\int_a^b f(x)dx$ であらわす.

(ii). 区間 [a,b) で定義された関数 f(x) について、 $\lim_{h\to -0}\int_a^{b+h}f(x)dx$ が存在する場合、これを $\int_a^bf(x)dx$ であらわす.

_

前節同様にまず簡単なのは、0 としたときの <math>x の関数 x^{-p} である. b > 0 として、

$$\int_{h}^{b} x^{-p} dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_{h}^{b}$$

$$= \frac{b^{1-p} - h^{1-p}}{1-p}$$

$$= \frac{b^{1-p}}{1-p} \quad (h \to +0)$$

これと前節の結果から,

定義 18.13 p>0 とするとき、ガンマ関数 $\Gamma(p)$ を以下のように定義する.

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

┙

前節で p>1 のときが存在することは示した。 0< p<1 については,0< x<1 で, $0< x^{p-1}e^{-x}< x^{p-1}$ かつ $\int_0^1 x^{p-1} dx$ が存在するので, $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$ も存在する.

次に $\int_0^1 x(1-x)dx = \frac{1}{6}$ を拡張しよう.

定義 18.14 p > 0, q > 0 とするとき、ベータ関数 B(p,q) を以下のように定義する.

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

 $p \geq 1, q \geq 1$ のときは, $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ は [0,1] で連続関数なので,右辺が存在することは言える. $0 のときは <math>x^{p-1}(1-x)^{q-1} \to \infty (x \to +0)$ であり, 0 < q < 1 のときは $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \to \infty (x \to 1-0)$ である. しかし,ガンマ関数の 0 の場合と同様の考え方によって,右辺が存在することが分かる.

置換積分を用いれば簡単に,

$$B(p,q) = B(q,p)$$

が得られる.次の命題は証明が面倒なので(※bbb 節で証明する)紹介だけにとどめる.

命題 18.15

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

先に挙げた $\int_0^1 x(1-x)dx$ の値をベータ関数とガンマ関数を経由して示すと

$$\int_0^1 x(1-x)dx = B(2,2) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)} = \frac{1! \cdot 1!}{3!} = \frac{1}{6}$$

と正しく値が出てくる.

ガンマ関数とベータ関数については、置換積分によって以下が成り立つ.

命題 18.16 α, β, p, q, a は全て正とする.

(i).
$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx = \Gamma(p) q^p$$
 (ii).
$$\int_0^a x^{p-1} (a-x)^{q-1} dx = a^{p+q-1} B(p,q)$$

証明 (i) の証明: $y = x/\beta$ で置換積分して

$$\int_0^\infty x^{\alpha - 1} \exp(-x/\beta) dy = \int_0^\infty (\beta y)^{\alpha - 1} \exp(-y) \cdot \beta dy$$
$$= \beta^\alpha \int_0^\infty y^{\alpha - 1} \exp(-y) dy$$
$$= \Gamma(\alpha) \beta^\alpha$$

(ii) の証明: x = ay で置換積分して,

$$\int_0^a x^{p-1} (a-x)^{q-1} dx = \int_0^1 (ay)^{p-1} (a-ay)^{q-1} \cdot ady$$
$$= a^{p+q-1} \int_0^1 y^{p-1} (1-y)^{q-1} dy$$
$$= a^{p+q-1} B(p,q)$$

19 確率・統計・計量経済学で出てくる積分 (1)

微分積分をある程度理解した後は、理工系や数学科では複素解析や実解析 (フーリエ変換など) に進むことが多いが、経済学ではそれらはあまり出てこない.よく積分を用いる科目は、確率論入門・統計学入門・計量経済学なので、この節ではその中でもよく出てくる、1 変数の連続形確率変数について概論する.事象や確率の定義は省略している.

定義 19.1 (1変数連続形確率変数の定義)

(i). X が 1 変数連続形確率変数であるとは、実数全体で定義された $f(x) \ge 0$ があって、任意の区間 I について、X が I の範囲の値をとる確率について、

$$\Pr(X \in I) = \int_{I} f(x) dx$$

で表されるときである.

- (ii). (i) での f(x) を X の密度関数という.
- (iii). $\Pr(X \leq x)$ を満たす関数を分布関数という.

X の分布関数が F(x) のとき、明らかに以下の 2 式が成り立つ。

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

この章の残りでは、Y,X などの大文字で 1 変数連続形確率変数を表すこととし、いちいち断らないものとする.

上の定義から明らかに、連続形確率変数 X の分布関数 F(x) は、密度関数 f(x) の原始関数である。また $\int_x^x f(q)dq=0$ から $\Pr(X\leq x)=\Pr(X< x)$ が成り立つ。よって任意の a< b について、

$$\Pr(a \le X \le b) = \Pr(a < X \le b) = \Pr(a \le X < b) = \Pr(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

が成り立つ.

次に広義積分に注目して,よく出てくる密度関数の関数形について説明する.

命題 19.2 \mathbf{R} を定義域とする次の関数 f(x) は、全て

$$f(x) \ge 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

を満たす.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$
 (19.1)

(ii). $\alpha > 0, \beta > 0 \ge U \subset$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta) & \text{(if } x > 0) \\ 0 & \text{(その他の時)} \end{cases}$$
 (19.2)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{(if } x > 0) \\ 0 & \text{(その他の時)} \end{cases}$$
 (19.3)

(iv). n は正整数として,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} x^{n/2-1} \exp(-x/2) & \text{(if } x > 0) \\ 0 & \text{(その他の時)} \end{cases}$$
 (19.4)

(v). $p > 0, q > 0 \ge U \subset$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(p,q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} & \text{(if } 0 < x < 1) \\ 0 & \text{(その他の時)} \end{cases}$$
 (19.5)

(vi). n は正整数として,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n}B(1/2, n/2)} (1 + x^2/n)^{-(n+1)/2}$$
(19.6)

(vii). m, n はともに正整数として,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(m/n)^{m/2}}{B(m/2, n/2)} x^{m/2 - 1} (1 + mx/n)^{-(m+n)/2} & \text{(if } x > 0) \\ 0 & \text{(その他の場合)} \end{cases}$$
(19.7)

_

証明 (i) の証明は,置換積分より $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}dx=\sqrt{2\pi}$ を証明すれば十分である.これは bbb 節で示す. (ii) の証明:

命題 18.16(i) より, $\int_0^\infty f(x) = 1$ が言える. $x \le 0$ で f(x) = 0 なので、命題が成り立つ.

- (iii) の証明: (ii) の $\alpha = 1, \beta = 1/\lambda$ の場合である.
- (iv) の証明: (ii) の $\alpha = n/2, \beta = 2$ の場合である.
- (v)の証明:ベータ関数の定義から明らか.
- (vi) の証明: ベータ関数から,

$$B(1/2,n/2) = \int_0^1 y^{-1/2} (1-y)^{n/2-1} dy$$

$$(1-y) = \frac{1}{1+x^2/n} \ge \mathbb{E}$$
 複数する)
$$= \int_0^\infty \left(1 - \frac{1}{1+x^2/n}\right)^{-1/2} (1+x^2/n)^{-n/2+1} \frac{1/n}{(1+x^2/n)^2} dx$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{x^2/n}{1+x^2/n}\right]^{-1/2} (1+x^2/n)^{-n/2+1} \frac{2x/n}{(1+x^2/n)^2} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^\infty (1+x^2/n)^{1/2} (1+x^2/n)^{-n/2+1} (1+x^2/n)^{-2} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^\infty (1+x^2/n)^{-(n+1)/2} dx$$
 (被積分関数は偶関数なので)
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^\infty (1+x^2/n)^{-(n+1)/2} dx$$

両辺 B(1/2, n/2) で割ると、命題が成り立つ。

(vii) の証明: ベータ関数から,

$$B(m/2,n/2) = \int_0^1 y^{m/2-1} (1-y)^{n/2-1} dy$$

$$(1-y = \frac{1}{1+mx/n}$$
と置換積分する)
$$= \int_0^\infty \left(1 - \frac{1}{1+mx/n}\right)^{m/2-1} (1+mx/n)^{-n/2+1} \frac{m/n}{(1+mx/n)^2} dx$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{mx/n}{1+mx/n}\right]^{m/2-1} (1+mx/n)^{-n/2+1} \frac{m/n}{(1+mx/n)^2} dx$$

$$= (m/n)^{m/2} \int_0^\infty x^{m/2-1} (1+mx/n)^{-(m+n)/2} dx$$

両辺を B(m/2, n/2) で割って、 $\int_0^\infty f(x)dx = 1$ が言える. $x \le 0$ で f(x) = 0 なので命題が成り立つ.

上の命題の密度関数については、それぞれ以下の名前がついている.

定義 19.3 前命題の (i) から (vii) のそれぞれの f(x) を密度関数として持つ確率変数は、以下のように定義する.

- (i). パラメータ (μ, σ^2) の正規分布という. X がこの分布に従う時, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ と書く. また $\mu = 0$ かつ $\sigma = 1$ の場合は、標準正規分布という.
- (ii). パラメータ (α, β) のガンマ分布という.
- (iii). パラメータ λ の指数分布という.
- (iv). 自由度 n のカイ 2 乗分布という. X がこの分布に従う時, $X \sim \chi^2(n)$ と書く.
- (v). パラメータ (p,q) のベータ分布という.
- (vi). 自由度 n の t 分布という. X がこの分布に従う時, $X \sim t(n)$ と書く.
- (vii). 自由度 (m,n) の F 分布という. X がこの分布に従う時, $X \sim F(m,n)$ と書く.

置換積分から,以下が成り立つ.

定理 19.4 (変数変換公式)X の密度関数が f(x) とする. Y が X の関数のとき, Y も確率変数となる. さらに X が Y の C^1 級の 1 変数実数値関数 X=h(Y) として表すことができて、さらに定義域で $h'(y)\neq 0$ ならば、Y の密度関数は以下で表される.

$$f(h(y)) \cdot |h'(y)|$$

証明 仮定より h(y) は h'(y)>0 (resp. h'(y)<0) であり、逆関数 h^{-1} は存在し、その定義域は y の値域であり、結局区間となる。 さらに h^{-1} は狭義単調増加 (resp. 狭義単調減少) となるので、

$$\Pr(Y \le y) = \Pr(h(Y) \le h(y)) \quad (\text{resp. } \Pr(h(Y) \ge h(y)) \)$$
$$= \Pr(X \le h(y)) \quad (\text{resp. } 1 - \Pr(X \le h(y)) \)$$

両辺をそれぞれyで微分すると、左辺はYの密度関数となる。右辺は合成関数の微分より、

$$f(h^{-1}(y))h'(y)$$
 (resp. $-f(h^{-1}(y))h'(y)$)

h'(y) < 0 のとき, |h'(y)| = -h'(y) なので、命題が成り立つ.

定理 19.5 (正規分布はアフィン変換について閉じている) a,b,μ,σ は定数で $a\neq 0,\sigma>0$ とする. X が平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布に従うとする. Y=aX+b とすると, Y は平均 $a\mu+b$, 分散 $a^2\sigma^2$ の正規分布に従う.

証明 Y = aX + b より、 $X = \frac{Y - b}{a}$ である。前定理より Y の密度関数は

$$\begin{split} &\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{[(y-b)/a-\mu]^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \left|\frac{1}{a}\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2\sigma^2}} \exp\left(-\frac{[(y-(a\mu+b)]^2}{2a^2\sigma^2}\right) \end{split}$$

系 19.6 a,b,μ,σ は定数で $a\neq 0,\sigma>0$ とする. X が平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布に従うとき, $\frac{X-\mu}{a}$ は標準正規分布に従う.

このようにアフィン変換について閉じているの点が便利である。2乗については、カイ2乗分布との関係がある。

定理 19.7 (標準正規分布の 2 乗は自由度 1 のカイ 2 乗分布) $Z \sim N(0,1)$ ならば, $Z^2 \sim \chi^2(1)$

証明 $X=Z^2$ とし、X の分布関数と密度関数をそれぞれ F(x),f(x) とする. $x\leq 0$ のとき F(x)=0 で f(x)=0. x>0 のときは、

$$F(x) = \Pr(X \le x) = \Pr(Z^2 \le x)$$

$$= \Pr(-\sqrt{x} \le Z \le \sqrt{x})$$
 (標準正規分布の密度関数の対称性より)
$$= 2\Pr(0 \le Z \le \sqrt{x})$$

$$= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-z^2/2} dz$$

両辺をxで微分することができて、合成関数の微分より、

$$f(x) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\sqrt{x})^2/2} \cdot {\{\sqrt{x}\}'}$$
$$= 2\frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)}e^{-x/2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)}x^{1/2-1}e^{-x/2}$$

以上より f(x) は $\chi^2(1)$ の密度関数と一致する.

┙

この章の残りでは、期待値・平均・分散を定義して確率変数のアフィン変換したときの平均・分散について述べる。

定義 19.8 X の密度関数が f(x) とする. このとき、1 変数実数値関数 g(x) について、

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

が実数で存在する時、これを E[g(X)] と表す. 特に

- (i). $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ を X の期待値という.
- (ii). $E[(X E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x E[X])^2 f(x) dx$ を X の分散という. 簡単に V[X] と表すこともある.

「実数で存在する」とあるように、期待値が存在しない分布もある。実際、Xの密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{(if } x \ge 1) \\ 0 & \text{(その他のとき)} \end{cases}$$

の場合,

$$\begin{split} E[X] &= \int_{\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{1}^{\infty} x \frac{1}{x} dx \\ &= \infty \notin \mathbf{R} \end{split}$$

であり、E[X] は存在しない.

定理 19.9 (分散公式)X について, $E[X^2]$ が存在するとき, $V[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2$

証明 X の密度関数を f(x) とすると,

$$\begin{split} V[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2E[X] \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + \{E[X]\}^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + \{E[X]\}^2 \\ &= E[X^2] - \{E[X]\}^2 \end{split}$$

定理 19.10 (確率変数のアフィン変換の期待値と分散) 確率変数 X と Y が Y=aX+b の関係 (ただし $a\neq 0$) にある時,

- (i). E[Y] = aE[X] + b
- (ii). $V[Y] = a^2 V[X]$

証明 E[X] が存在する時,

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b)f(x)dx$$
$$= a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$
$$= aE[X] + b$$

V[X] が存在する時,

$$\begin{split} V[Y] &= E[(aX + b - E[aX + b])^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{(ax + b) - (aE[X] + b)\}^2 f(x) dx \\ &= a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \{x - E[X]\}^2 f(x) dx \\ &= a^2 V[X] \end{split}$$

定義 19.3 での 7 つの分布について、平均と分散を述べておくが、数値として知っておくべきなのは (i) の平均 μ と分散 σ^2 、そして (vi) の平均 0 である。他は置換積分のやり方を見ながら、軽く流して読めばよい。

命題 19.11 定義 19.3 での 7 つの分布について,その平均と分散は以下の表で表される。 $\sigma, p, q, \alpha, \beta$ は正の定数で,m, n は正整数の定数とする.

	分布	平均		分散
(i)	$N(\mu, \sigma^2)$	μ		σ^2
(ii)	パラメータ $(lpha,eta)$ のガンマ分布	$\alpha\beta$		$\alpha \beta^2$
(iii)	パラメータ λ の指数分布	$1/\lambda$		$1/\lambda^2$
(iv)	$\chi^2(n)$	n		2n
(v)	パラメータ (p,q) のベータ分布	$\frac{p}{p+q}$		$\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$
(vi)	t(n)	0		$\frac{n}{n-2}$ $(n \ge 3 \mathcal{O} $
(vii)	F(m,n)	$\frac{n}{n-2}$	$(n \ge 3$ のとき)	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ $(n \ge 5 \ \mathcal{O} \ \xi \ \xi)$

証明 以下X,Zは確率変数とする.

(i) の証明: $Z \sim N(0,1)$ のとき E[Z] = 0, V[Z] = 1 を示せばよい. というのも定理 19.5 より $X = \sigma Z + \mu$ とすれば, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ であり、定理 19.8 より, $E[X] = \mu, V[X] = \sigma^2$ となるためである.

$$E[Z] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z^2/2} dz$$
 (奇関数の積分より) = 0

$$\begin{split} V[Z] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -z \left(-z e^{-z^2/2} \right) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[-z e^{-z^2/2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-z^2/2} dz \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{ (0-0) + \sqrt{2\pi} \} \\ &= 1 \end{split}$$

(ii) の証明:X がパラメータ (α, β) のガンマ分布に従うとき,

$$E[X]=rac{1}{\Gamma(lpha)eta^lpha}\int_0^\infty xx^{lpha-1}e^{-x/eta}dx$$
命題 18.16(i) より $=rac{1}{\Gamma(lpha)eta^lpha}\Gamma(lpha+1)eta^{lpha+1}$ $=lphaeta$

$$\begin{split} V[X] &= E[X^2] - (\alpha\beta)^2 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty x^2 x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx - \alpha^2 \beta^2 \\ \text{命題 18.16(i)} \ \&\, \emptyset \ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \Gamma(\alpha+2)\beta^{\alpha+2} - \alpha^2 \beta^2 \\ &= (\alpha+1)\alpha\beta^2 - \alpha^2 \beta^2 \\ &= \alpha\beta^2 \end{split}$$

- (iii) の証明: (ii) で $\alpha = 1, \beta = 1/\lambda$ を代入すればよい
- (iv) の証明: (ii) で $\alpha = n/2, \beta = 2$ を代入すればよい.
- (v) の証明: X がパラメータ (p,q) のベータ分布に従うとき,

$$\begin{split} E[X] &= \frac{1}{B(p,q)} \int_0^1 x x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \\ &= \frac{1}{B(p,q)} B(p+1,q) \\ &= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \cdot \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} \\ &= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} \cdot \frac{p\Gamma(p)}{(p+q)\Gamma(p+q)} \\ &= \frac{p}{p+q} \end{split}$$

$$\begin{split} V[X] &= E[X^2] - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\ &= \frac{1}{B(p,q)} \int_0^1 x^2 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\ &= \frac{1}{B(p,q)} B(p+2,q) - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\ &= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \cdot \frac{\Gamma(p+2)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+2)} - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\ &= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} \cdot \frac{(p+1)p\Gamma(p)}{(p+q+1)(p+q)\Gamma(p+q)} - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\ &= \frac{(p+1)p}{(p+q+1)(p+q)} - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\ &= \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} \end{split}$$

(vi) の証明: $X \sim t(n)$ とする. V[X] の証明では $n \geq 3$ とする.

$$E[X]=\frac{1}{\sqrt{n}B(1/2,n/2)}\int_{-\infty}^{\infty}x(1+x^2/n)^{-(n+1)/2}dx$$
 (奇関数の積分より) = 0

$$\begin{split} V[X] &= \frac{1}{\sqrt{n}B(1/2,n/2)} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 (1+x^2/n)^{-(n+1)/2} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}B(1/2,n/2)} \int_{0}^{\infty} x^2 (1+x^2/n)^{-(n+1)/2} dx \\ &1-y = 1/(1+x^2/n) \ \mbox{と変数変換する}. \ x^2 = \frac{ny}{1-y}, \frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{n}}{2} y^{-1/2} (1-y)^{-3/2} \mbox{より} \end{split}$$

$$\begin{split} V[X] &= \frac{2}{\sqrt{n}B(1/2,n/2)} \int_0^1 \frac{ny}{1-y} \cdot (1-y)^{(n+1)/2} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2} y^{-1/2} (1-y)^{-3/2} dy \\ &= \frac{n}{B(1/2,n/2)} \int_0^1 y^{3/2-1} (1-y)^{(n/2-1)-1} dy \\ &= \frac{n}{B(1/2,n/2)} B(3/2,n/2-1) \\ &= \frac{n}{\Gamma(1/2)\Gamma(n/2)} \Gamma(3/2) \Gamma(n/2-1) \\ &= \frac{n}{\Gamma(1/2)(n/2-1)\Gamma(n/2-1)} (1/2) \Gamma(1/2) \Gamma(n/2-1) \\ &= \frac{n}{\Gamma(1/2)(n/2-1)\Gamma(n/2-1)} (1/2) \Gamma(1/2) \Gamma(n/2-1) \\ &= \frac{n}{n-2} \end{split}$$

(vii) の証明: $X \sim F(m,n)$ とする. E[X] については $n \geq 3$, V[X] については $n \geq 5$ とする.

$$\begin{split} E[X] &= \frac{(m/n)^{m/2}}{B(m/2,n/2)} \int_0^\infty x x^{m/2-1} (1+mx/n)^{-(m+n)/2} dx \\ 1-y &= (1+mx/n)^{-1} と変数変換して、 \frac{dx}{dy} = \frac{n}{m} \frac{1}{(1-y)^2} \sharp \, \mathfrak{h} \\ &= \frac{(m/n)^{m/2}}{B(m/2,n/2)} \int_0^1 \left[\frac{n}{m} \frac{y}{1-y} \right]^{m/2} (1-y)^{(m+n)/2} \frac{n}{m} \frac{1}{(1-y)^2} dy \\ &= \frac{n}{mB(m/2,n/2)} \int_0^1 y^{(m/2+1)-1} (1-y)^{(n/2-1)-1} dy \\ &= \frac{n}{mB(m/2,n/2)} B(m/2+1,n/2-1) \\ &= \frac{n}{m} \frac{\Gamma(m/2+n/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \frac{\Gamma(m/2+1)\Gamma(n/2-1)}{\Gamma(m/2+1+n/2-1)} \\ &= \frac{n}{m} \frac{1}{\Gamma(m/2)(n/2-1)\Gamma(n/2-1)} \frac{(m/2)\Gamma(m/2)\Gamma(n/2-1)}{1} \\ &= \frac{n}{n-2} \end{split}$$

$$V[X] = E[X^{2}] - \{E[X]\}^{2} = \frac{(m/n)^{m/2}}{B(m/2, n/2)} \int_{0}^{\infty} x^{2} x^{m/2 - 1} (1 + mx/n)^{-(m+n)/2} dx - \frac{n^{2}}{(n-2)^{2}}$$

E[X] の証明と同様に、 $1-y=(1+mx/n)^{-1}$ と変数変換して

$$\begin{split} V[X] &= \frac{(m/n)^{m/2}}{B(m/2,n/2)} \int_0^1 \left[\frac{n}{m} \frac{y}{1-y} \right]^{m/2+1} (1-y)^{(m+n)/2} \frac{n}{m} \frac{1}{(1-y)^2} dy - \frac{n^2}{(n-2)^2} \\ &= \frac{n^2}{m^2 B(m/2,n/2)} \int_0^1 y^{(m/2+2)-1} (1-y)^{(n/2-2)-1} dy - \frac{n^2}{(n-2)^2} \\ &= \frac{n^2}{m^2 B(m/2,n/2)} B(m/2+2,n/2-2) - \frac{n^2}{(n-2)^2} \\ &= \frac{n^2}{m^2} \frac{1}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \frac{\Gamma(m/2+2)\Gamma(n/2-2)}{1} - \frac{n^2}{(n-2)^2} \\ &= \frac{n^2}{m^2} \frac{1}{\Gamma(m/2)(n/2-1)(n/2-2)\Gamma(n/2-2)} \frac{(m/2+1)(m/2)\Gamma(m/2)\Gamma(n/2-2)}{1} - \frac{n^2}{(n-2)^2} \\ &= \frac{n^2}{m} \frac{(m+2)}{(n-2)(n-4)} - \frac{n^2}{(n-2)^2} \\ &= \frac{2n^2}{m(n-2)^2(n-4)} [m+n-2] \end{split}$$

20 2 変数の積分: 重積分と累次積分

20.1 重積分の定義と累次積分の計算

センチメートルなどの単位は省略すると、小学生のころに、縦 a 横 b 高さ c の直方体の体積は abc であると学んだことであろう。そして中学や高校では、半径 r の球の体積は $\frac{4}{3}\pi r^3$ と習ったことであろうが、これは後者は数 III を学ばない限り、丸暗記で済ませたことであろう。この節では、前者による定義を元にして、後者を導出することができる。

まず体積を定義する.

定義 20.1 (n 次元空間の体積) $i=1,\cdots,n$ について a_i,b_i は $a_i\leq b_i$ を満たす定数とする. n 次元空間における領域

$$A = \{(x_1, \dots, x_n) | a_1 \le x_1 \le b_1, \dots, a_n \le x_n \le b_n\}$$

について、0 以上の正数 $\prod_{i=1}^n (b_i-a_i)$ つまり $(b_1-a_0)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)$ を、A の体積といい $\operatorname{vol}(A)$ で表す。特に n=2 の場合は面積という.

n=3 のときが直方体の体積の定義となる.

a < b,c < d としたとき xy 平面上の領域 $S = \{(x,y)|a \le x \le b,c \le y \le d\}$ は、明らかに 4 点 A(a,c),B(b,c),C(b,d),D(a,d) を頂点とする長方形の境界線とその内部を表す。この S で定義される,2 変数関数 f(x,y)=p(ただし p>0 とする) について,xyz 空間での領域

$$E = \{(x, y, z) | (x, y) \in S, 0 \le z \le f(x, y)\}$$

については、直方体の体積 vol(E) = (b-a)(c-d)p である.

定理 12.2 で面積を極限値で表したように、体積についても極限値で表すことができる.

定理 20.2 m は正整数とする. a < b, c < d とし \mathbf{R}^2 の部分集合 $D = \{(x,y)|a \le x \le b, c \le y \le d\}$ で定義された有界な 2 変数実数値関数 f(x,y) について、

(i). D を 4^m 等分した各区間

$$I_{i,j} = \left\{ (x,y) \left| a + (i-1)\frac{b-a}{2^m} \le x \le a + i\frac{b-a}{2^m}, c + (j-1)\frac{d-c}{2^m} \le y \le c + j\frac{d-c}{2^m} \right. \right\}$$

$$(i = 1, 2, \dots, 2^m; j = 1, 2, \dots, 2^m)$$

における, f(x,y) の上限と下限をそれぞれ $\sup_{I_{i,j}} f(x,y), \inf_{I_{i,j}} f(x,y)$ とする. S_m, s_m を

$$S_m = \sum_{i=1}^{2^m} \sum_{j=1}^{2^m} \sup_{I_{i,j}} f(x,y) \frac{b-a}{2^m} \frac{d-c}{2^m}, \quad s_m = \sum_{i=1}^{2^m} \sum_{j=1}^{2^m} \inf_{I_{i,j}} f(x,y) \frac{b-a}{2^m} \frac{d-c}{2^m}$$

とすると、以下が成り立つ。

$$s_m \le s_{m+1} \le S_{m+1} \le S_m$$

(ii). f(x,y) が D で連続の時,以下が実数で成り立つ.

$$\lim_{m \to \infty} s_m = \lim_{m \to \infty} S_m \tag{20.1}$$

証明は省略する(bbb で証明する. ※まだ書いてない)

1 変数の定積分と同様に、(20.1) の収束値が、定義 bbb で定義される、f(x) の D における重積分

$$\iint_D f(x,y) dx dy$$

と一致する. 今の場合の D を明示して,

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy, \quad \iint_{a\leq x\leq b,c\leq y\leq d} f(x,y)dxdy$$

と書くこともある. 定積分と同様に、この重積分の値は負にもなりうるので、重積分の意味は

「D上で高さ f(x,y) を持つ立体について、その符号付きの体積」

と考えると分かりやすいだろう. ただし正負をはっきりさせて, また前定理よりも定義域を拡張して, 以下の 定理が成り立つ.

定理 20.3 D は, $D \subset \mathbf{R}^2$ の有界閉集合とする.D で定義された 2 つの 2 変数実数値関数 f(x,y),g(x,y) が D 上で $f(x,y) \geq g(x,y)$ であり,ともに D 上で連続とする.このとき,領域

$$V = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, g(x, y) \le f(x, y)\}$$

の体積 vol(V) は極限値として

$$\iint_{D} (f(x,y) - g(x,y)) dx dy$$

で得られる.

では VBA で、上からと下から近似するプログラムを書いてみよう.

例題 20.4 $D = \{(x,y)|1 \le x \le 2, 3 \le y \le 4\}$ として

$$\iint_D x^2 y dx dy$$

を上からと下からで近似する VBA プログラムを書いてみよ. つまり定理 20.2 での s_m, S_m をともに出力するプログラムである. ただし x^2y は,x についても y についても単調増加であることに注意せよ.

(解答)下のプログラムを、標準モジュールに書く、そして 1,2,3,4 を A1 セルから A4 セルに入力し、m の値 (せいぜい 12 以下の正整数) を B5 セルに入力した後、Alt+F8 キーで intSxy を実行するとよい

Function fxy(x, y)

,定義域でxについてもyについても単調増加ならば,どんなものでもよい.

$$fxy = x ^2 + y$$

End Function

Sub intSxy()

Dim a, b, c, d, m, outrange, N, i, j

```
Dim supV, infV, supF, infF
  Dim x0, y0, F00, F01, F10, F11
, a,b,c,d は A1 セル~A4 セルになるとする.
<sup>, m は B5 セルとして, 1 からせいぜい 10 までの整数とする.</sup>
D=\{(x,y) | a <= x <= b, c <= y <= d\} \ge UT
, ∬_D f(x,y)dxy を上からと下からで近似する.
, Dは [a,b] も [c,d] も 2^m 等分して、(2^m)^2 個の小さい長方形に分けて計算する.
, f は単調関数を仮定している.
,下からの近似は A7 セル,上からの近似は B7 セルに出力する.
  ,初期值入力
  a = Cells(1, 1)
  b = Cells(2, 1)
  c = Cells(3, 1)
  d = Cells(4, 1)
  m = Cells(5, 2)
  outrange = "A7:B7"
  ,メインプログラム
  N = 2 \hat{m}
  supV = 0
  infV = 0
  For i = 0 To N - 1
     x0 = a + (b - a) / N * i
     For j = 0 To N - 1
        y0 = c + (d - c) / N * j
        infF = fxy(x0, y0)
        supF = fxy(x0 + (b - a) / N, y0 + (d - c) / N)
        supV = supV + supF
        infV = infV + infF
     Next j
  Next i
  ,出力
  Range(outrange) = Array(infV / N ^ 2, supV / N ^ 2)
End Sub
```

(解答終)

もう少し工夫すればもう少し速いプログラムになるが、教育的にはこのあたりで十分であろう. なお

m=12 ならば、 $s_m=8.165100177, S_m=8.168233315$ あたりである.

重積分の実際の計算については、1変数の定積分を順番に計算することできる。定積分を1変数づつ順番に行うことを累次積分という。2変数関数の偏微分が、他の変数を一定として微分したように、2変数関数の累次積分も他の変数を一定として、次々と累次的に積分する。先の例題について、手計算で求めてみよう。

例題 20.5 $\int_1^2 \left\{ \int_3^4 x^2 y dy \right\} dx = \frac{49}{6}$ であることを証明せよ.また,前例題について計算した s_m, S_m と比較して $s_m \leq 49/6 \leq S_m$ となっていることを確かめよ.

(解答)

$$\int_{1}^{2} \left\{ \int_{3}^{4} x^{2} y dy \right\} dx = \int_{1}^{2} \left[x^{2} \frac{y^{2}}{2} \right]_{y=3}^{4} dx$$

$$= \int_{1}^{2} x^{2} (16/2 - 9/2) dx$$

$$= \int_{1}^{2} \frac{7}{2} x^{2} dx$$

$$= \frac{7}{2} \left[\frac{x^{3}}{3} \right]_{x=1}^{2}$$

$$= \frac{7}{2} \frac{8 - 1}{3}$$

$$= \frac{49}{6}$$

(解答終

この第1式の変形では,x を一定として $\int_3^4 x^2 y dy$ を計算して, $\frac{7}{2}x^2$ としている.その後これをさらに x=1 から 2 まで定積分したのである.また途中式の, $\left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_{y=3}^4$ の部分は 1 変数の場合と違っている.もし $\lceil x=1 \rceil$ が書いて無ければ,x で積分するのか y で積分するのかわからなくなるため,このように変数を明示するのが一般的である.

練習 20.6
$$\int_0^1 \left\{ \int_0^2 (x+y) dx \right\} dy = 3$$
 を証明せよ.

前例題の f(x,y) は, $1 \le x \le 2, 3 \le y \le 4$ の領域 (これを D とする) で連続関数でかつ, $f(x,y) \ge 0$ である.定理 20.3 から,領域

$$V = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, 0 \le z \le f(x, y)\}$$

について $\operatorname{vol}(V) = \iint_D f(x,y) dx dy$ である.これと例題の累次積分の関係について説明しよう. 領域 V について,ある $\hat{x} \in [1,2]$ の定数として,領域 V を平面 $x = \hat{x}$ で切った断面の面積は,

$$\int_{3}^{4} f(\hat{x}, y) dy$$

である.この値を $S(\hat{x})$ とする.この断面の面積の値を \hat{x} を動かすことによって積み重ねたものが領域 V の体積 $\mathrm{vol}(V)$ となる.したがって,

$$vol(V) = \int_{1}^{2} S(\hat{x})d\hat{x} = \int_{1}^{2} \left\{ \int_{3}^{4} f(\hat{x}, y)dy \right\} d\hat{x} = \int_{1}^{2} \left\{ \int_{3}^{4} f(x, y)dy \right\} dx$$

最後のように変形できるのは、文字 \hat{x} を文字 x に変更しても値は変わらないためである.

この考え方によって、xy平面における長方形の領域での連続関数には、以下の命題が成り立つ.

命題 20.7 (3 次元空間の立体の体積) 定数 a,b,c,d は a < b,c < d を満たす定数とする. 2 変数実数値関数 $f(x,y) \ge 0$ は,xy 平面の,領域 $D = \{(x,y)|a \le x \le b,c \le y \le d\}$ で連続とする. 3 次元空間における領域

$$V = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, 0 \le z \le f(x, y)\}$$

の体積は、極限値として以下のように累次積分で計算可能である.

$$vol(V) = \int_{c}^{d} \left\{ \int_{a}^{b} f(x, y) dx \right\} dy = \int_{a}^{b} \left\{ \int_{c}^{d} f(x, y) dy \right\} dx$$

証明は省略する (% bbb 節で、まだ書いていない)、また積分する順序はどちらからでも構わない、この命題では D が長方形の場合である、前命題をもう少し拡張したものが次の命題である。

命題 20.8 (3 次元空間の立体の体積その 2) 定数 a,b は a < b を満たす定数とする. [a,b] で定義される x の 2 つの関数 u(x),v(x) は [a,b] で連続で $u(x) \le v(x)$ を満たすとする. 2 変数実数値関数 $f(x,y) \ge 0$ は,xy 平面の,領域 $D = \{(x,y)|a \le x \le b, u(x) \le y \le v(x)\}$ で連続とする. 3 次元空間における領域

$$V = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, 0 \le z \le f(x, y)\}$$

の体積は、極限値として以下のように累次積分で計算可能である.

$$vol(V) = \int_{a}^{b} \left\{ \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right\} dx$$

証明は省略する (% bbb 節で、まだ書いていない)、y についても同様に言えるのだが,それを考えてみよ、ではこの命題を利用して半径 r の半球の体積を求める、r>0 として,領域

$$A = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \le r \}$$

が、原点を中心とする球である.これを xy 平面で切って $z \ge 0$ の領域

$$B = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 < r^2, z > 0\}$$

が半球の領域である.この範囲では $x^2+y^2+z^2=r^2$ は $z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ と同値である.また領域 B で z=0 となる (x,y) の範囲は, $x^2+y^2=r^2$ を満たす範囲であり,z>0 となる範囲は $x^2+y^2< r^2$ を満たす範囲である.そこでその両方を満たす範囲は, $D=\{(x,y)|-r\leq x\leq r, -\sqrt{r^2-x^2}\leq y\leq \sqrt{r^2-x^2}\}$ である.関数

$$f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

とすると、領域 B は、D 上で $0 \le z \le f(x,y)$ を満たす領域である。 f(x,y) は D 上連続関数なので、前命題より、

-

$$\operatorname{vol}(B) = \int_{-r}^{r} \left\{ \int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dy \right\} dx$$

$$\left(R > 0 \text{ odd} \right\} \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - y^2} dy = \frac{\pi R^2}{2} \text{ if } 0$$

$$= \int_{-r}^{r} \frac{\pi}{2} (r^2 - x^2) dx$$

$$= 2 \int_{0}^{r} \frac{\pi}{2} (r^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{r}$$

$$= \frac{2\pi}{3} r^3$$

なので、半径rの球の体積は、この2倍の $\frac{4\pi}{3}r^3$ である.

20.2 2変数の広義積分と積分変数変換公式

前節では、有界閉集合 D についての連続関数についての、重積分 $\iint_D f(x,y) dx dy$ について述べた。1 変数の定積分の場合と同様に重積分も広義積分で拡張できる。重積分の広義積分の定義は bbb 節で行うが、以下の定理が成り立つのは直感的に明らかであろう。

定理 20.9 定数 a,b,c,d は $-\infty \le a < b \le \infty, -\infty \le c < d \le \infty$ とする. (a,b) で定義された 1 変数実数値関数 f(x) と, (c,d) で定義された 1 変数実数値関数 g(y) が,それぞれ (a,b),(c,d) で広義積分可能とする. このとき, $D=\{(x,y)|a < x < b,c < y < d\}$ を定義域とする 2 変数実数値関数 f(x)g(y) は,D で広義積分可能であり,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_c^d g(y)dy$$

が成り立つ.

証明はしない. bbb 節で行う.

次に積分変数変換公式について述べる. これは, 1 変数の定積分における置換積分の拡張である.

図 14.1 での説明より,

命題 20.10 (変数変換公式その 1) a,b,c,d,u_1,u_2,v_1,v_2 を定数として, $u_1< u_2,v_1< v_2$ とする.長方形とその内部を表す $D=\{(u,v)|u_1\leq u\leq u_2,v_1\leq v\leq v_2\}$ について,1 次変換 x=au+bv,y=cu+dv によって,長方形 D が (x,y) 平面に写される写像を D' とする.

$$\iint_{D'} 1 dx dy = \iint_{D} |ad - bc| du dv$$

が成り立つ.

この命題は,D' の面積が D の面積の |ad-bc| 倍となることから明らかである.またこの命題の左辺の被積分関数は,D 上で 1 である.つまり左辺は,D 上での 1 の重積分である.では非積分関数を f(x,y) として考えよう. $ad-bc\neq 0$ とする.すなわち D' は平行四辺形である.その平行四辺形 D' の中に (x^*,y^*) があって,かつこの平行四辺形がとても小さい場合,「高さ」を $f(x^*,y^*)$ で近似することにより, $\iint_{D'} f(x,y) dx dy$

と $f(x^*,y^*)|ad-bc|$ はほぼ等しいことが言える.上の命題の場合,一次変換 x=au+bv,y=cu+dv だったので,

$$ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

が成り立つ. これを利用して, 前命題を広義積分まで拡張すると, 以下が成り立つ.

定理 20.11 (変数変換公式その 2) $D' \subset \mathbf{R}^2$ で定義された 2 変数実数値関数 f(x,y) は,D' で広義積分可能とする. u,v で定義される 2 変数 2 実数値関数

$$\boldsymbol{h}(u,v) = \begin{pmatrix} h^{<1>}(u,v) \\ h^{<2>}(u,v) \end{pmatrix}$$

が D で C^1 級かつ,D で $\det(\boldsymbol{h}'(u,v)) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial h^{<1>}}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial h^{<1>}}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial h^{<2>}}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial h^{<2>}}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \neq 0$ が成り立つとする. さらに,

 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{h}(u,v)$ によって,D が $\boldsymbol{h}(u,v)$ で (x,y) 平面に写される写像が D' になるとする. つまり $D' = \boldsymbol{h}(D)$ である.このとき以下が成り立つ.

$$\iint_{D'} f(x,y) dx dy = \iint_{D} f(h^{<1>}(u,v), h^{<2>}(u,v)) |\det(\mathbf{h}'(u,v)| du dv$$

この命題の式の右辺をもう少し書き直すと、x が u,v の関数 x(u,v) で、y が u,v の関数 y(u,v) で表されるとすれば、

$$\iint_D f(x(u,v),y(u,v)) \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| du dv$$

と書ける. こちらの方が覚えやすいであろう. また証明は bbb 節で行うが, 直感的な説明をここで行おう.

簡単化のために f(x,y) は定義域で 0 以上とする. 点 (u_0,v_0) と微小な 2 つの正の値 $\Delta u, \Delta v$ について,長 方形領域 $E=\{(u,v)|u_0-\Delta u\leq u\leq u_0+\Delta u,v_0-\Delta v\leq v\leq v_0+\Delta v\}$ が D に含まれているとする. E は h(u,v) によって E' に写されるとする. つまり E'=h(E).

また xy 平面上の E_0 は、一次変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

によって E から写される,平行四辺形領域とする.簡単化のため $G = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix}$ と置く.変数変換公式その 1 で説明したように,E と E_0 の面積比は,

$$\operatorname{vol}(E_0) = |\det(\mathbf{G})| \cdot \operatorname{vol}(E)$$

が知られている。E が小さいので,E' も E_0 と形はほとんど同じであり,また E の小ささから $\iint_E f(x,y) dx dy$ は,E 上にある高さ $f(x(u_0,v_0),y(u_0,y_0))$ の立体の体積とほとんど等しい.以上より,

$$\begin{split} \iint_{E'} f(x,y) dx dy &\coloneqq f(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0)) \mathrm{vol}(E') \\ &\coloneqq f(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0)) \mathrm{vol}(E_0) \\ &= f(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0)) |\det(\mathbf{G})| \mathrm{vol}(E) \\ &\coloneqq \iint_{E} f(x(u,v),y(u,v)) |\det(\mathbf{G})| du dv \end{split}$$

よって,

$$\iint_{E'} f(x,y) dx dy \coloneqq \iint_{E} f(x(u,v),y(u,v)) |\det(\boldsymbol{G})| du dv$$

これを E を色々動かして D まで積み上げて,

$$\iint_{D'} f(x,y) dx dy \coloneqq \iint_{D} f(x(u,v),y(u,v)) |\det(\boldsymbol{G})| du dv$$

が言える. この式は左辺と右辺を = でつないでいるが、極限の意味では等号で成り立つことが言える (証明はbbb 節).

具体例として、すでに紹介はしているが、証明をしていない以下の 2 つの式を示す。その前に、 $x=r\cos(\theta),y=r\sin(\theta)$ で、 $r\geq 0$ とすると、

$$\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} \right| = r$$

であることに注意する(計算して確かめよ). このような変数変換を極座標変換という.

また極座標変換以外では,x+y=u,y=v や,x=u,x+y=v を考えることが多い.これらを x,y を u,v で表すとそれぞれ以下のように書ける.

$$\begin{cases} x = u - v \\ y = v \end{cases}, \quad \begin{cases} x = u \\ y = v - u \end{cases}$$

このどちらの場合も,

$$\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \right| = 1$$

が言える.

定理 20.12 p > 0, q > 0 とする.

(i). (標準正規分布の密度関数について) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$

(ii). (ベータ関数とガンマ関数)
$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(n+q)}$$

証明 (i) の証明. $A=\int_0^\infty e^{-x^2/2}dx$ とする. これが $\sqrt{2\pi}/2$ となることを示せば良い. また, $e^{-x^2/2}>0$ なので、明らかに A>0 でありかつ、

$$A = \int_0^2 e^{-x^2/2} dx + \int_2^\infty e^{-x^2/2} dx < 2 + \int_2^\infty e^{-x} dx < 3$$

┙

なので、A は広義積分の値として存在する。定理 20.9 より

$$A^2 = \iint_{(0,\infty)\times(0,\infty)} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$$

$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$$
 で極座標変換すると
$$= \lim_{r_0 \to +0} \iint_{r_0 \le r < \infty, 0 \le \theta \le \pi/2} e^{-r^2/2} r dr d\theta$$

$$= \lim_{r_0 \to +0} \int_{r_0}^{\infty} \left\{ \int_{0}^{\pi/2} e^{-r^2/2} r d\theta \right\} dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{r_0 \to +0} \int_{r_0}^{\infty} e^{-r^2/2} r dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{r_0 \to +0} [-e^{r^2/2}]_{r=r_0}^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

よって $A = \sqrt{\pi/2} = \sqrt{2\pi}/2$.

(ii) の証明: 定理 20.9 より

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \iint_{(0,\infty)\times(0,\infty)} x^{p-1}e^{-x}y^{q-1}e^{-y}dxdy$$

$$x = u, x + y = v \ \ \text{つまり} \ \left(y = v - u\right) \ \text{と変数変換して} = \int_0^\infty \left\{\int_0^v u^{p-1}(v-u)^{q-1}e^{-v}du\right\}dv$$

$$\left(命題\ 18.16\text{(ii)}\ \text{より}\right) \ = \int_0^\infty v^{p+q-1}e^{-v}B(p,q)dv$$

$$= \Gamma(p+q)B(p,q)$$

系 20.13 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

前定理の (i) から, $\sqrt{\pi/2}=\int_0^\infty e^{-x^2/2}dx$. これに $x=\sqrt{2y}$ と変数変換することにより,

$$\sqrt{\pi/2} = \int_0^\infty e^{-y} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty y^{1/2 - 1} e^{-y} dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma(1/2)$$

よって、 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

21 n変数の積分: 簡単に紹介

 $n \ge 3$ の場合でも前章で学んだことが表記を変えずほとんど同様に成り立つ. $a, b, x \in \mathbb{R}^n$ として, a, b が 定数として与えられ $i = 1, \dots, n$ について, $a_i < b_i$ とする. n 次元直方体

$$D = \{ x | a_i \le x_i \le b_i \quad (i = 1, \dots, n) \}$$

を定義域とする連続関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ について,前章の最初の (i) と同じ方法で D を $(2^n)^m$ 等分して上から S_m と下から S_m を作ると,前章の最初の (ii) のように極限値が得られる.それを,

$$\int \cdots \iint_D f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

と書く. 前章の 2 変数の場合とほぼ同様の定義である. さらに D が直方体でなく有界閉集合の場合でも定義されるのも 2 変数の場合と同じであり、定理 20.3 と同様に以下が成り立つ.

定理 21.1 D は、 $D \subset \mathbf{R}^n$ の有界閉集合とする。D で定義された 2 つの n 変数実数値関数

$$f(x_1,\cdots,x_n),g(x_1,\cdots,x_n)$$

が D上で $f(x_1, \dots, x_n) \ge g(x_1, \dots, x_n)$ であり、ともに D上で連続とする。このとき、領域

$$V = \{(x_1 \cdots, x_n, z) | (x_1, \cdots, x_n) \in D, g(x_1, \cdots, x_n) \le z \le f(x_1, \cdots, x_n)\}$$

の体積 vol(V) は極限値として

$$\int \cdots \iint_{D} \{f(x_1, \cdots, x_n) - g(x_1, \cdots, x_n)\} dx_1 \cdots dx_n$$

で得られる.

2変数の場合と同様に、重積分可能であれば、1変数ごとの累次積分も可能である。変数の順序が任意であることも同様である

広義積分についても取り扱いが面倒なのは 2 変数の場合と同様であるが、定理 20.9 と同様に以下が成り立つ.

定理 21.2 $i=1,\cdots,n$ について,定数 a_i,b_i は $-\infty \leq a_i < b_i \leq \infty$ を満たすとする. $a_i < x < b_i$ で定義された n 個の変数実数値関数 $f^{<i>>}(x)$ が,それぞれ (a_i,b_i) で広義積分可能とする.このとき,

$$D = \{(x_1, \dots, x_n) | a_i < x < b_i \ (i = 1, \dots, n) \}$$

を定義域とする n 変数実数値関数 $f^{<1>}(x_1)\cdots f^{< n>}(x_n)$ は、D で広義積分可能であり、

$$\int \cdots \iint_D \{f^{<1>}(x_1) \cdots f^{}(x_n)\} dx_1 \cdots dx_n = \left(\int_{a_1}^{b_1} f^{<1>}(x_1) dx_1\right) \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f^{}(x_n) dx_n\right)$$
 が 立つ.

変数変換公式も2変数と同様である.

定理 21.3 (n 変数の積分の変数変換公式) $D' \subset \mathbf{R}^n$ で定義された n 変数実数値関数 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \cdots, x_n)$ は、D' で広義積分可能とする. $D \in \mathbf{R}^n$ で定義される n 変数 n ベクトル実数値関数

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} h^{<1>}(u_1, \cdots, u_n) \\ \vdots \\ h^{}(u_1, \cdots, u_n) \end{pmatrix}$$

が D において、 C^1 級かつヤコビアン $\det(\mathbf{h}'(\mathbf{u})) \neq 0$ とする。 さらに $\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{u})$ によって、D が $\mathbf{h}(\mathbf{u})$ で (x_1, \cdots, x_n) 平面に写される写像が D' になるとする。 つまり $D' = \mathbf{h}(D)$ である。 このとき以下が成り立つ。

$$\int \cdots \iint_{D'} f(\boldsymbol{x}) dx_1 \cdots dx_n = \int \cdots \iint_{D} f(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})) |\det(\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{u})| du_1 \cdots du_n$$

_

22 確率・統計・計量経済学で出てくる積分(2)

定義 22.1 (2変数連続形確率変数の定義)

(i). X,Y が 2 変数連続形確率変数であるとは, \mathbf{R}^2 で定義された $f(x,y) \geq 0$ があって,任意の領域 $A \subset \mathbf{R}^2$ について,(X,Y) が A の範囲の値をとる確率が,

$$\Pr((X,Y) \in A) = \iint_A f(x,y) dx dy$$

と表されるときである.

- (ii). (i) での f(x,y) を X,Y の同時密度関数という.
- (iii). (i) での f(x,y) から導出される

$$g_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$
, (resp. $g_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$)

を X の (resp. Y の) 周辺密度関数と呼ぶ.

(iv). 同時密度関数と周辺密度関数について、任意のx,yについて、

$$f(x,y) = g_X(x) \cdot g_Y(y)$$

が成り立つ時, X,Y は独立であるという.

(v). X,Y の同時密度関数を f(x,y) とする. E[X],E[Y] が存在する時, X,Y の共分散 Cov(X,Y) を以下で定義する.

$$Cov(X,Y) = \iint_{\mathbf{R}^2} (x - E[X])(y - E[Y])f(x,y)dxdy$$

(vi). X,Y の分散をそれぞれ V[X],V[Y] として、ともに存在する時、X,Y の相関係数を以下で定義する.

$$\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V[X]V[Y]}}$$

(vii). (vi)のV[X],V[Y]について、対称行列

$$\begin{pmatrix} V[X] & Cov(X,Y) \\ Cov(Y,X) & V[Y] \end{pmatrix}$$

を, X,Y の共分散行列という.

(iii) の周辺密度関数については、1変数の密度関数と同じように考えればよいので、以下が常に成り立つ.

$$\Pr(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} g_X(p)dp, \quad \left(\text{resp. } \Pr(Y \le y) = \int_{-\infty}^{y} g_Y(q)dq\right)$$

次に,定義 22.1(v) を一般化する.

命題 22.2 X,Y,f(x,y) は (v) と同様とする. x,y の 2 変数実数値関数 h(x,y) があるとき,h(X,Y) は 1 変数実数値関数である. この確率変数の期待値 E[h(X,Y)] は

$$E[g(X,Y)] = \iint_{\mathbf{R}^2} h(x,y)f(x,y)dxdy$$

この命題から、定義 22.1(v) の右辺を少し簡単にできる.

命題 22.3 (共分散公式) 連続形確率変数 X,Y の共分散 Cov(X,Y) について、以下が成り立つ.

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \iint_{\mathbf{R}^2} xyf(x,y)dxdy - E[X]E[Y]$$

定義 22.1(iv) の独立と (v) の共分散については、以下が成り立つ.

命題 22.4 X,Y が 2 変数連続形確率変数とする. X,Y が独立ならば共分散 Cov(X,Y) は 0 である.

証明 同時密度関数と周辺密度関数を定義 22.1(iv) と同様とする.

$$\begin{split} Cov(X,Y) &= \iint_{\mathbf{R}^2} (x - E[X])(y - E[Y])f(x,y)dxdy \\ &= \iint_{\mathbf{R}^2} (x - E[X])(y - E[Y])g_X(x)g_Y(y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (y - E[Y])g_Y(y) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])g_X(x)dx \right\} dy \\ &= 0 \end{split}$$

逆が成り立たないのは、離散形の場合と同様である. 例えば、

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2\pi}\sqrt{1-x^2-y^2} & \text{ (if } 0 \leq x^2+y^2 \leq 1) \\ 0 & \text{ (その他のとき)} \end{cases}$$

とすると, E[XY] = 0と

$$g_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & \text{ (if } |x| \leq 1) \\ 0 & \text{ (その他のとき)} \end{cases}, \quad g_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-y^2) & \text{ (if } |y| \leq 1) \\ 0 & \text{ (その他のとき)} \end{cases}$$

が成り立つ. 明らかに $f(0,0) \neq g_X(0)g_Y(0)$ なので、独立ではない.

定義 22.1(vi) については、離散形確率変数の場合と同様である.

命題 22.2 では、2 変数連続形確率変数から1 変数確率変数への変数変換について述べた、さらに応用して2 変数連続形確率変数から2 変数連続形確率変数への変数変換について述べる.

定理 22.5 (2 変数実数値連続形確率変数の変数変換) X,Y が同時密度関数 $f_{X,Y}(x,y)$ を持つ 2 変数連続形 確率変数とする. u,v の C^1 級の, 2 つの 2 変数実数値関数 $h^x(u,v),h^y(u,v)$ があって, 定義域で

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial h^x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial h^x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial h^y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial h^y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \neq 0$$

とする、上の左辺の行列式をヤコビアン J(u,v) で表すものとする、任意の X,Y について、変数 U,V が

$$X = h^x(U, V), Y = h^y(U, V)$$

となるとき, U.V も確率変数で, その同時密度関数は,

$$f_{X,Y}(h^x(u,v),h^y(u,v))\cdot |J(u,v)|$$

証明は、連続形確率変数の定義と定理 20.11 から言える.

命題 22.6 (正規分布は線形結合について閉じている) $a,b,\mu_x,\sigma_x,\mu_y,\sigma_y$ は定数で, $a\neq 0, b\neq 0,\sigma_x>0,\sigma_y>0$ とする. $X\sim N(\mu_x,\sigma_x^2),Y\sim N(\mu_y,\sigma_y^2)$ で、かつ X,Y が独立ならば、

$$aX + bY \sim N(a\mu_x + b\mu_y, a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2)$$

_

証明

定理 19.5 より $aX\sim (a\mu_x,a^2\sigma_x^2),\ bY\sim (b\mu_y,b^2\sigma_y^2)$ が言えるので、上の a=b=1 の場合のみ、つまり

$$X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$$

を示せばよい、独立なので X,Y の同時密度関数は

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]$$

と書ける. U=X+Y, V=Y つまり X=U-V, Y=V としたときの U,V の同時密度関数は、前定理より、

$$\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left[-\frac{(u-v-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(v-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right] \cdot \left| \det\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left[-\frac{\sigma_y^2(u-v-\mu_x)^2 + \sigma_x^2(v-\mu_y)^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2}\right]$$

U についての周辺密度関数 $g_U(u)$ が, $N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$ となることを示せば良い.

$$g_{U}(u) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x}\sigma_{y}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\sigma_{y}^{2}(u-v-\mu_{x})^{2} + \sigma_{x}^{2}(v-\mu_{y})^{2}}{2\sigma_{x}^{2}\sigma_{y}^{2}}\right] dv$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_{x}\sigma_{y}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\sigma_{x}^{2} + \sigma_{y}^{2})v^{2} - 2(\sigma_{y}^{2}u - \sigma_{y}^{2}\mu_{x} + \sigma_{x}^{2}\mu_{y})v + \sigma_{y}^{2}(u-\mu_{x})^{2} + \sigma_{x}^{2}\mu_{y}^{2}}{2\sigma_{x}^{2}\sigma_{y}^{2}}\right] dv$$

$$A = \frac{\sigma_y^2 u - \sigma_y^2 \mu_x + \sigma_x^2 \mu_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$
 とすると,

$$\begin{split} g_U(u) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)(v - A)^2 - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)A^2 + \sigma_y^2(u - \mu_x)^2 + \sigma_x^2\mu_y^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2} \right] dv \\ &= \frac{\exp\left[-\frac{-(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)A^2 + \sigma_y^2(u - \mu_x)^2 + \sigma_x^2\mu_y^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2} \right]}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)(v - A)^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2} \right] dv \\ &= \frac{\exp\left[-\frac{-(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)A^2 + \sigma_y^2(u - \mu_x)^2 + \sigma_x^2\mu_y^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2} \right] \cdot \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sigma_y}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \exp\left[-\frac{-(\sigma_y^2 u - \sigma_y^2 \mu_x + \sigma_x^2 \mu_y)^2 + (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)\sigma_y^2(u - \mu_x)^2 + (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)\sigma_x^2\mu_y^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \exp\left[-\frac{-2(\sigma_y^2 u - \sigma_y^2 \mu_x)\sigma_x^2 \mu_y + \sigma_x^2\sigma_y^2(u - \mu_x)^2 + \sigma_y^2\sigma_x^2\mu_y^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \exp\left[-\frac{-2(u - \mu_x)\mu_y + (u - \mu_x)^2 + \mu_y^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \exp\left[-\frac{[u - (\mu_x + \mu_y)]^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)} \right] \end{split}$$

これは $N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$ の密度関数と一致する.

系 22.7 (n 個の正規分布の和) $i=1,\cdots,n$ について $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$ とし、各 X_i は各々独立とする.このとき.

(i).
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$
(ii).
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

証明 (i) は前命題からすぐ言える. (ii) は (i) を 1/n 倍したものなので,定理 19.5 から言える. \Box

定理 22.8 $(ガンマ分布は第 2 引数が等しい時に和について閉じている) <math>p>0, q>0, \beta>0$ とする. X がパラメータ (p,β) のガンマ分布に従い,Y がパラメータ (q,β) のガンマ分布に従い,X,Y が独立とする. このとき X+Y はパラメータ $(p+q,\beta)$ のガンマ分布に従う.

証明 仮定より X,Y の同時密度関数は

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)\beta^{p+q}} x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)/\beta} & \quad (\text{if } x>0,y>0) \\ 0 & \quad (その他の時) \end{cases}$$

従って U=X+Y,V=Y つまり X=U-V,Y=V としたときの U,V の同時密度関数 $h_{U,V}(u,v)$ は,

$$h_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)\beta^{p+q}} (u-v)^{p-1} v^{q-1} e^{-u/\beta} & \text{ (if } u-v>0, v>0) \\ 0 & \text{ (その他の時)} \end{cases}$$

このときの U の周辺密度関数 $g_U(u)$ が,パラメータ $(p+q,\beta)$ のガンマ分布となることを示せばよい。 $u\leq 0$ のときは, $g_U(u)=0$ である。 u>0 のときは,

$$\begin{split} g_U(u) &= \int_{-\infty}^\infty h_{u,v}(u,v) dv \\ &= \frac{e^{-u/\beta}}{\Gamma(p)\Gamma(q)\beta^{p+q}} \int_0^u (u-v)^{p-1} v^{q-1} dv \\ \text{命題 18.16(ii)} より &= \frac{e^{-u/\beta}}{\Gamma(p)\Gamma(q)\beta^{p+q}} u^{p+q-1} B(p,q) \\ &= \frac{u^{p+q-1} e^{-u/\beta}}{\Gamma(p+q)\beta^{p+q}} \end{split}$$

以上より、 $g_U(u)$ はパラメータ $(p+q,\beta)$ のガンマ分布の密度関数と一致する.

系 22.9 (カイ 2 乗分布は和について閉じている)m,n は正整数とする. $X\sim\chi^2(m),Y\sim\chi^2(n)$ で X,Y が独立の時, $X+Y\sim\chi^2(m+n)$

系 22.10 (n 個の正規分布を基準化したものの 2 乗和) $i=1,\cdots,n$ について $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$ とし,各 X_i は 各々独立とする。このとき、

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n)$$

定理 22.11 (標準正規分布と t 分布の関係)n は正整数とする. $Z \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$ で独立とする. このとき,

$$\frac{Z}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$

証明 仮定より Z, X の同時密度関数は

$$f_{Z,Y}(z,y) = egin{cases} rac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} rac{y^{n/2-1}e^{-y/2}}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} & & ext{(if } y > 0) \ 0 & & ext{(その他の時)} \end{cases}$$

 $U=Z/\sqrt{Y/n}, V=Y$ とする. つまり $Z=U\sqrt{V/n}, Y=V$ のときの,U,V の同時密度関数 $h_{U,V}(u,v)$ は

$$h_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{e^{-u^2v/(2n)}}{\sqrt{2\pi}} \frac{v^{n/2-1}e^{-v/2}}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} \sqrt{v/n} & \frac{U}{\sqrt{n}} \frac{1}{2\sqrt{v}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| & \text{(if } v > 0) \\ 0 & (その他の時) \end{cases}$$

このときのUの周辺密度関数 $g_U(u)$ が、t(n)となることを示せばよい.

$$\begin{split} g_U(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{U,V}(u,v) dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Gamma(n/2) 2^{n/2}} \int_0^{\infty} e^{-u^2 v/(2n)} v^{n/2-1} e^{-v/2} \cdot \frac{v^{1/2}}{\sqrt{n}} dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Gamma(n/2) 2^{n/2} \sqrt{n}} \int_0^{\infty} v^{(n+1)/2-1} \exp\left[-\frac{u^2+n}{2n}v\right] dv \\ \text{命題 18.16(i)} \ \&\, \emptyset \ &= \frac{1}{\sqrt{2} \Gamma(1/2) \Gamma(n/2) 2^{n/2} \sqrt{n}} \cdot \Gamma((n+1)/2) \left[\frac{2n}{u^2+n}\right]^{(n+1)/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} B(1/2,n/2) 2^{n/2} \sqrt{n}} \cdot 2^{n/2+1/2} (u^2/n+1)^{-(n+1)/2} \\ &= \frac{1}{B(1/2,n/2) \sqrt{n}} \cdot (1+u^2/n)^{-(n+1)/2} \end{split}$$

これは t(n) の密度関数と一致する.

定理 22.12 (カイ 2 乗分布と F 分布の関係)m,n は正整数とする. $X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n)$ で独立の時, $\frac{X/m}{Y/n} \sim F(m,n)$

証明

仮定より X,Y の同時密度関数は,

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)2^{(m+n)/2}} x^{m/2-1} y^{n/2-1} e^{-(x+y)/2} & \text{ (if } x > 0, y > 0) \\ 0 & \text{ (その他のとき)} \end{cases}$$

 $U=rac{X/m}{Y/n}, V=Y/n$ のとき,つまり X=mUV, Y=nV のときの U,V の同時密度関数 $h_{U,V}(u,v)$ は,

$$h_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)2^{(m+n)/2}} (muv)^{m/2-1} (nv)^{n/2-1} e^{-(muv+nv)/2} \left| \det \begin{pmatrix} mV & mU \\ 0 & n \end{pmatrix} \right| & \text{(if } u > 0, v > 0) \\ 0 & \text{(その他のとき)} \end{cases}$$

U の周辺密度関数 $g_U(u)$ が F(m,n) の密度関数と一致することを示せば良い. $u \leq 0$ のとき $g_U(u) = 0$ である. u > 0 のとき,

$$\begin{split} g_U(u) &= \frac{1}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)2^{(m+n)/2}} \int_0^\infty (muv)^{m/2-1} (nv)^{n/2-1} e^{-(muv+nv)/2} \cdot mnv dv \\ &= \frac{u^{m/2-1}m^{m/2}n^{n/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)2^{(m+n)/2}} \int_0^\infty v^{(m+n)/2-1} \exp\left[-\frac{mu+n}{2}v\right] dv \\ & \hat{m} \mathbb{B} \ \mathbf{18.16} \\ \text{(i)} \ \& \ \emptyset \ &= \frac{u^{m/2-1}m^{m/2}n^{n/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)2^{(m+n)/2}} \Gamma((m+n)/2) \left[\frac{2}{mu+n}\right]^{(m+n)/2} \\ &= \frac{u^{m/2-1}m^{m/2}n^{n/2}}{B(m/2,n/2)} (mu+n)^{-(m+n)/2} \Gamma((m+n)/2) \left[\frac{2}{mu+n}\right]^{(m+n)/2} \\ &= \frac{(m/n)^{m/2}}{B(m/2,n/2)} u^{m/2-1} (1+mu/n)^{-(m+n)/2} \end{split}$$

以上より $g_U(u)$ が F(m,n) の密度関数と一致する.

定義 22.13 (2 変数同時正規分布の定義) 定数 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ は $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1$ とする. X_1, X_2 が以下の同時密度関数

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi (\det(\mathbf{G}))^{1/2}} \exp\left[-\frac{t(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{2}\right]$$

$$\left(ただし \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, t\mathbf{x} は \mathbf{x} の転置を表し, \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$$

$$(22.1)$$

を持つ時, X_1, X_2 はパラメーター $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ の 2 変数同時正規分布に従うという.

(22.1) 式を書き下せば,

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{(x_1 - \mu_1 - x_2 - \mu_2)\begin{pmatrix} \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix}}{2(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{\sigma_2^2(x_1 - \mu_1)^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) + \sigma_1^2(x_2 - \mu_2)^2}{2(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}\right] (22.2)$$

この式よりも、(22.1) の方がスッキリしているし、n 変数同時正規分布への拡張にもなる。 簡単に以下が成り立つ。

命題 22.14 X_1, X_2 が前定義の 2 変数同時正規分布に従う時,以下が成り立つ.

- (i). $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
- (ii). $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
- (iii). G は X_1, X_2 の共分散行列
- (iv). X_1, X_2 の相関係数は ρ

┙

証明 (ii) は (i) と同様に, (iv) は (i)(ii)(iii) から言えるので, (i) と (iii) のみ証明する. (i) の証明: (22.2) 式より,

上の積分部分は x_1 を固定して, $N(\rho(x_1-\mu_1)/\sigma_1,(1-\rho^2))$ の密度関数を $-\infty$ から ∞ への広義積分したものであり,1 となるので,

$$g_{X_1}(x_1) = \frac{\exp[-(x_1 - \mu_1)^2/(2\sigma_1^2)]}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}$$

これは $N(\mu_1, \sigma_1)$ の密度関数と一致するので, X_1 は平均 μ_1 分散 σ_1 の正規分布に従う.

(iii) の証明: $E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] = \rho \sigma_1 \sigma_2$ を示せば良い.

$$\begin{split} E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] &= \iint_{\mathbf{R}^2} (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &(y_1 = (x_1 - \mu_1)/\sigma_1, y_2 = (x_2 - \mu_2)/\sigma_2$$
で変数変換して)
$$&= \iint_{\mathbf{R}^2} \sigma_1 y_1 \sigma_2 y_2 f(\sigma_1 y_1 + \mu_1, \sigma_2 y_2 + \mu_2) \sigma_1 \sigma_2 dy_1 dy_2 \\ &= \sigma_1^2 \sigma_2^2 \frac{1}{2\pi (1 - \rho)^2 \sigma_1 \sigma_2} \iint_{\mathbf{R}^2} y_1 y_2 \exp\left[-\frac{y_1^2 - 2\rho y_1 y_2 + y_2^2}{2(1 - \rho^2)}\right] dy_1 dy_2 \\ &= \sigma_1 \sigma_2 \frac{1}{2\pi (1 - \rho)^2} \int_{-\infty}^{\infty} y_2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} y_1 \exp\left[-\frac{(y_1 - 2\rho y_2)^2 + (1 - \rho^2)y_2^2}{2(1 - \rho^2)}\right] dy_1 \right\} dy_2 \\ &= \sigma_1 \sigma_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y_2 \exp[-y_2^2/2] \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} (1 - \rho^2)^{1/2}} y_1 \exp\left[-\frac{(y_1 - \rho y_2)^2}{2(1 - \rho^2)}\right] dy_1 \right\} dy_2 \end{split}$$

 $\{\}$ 内の値は、 y_2 を固定したときの、 $N(\rho y_2, 1-\rho^2)$ の期待値なので、 ρy_2 である. よって、

$$E[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)]=\rho\sigma_1\sigma_2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y_2^2\exp[-y_2^2/2]dy_2$$
 (積分部分は $N(0,1)$ の分散なので) = $\rho\sigma_1\sigma_2\cdot 1$

この命題 (iii) で $\rho = 0$ を代入すると、より正規分布の場合命題 22.4 の逆が成り立つ.

系 22.15 X,Y がともに正規分布に従い,X,Y の共分散や相関係数が 0 であるならば,X,Y は独立である.」

証明 前命題より共分散行列は $m{G} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ となるので,同時密度関数は,

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{(x_1 - \mu_1 - x_2 - \mu_2) G^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{\sigma_2^2(x_1 - \mu_1) + \sigma_1(x_2 - \mu_2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right]$$

$$= \frac{\exp[-(x_1 - \mu_1)^2/(2\sigma_1^2)]}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \frac{\exp[-(x_2 - \mu_2)^2/(2\sigma_2^2)]}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$$

(命題 22.14(i)(ii) より) = $g_{X_1}(x_1)g_{X_2}(x_2)$

任意の x_1, x_2 について成り立つので、 X_1 と X_2 は独立である。

X,Y が独立のときに、正規分布が線形結合について閉じていることは命題 22.6 で示した。この章の最後に、共分散があっても正規分布が線形結合について閉じていることを示そう。

定理 22.16 X_1, X_2 が定義 22.13 の 2 変数同時正規分布に従うとする. a, b を定数としたとき $aX_1 + bX_2$ は平均 $aE[X_1] + bE[X_2]$ (つまり = $a\mu_1 + b\mu_2$) ,分散 $a^2Var[X_1] + 2abCov(X_1, X_2) + a_2^2Var[X_2]$ (つまり $a^2\sigma_1^2 + 2ab\rho\sigma_1\sigma_2 + b^2\sigma_2^2$) の正規分布に従う.

a と b の少なくとも片方が 0 のときは自明なので,a,b ともに非 0 とする.天下り的だが,定数 p,q を $p=b\sigma_2^2+\rho\sigma_1\sigma_2a, q=-(a\sigma_1^2+\rho\sigma_1\sigma_2b)$ として,

$$U = a(X_1 - \mu_1) + b(X_2 - \mu_2), V = p(X_1 - \mu_1) + q(X_2 - \mu_2)$$
(22.3)

とする. $(aX_1+bX_2)=U+a\mu_1+b\mu_2$ なので、1 変数の正規分布の線形変換換から、 $M=a^2\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+b^2\sigma_2^2$ として、U が平均 0、分散 M の正規分布に従うことを示せばよい。簡単な計算より、 $|\rho|<1$ から M>0 が言える.

 $aq-bp=-(a^2\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2ab+b^2\sigma_2)<0$ である。(22.3) 式から X_1,X_2 を以下のように U,V で表すことができる。なお M の定義より,aq-bp=-M なので,

$$\begin{pmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-M} \begin{pmatrix} q & -b \\ -p & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} -q & b \\ p & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

よって

$$X_1 = (-qU + bV)/M + \mu_1, X_2 = (pU + aV)/M + \mu_2$$

従って、ヤコビ行列式の絶対値は

$$\left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial X_1}{\partial V} & \frac{\partial X_1}{\partial V} \\ \frac{\partial X_2}{\partial U} & \frac{\partial X_2}{\partial V}\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}-q/M & b/M \\ p/M & -a/M\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{M}$$

定義 22.13 の同時密度関数 f() と定理 22.5 から, U,V の同時密度関数は

$$f(-qu/M + bv/M + \mu_1, pu/M - av/M + \mu_2) \left| \det \begin{pmatrix} -q/M & b/M \\ p/M & -a/M \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2} \exp \left[-\frac{\sigma_2^2 \left(\frac{-qu+bv}{M}\right)^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \left(\frac{-qu+bv}{M}\right) \left(\frac{pu-av}{M}\right) + \sigma_1^2 \left(\frac{pu-av}{M}\right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \right] \cdot \frac{1}{M}$$

 $A = 2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2$ とすると,

$$= \frac{1}{AM} \exp \left[-\frac{\sigma_2^2 (-qu+bv)^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2 (-qu+bv) (pu-av) + \sigma_1^2 (pu-av)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2 \sigma_2^2 M^2} \right]$$

実は、p,qの定め方は、上の \exp の中を展開したときに、uvの項が消えるように作ってある。整理すると、

$$= \frac{1}{AM} \exp \left[-\frac{Mv^2 + (p^2\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2pq + q^2\sigma_2^2)u^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2M^2} \right]$$

さらに、p,q をもとに戻して、 u^2 の係数を計算すると

$$\begin{split} &= \frac{1}{AM} \exp \left[-\frac{Mv^2 + M(1 - \rho^2)\sigma_1^2 \sigma_2^2 u^2}{2(1 - \rho^2)\sigma_1^2 \sigma_2^2 M^2} \right] \\ &= \frac{1}{AM} \exp \left[-\frac{u^2}{2M} \right] \exp \left[-\frac{v^2}{2(1 - \rho^2)\sigma_1^2 \sigma_2^2 M} \right] \end{split}$$

U の周辺密度関数関数は、この U,V の同時密度関数を、v について $-\infty$ から ∞ まで積分すれば良いので、

$$g_U(u) = rac{\exp\left[-rac{u^2}{2M}
ight]}{AM} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-rac{v^2}{2(1-
ho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2M}
ight] dv$$
 $N(0,(1-
ho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2M)$ の積分より, $=rac{\exp\left[-rac{u^2}{2M}
ight]}{AM} \sqrt{2\pi(1-
ho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2M}$ A を戻して約分して, $=rac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{M}} \exp\left[-rac{u^2}{2M}
ight]$

これはUが平均0、分散Mの正規分布に従うことを表す。

第V部

II 部より簡単で、ごくたまに出会うもの

23 微分方程式

この章では、ごくごく簡単なものだけ取り上げる.

23.1 1階線形微分方程式

xの関数 y(x) について,

$$y'(x) = x^2 \tag{23.1}$$

となる y(x) は, x^2 の原始関数 $x^3/3 + C(C$ は任意の定数) であり,それ以外存在しない.

また y(1) = 3 などのように、ある x についての値を満たすことを求められることもある。上の例でいうと、

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$
 の解は, $y(x) = x^3/3 + 8/3$ (23.2)

となる.解き方は, $y'(x)=x^2$ から $y(x)=x^3/3+C$ が得られて,あとは C を求める.得られた式に x=1 を代入して,3=1/3+C.つまり C=8/3.よって $y(x)=x^3/3+8/3$ が得られる.

(23.1) 式のように、未知の関数 y(x) について、y'(x) が存在し、y'(x) を必ず含めて、それ以外に x の関数や y(x) によって作られる 1 本の式を、y(x) の 1 階微分方程式という。 さらに y''(x) など 1 階以外もある (次節参照) が、それはともかく微分方程式を満たす y(x) を求めることを微分方程式を求めるといい、求めた y(x) を、微分方程式の解という。したがって、「(23.1) 式の微分方程式の解は $y(x) = x^3/3 + C(C$ は任意の定数) である。」という。

また y(x) の定義域については、微分方程式を解いて、解が得られた後に考えればよい.

微分方程式は色々なものが作られるが,経済学では (23.1) 式を含めた以下の線形微分方程式を求めることがほとんどである.

定義 23.1 x の関数 p(x), q(x) が与えられたとする. 以下の式を, y(x) の 1 階の線形微分方程式という.

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$$
(23.3)

実際, (23.3) 式において, p(x) = 0, $q(x) = x^2$ としたものが (23.1) 式である. p(x) が定数で q(x) = 0 のもの, つまり a が定数で,

$$y'(x) + ay(x) = 0 (23.4)$$

となるものを 1 階定係数線形微分方程式という. a=0 の場合は明らかに y(x)=C(C は定数), $a\neq 0$ の場合の解の求め方は以下となる. まず y(x) の係数部分の a に注目する. a を x で積分した ax を考え,その指数関数 e^{ax} を両辺に掛ける.

$$y'(x)e^{ax} + ay(x)e^{ax} = 0$$

積の微分より左辺は、 $y(x)e^{ax}$ を x で微分した形である. よって両辺を x で積分して、

$$y(x)e^{ax} = C$$

(C は任意の定数). 両辺に e^{-x} を掛けて

$$y(x) = Ce^{-ax}$$
 (C は任意の定数) (23.5)

が得られる。これに a=0 を代入すると a=0 の場合の解と一致する。よりわかりやすい形にして, $a=-\lambda$ として移項して以下が言える。

命題 23.2 λは定数とする. 1 階定係数線形微分方程式

$$y'(x) = \lambda y(x)$$

の解は、 $y(x) = Ce^{\lambda x}(C$ は任意の定数) のみである.

解がこれのみであることの証明は面倒なので省略する. 同様の求め方から, p(x) の原始関数 $P(x) = \int p(x)dx$ などを用いて以下が言える.

命題 23.3 1階線形微分方程式 (23.3)の解は,

$$y(x) = e^{-P(x)} \int q(x)e^{P(x)}dx$$
 (23.6)

ただし P(x) は p(x) の原始関数である.

無論覚えておくと楽ではあるが、テストなどで出てくる簡単なものは、y'(x) + ay(x) = 0 を解いたように、順に手計算でやっていくとよい。以下の例題を参考にすると良い。

例題 23.4 微分方程式 $y'(x) + \frac{1}{x^2}y(x) = 3e^{1/x}$ を解け.

(解答) 両辺に $e^{\int \frac{1}{x^2} dx}$ の一つ $e^{-1/x}$ を両辺に掛けて23.1,

$$y'(x)e^{-1/x} + \frac{1}{x^2}y(x)e^{-1/x} = 3$$

両辺xで積分すると

$$y(x)e^{-1/x} = 3x + C$$

(C は任意の定数). 両辺に $e^{1/x}$ を掛けて

$$y(x) = (3x + C)e^{1/x}$$

(解答終)

また微分方程式については、あるx でy(x) をとるという条件を付ける場合がある。例えば、

命題 23.5 微分方程式
$$\begin{cases} y'(x)=y(x) \\ y(0)=1 \end{cases}$$
 の解は $y(x)=e^x$

である.これはある意味説明済みである.まず y'(x)=y(x) から $y(x)=Ce^x$ を求め,これに x=0 のとき y(x)=1 となる C を求めたのである.明らかに C=1 となるので, $y(x)=e^x$ が言える.

 $^{^{23.1}\}int rac{1}{x^2}dx$ は $-rac{1}{x}+A(A$ は積分定数) であるが,A の値をどのようにしても結局,y(x) の解は同じになるので,積分定数 A=0 のものを選べば良い.

23.2 2 階定係数線形微分方程式

実数の定数 a, b, c(ただし $a \neq 0$) について, x の関数 y(x)

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 (23.7)$$

となるものを 2 階定係数線形微分方程式という.この微分方程式の解と,2 次方程式の解には密接な関係があることや,その解については,2 階線形差分方程式 (命題 17.5) と同様である.

命題 23.6 微分方程式 (23.7) 式の解は,以下の場合のみである.

(i). $b^2 - 4ac > 0$ のとき,

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

 C_1, C_2 は任意の実数であり、実数 λ_1, λ_2 は 2 次方程式 $az^2 + bz + c = 0$ の異なる 2 実数解である.

(ii). $b^2 - 4ac = 0$ のとき,

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x}$$

 C_1, C_2 は任意の実数であり、 λ_0 は 2 次方程式 $az^2 + bz + c = 0$ の重解 -b/2a である.

(iii). $b^2 - 4ac < 0$ のとき,

$$y(x) = e^{px} [C_1 \cos(qx) + C_2 \sin(qx)]$$

 C_1,C_2 は任意の実数であり、実数 p,q は、2 次方程式 $az^2+bz+c=0$ の 2 つの異なる虚数解 p+qi,p-qi を表す実数 $p=-b/2a,q=\sqrt{4ac-b^2}/2a$.

_

解がこれらのみであることを証明するのは面倒なので証明しない. これらが解であることは簡単に計算できる. (i)(ii) は微分方程式から導出する. また (iii) については解となっていることを示すのみとする (-般形のところで説明する).

証明 (i)の証明:zの2次方程式

$$az^2 + bz + c = 0 (23.8)$$

で, $b^2-4ac>0$ のときはこの 2 次方程式の解は,異なる 2 つの実数解をもつ.それを λ_1,λ_2 とする.2 次方程式の解と係数の関係から,(23.7) 式の微分方程式は

$$y''(x) - (\lambda_1 + \lambda_2)y'(x) + \lambda_1\lambda_2y(x) = 0$$

となる. 書き換えて,

$$y''(x) - \lambda_1 y'(x) = \lambda_2 (y'(x) - \lambda_1 y(x))$$

 $u(x)=y'(x)-\lambda_1y(x)$ とすると、上の式は $u'(x)=\lambda_2u(x)$ である.これは 1 階定係数線形微分方程式 (命題 23.2) より、 $u(x)=A_1e^{\lambda_2x}$ となる (A_1 は任意の定数).よって、

$$y'(x) - \lambda_1 y(x) = A_1 e^{\lambda_2 x} \tag{23.9}$$

1階線形微分方程式 (命題 23.3) より

$$y(x) = e^{\lambda_1 x} \int A_1 e^{\lambda_2 x} e^{-\lambda_1 x} dx$$
$$= A_1 e^{\lambda_1 x} \left(\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + C \right)$$
$$= A_1 \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 x} + A_1 C e^{\lambda_1 x}$$

 A_1, C はともに任意の定数なので、 $C_1 = A_1 C, C_2 = \frac{A_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ と書き直して、

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

 (C_1, C_2) は任意の定数) で表すことができる.

(ii) の証明: (i) の場合と同様に変形することによって、(23.9) 式の λ_1, λ_2 にともに λ_0 を代入した

$$y'(x) - \lambda_0 y(x) = A_1 e^{\lambda_0 x}$$

が言える $(A_1$ は任意の実数). 1 階線形微分方程式 (命題 23.3) より,

$$y(x) = e^{\lambda_0 x} \int A_1 e^{\lambda_0 x} e^{-\lambda_0 x} dx$$
$$= A_1 e^{\lambda_0 x} (x + C)$$
$$= A_1 x e^{\lambda_0 x} + A_1 C e^{\lambda_0 x}$$

 A_1, C はともに任意の定数なので、 $C_1 = A_1 C, C_2 = A_1$ として、

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x}$$

 (C_1, C_2) は任意の定数) で表すことができる.

(iii) の証明: $y(x) = e^{px}(C_1\cos(qx) + C_2\sin(qx))$ とすると,

$$y'(x) = pe^{px}[C_1\cos(qx) + C_2\sin(qx)) + qe^{px}(-C_1\sin(qx) + C_2\cos(qx)]$$

= $e^{px}[pC_1\cos(qx) + pC_2\sin(qx) - qC_1\sin(qx) + qC_2\cos(qx)]$

$$y''(x) = p^{2}e^{px}[C_{1}\cos(qx) + C_{2}\sin(qx)] + 2pqe^{px}[-C_{1}\sin(qx) + C_{2}\cos(qx)] + q^{2}e^{px}[-C_{1}\cos(qx) - C_{2}\sin(qx)]$$
$$= e^{px}[(p^{2} - q^{2})C_{1}\cos(qx) - 2pqC_{1}\sin(qx) + 2pqC_{2}\cos(qx) + (p^{2} - q^{2})C_{2}\sin(qx)]$$

これより,

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = ae^{px}[(p^2 - q^2)C_1\cos(qx) - 2pqC_1\sin(qx) + 2pqC_2\cos(qx) + (p^2 - q^2)C_2\sin(qx)] + be^{px}[pC_1\cos(qx) + pC_2\sin(qx) - qC_1\sin(qx) + qC_2\cos(qx)] + ce^{px}[C_1\cos(qx) + C_2\sin(qx)]$$

ところで解と係数の関係より、 $-b/a = 2p, c/a = p^2 + q^2$ が成り立つことから、

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = e^{px} [a(p^2 - q^2)C_1\cos(qx) + bqC_1\sin(qx) - bqC_2\cos(qx) + a(p^2 - q^2)C_2\sin(qx)]$$

$$+ e^{px} [bpC_1\cos(qx) + bpC_2\sin(qx) - bqC_1\sin(qx) + bqC_2\cos(qx)]$$

$$+ e^{px} [a(p^2 + q^2)C_1\cos(qx) + a(p^2 + q^2)C_2\sin(qx)]$$

$$= e^{px} (2ap^2 + bp)[C_1\cos(qx) + C_2\sin(qx)]$$

$$= e^{px} \cdot 0 \cdot [C_1\cos(qx) + C_2\sin(qx)]$$

より、微分方程式 ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 を満たす.

最後に2つの異なる虚数解の場合も考える. 結論を先に書くと以下である.

実際にこの y(x) で、y'(x), y''(x) をそれぞれ計算すると、微分方程式が成り立つことが言える.

この導出を以下で示す. 指数関数の虚数による関数化や三角関数など, あまり馴染みがないだろうから, 飛ばしても構わない. まず以下は基本的である.

命題 23.7 2 階定係数線形微分方程式 y''(x) + y(x) = 0 について,

- (i). y(0) = 1, y'(0) = 0 の解は, $y(x) = \cos(x)$
- (ii). y(0) = 0, y'(0) = 1 の解は, $y(x) = \sin(x)$

これらの微分方程式を満たす解が、それぞれ $\cos(x),\sin(x)$ で唯一であるのだが、それを示すのは面倒なので省略する。また解析学ではこの式を満たすことが $\cos(x),\sin(x)$ の定義式となるのだが、ここでは命題としておく。

次に仮に複素関数を知っている場合は、異なる 2 つの実数解の場合の命題 23.6 に、 α, β に p+qi, p-qi を代入した形となる.

命題 23.8 微分方程式 (23.7) 式の解は, $a^2 - 4b < 0$ のとき,

$$y(x) = A_1 e^{(p+qi)x} + A_2 e^{(p-qi)x}$$

ただし p+qi, p-qi は 2 次方程式 $z^2+az+b=0$ の 2 つの異なる虚数解であり, A_1,A_2 は任意の実数である.

上の式の右辺を書き直すと,以下のようになる.

$$e^{px}(A_1e^{i(qx)} + A_2e^{-i(qx)})$$

さらに複素関数の三角関数と複素関数の指数関数の関係

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$$

(i は虚数単位)を知っているならば,

$$e^{i(qx)} = \cos(qx) + i\sin(qx), \quad e^{-i(qx)} = \cos(qx) - i\sin(qx)$$

となるので、それを代入して

$$y(x) = e^{px}[(A_1 + A_2)\cos(qx) + (A_1 - A_2)\sin(qx)]$$

が得られる. $C_1 = A_1 + A_2, C_2 = A_1 - A_2$ と取り直して、命題 23.6 の (iii) が成り立つ.

24 2 変数微分方程式と位相図

主に上級のマクロ経済学などで出てくる.ここでは物理学の表記に則って,2つの関数 x,y が t の 1 変数実数値関数 x(t),y(t) であるとする.t について微分可能で,導関数をそれぞれ \dot{x},\dot{y} で表す.

x,y についての 2 つの 2 変数実数値関数 f(x,y),g(x,y) があり、それぞれ微分方程式

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$
 (24.1)

を満たすものとする.一般に f(x,y),g(x,y) がともに連続関数と仮定されることが多いので,ここでもそう仮定する.従って,x(t),y(t) ともに t について C^1 級である.

まずは簡単に、経済学における均衡について定義する.

定義 24.1 (24.1) 式を満たす微分方程式について $\dot{x} = \dot{y}$ を満たす x, y の値を, 均衡と呼ぶ.

均衡は物理学の概念と同様であり、数学では均衡という言葉は使わない。前章とは異なり、この x(t),y(t) について陽表的に解くことはほぼない。経済学では、x(t),y(t) がどのように挙動するか、長期的な「均衡」が存在するか、そして f(x,y) や g(x,y) の中にある定数があったとして、その定数が動いたときに、すでに述べた挙動や均衡がどう変化するかを、xy 平面上の図を用いて議論するのである。その方法は以下である。

- (i). xy 平面上に 2 つの曲線, f(x,y) = 0, g(x,y) = 0 を書く.
- (ii). その曲線によって分けられた領域に、それぞれ以下を書く.
 - (a) $\dot{x} > 0, \dot{y} > 0$ & of, \uparrow
 - (b) $\dot{x} > 0, \dot{y} < 0$ ならば, Γ
 - (c) $\dot{x} < 0, \dot{y} > 0$ ならば、 \Box
 - (d) $\dot{x} < 0, \dot{y} > 0$ x > 0 x > 0
- (iii). さらに、上の 4 つの矢印に基づいて、均衡に向かう x,y の軌跡が直感的にありそうならば、それを書き込むこともある.

ここでは簡単な関数を例にとって見てみる.

例題 24.2 x, y, t は (24.1) 式と仮定した条件と同じものとする. $a \ge 20$ は定数とする. x > 0, y > 0 として,

$$\begin{cases} \dot{x} = 100 - xy \\ \dot{y} = a - x - y \end{cases}$$
 (24.2)

について,(i)a>20 の場合と,(ii)a=20 の場合について,それぞれ xy 平面に x,y の挙動を表す図 (位相図) を書け.

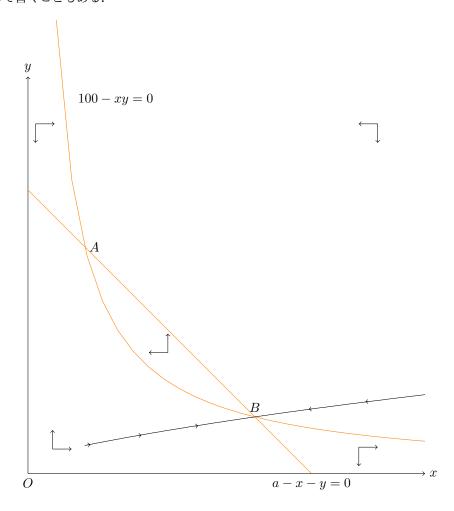
(解答)まず xy 平面上に,100-xy=0 と a-x-y=0 の図を書いた後に,矢印を書く.2 点で交わるので,x の値が小さい方を A とし,もう一方を B とする

B の近くの矢印から、ぎりぎり B に収束するものがありそうなので、それを直感的に書いてみる。図 24 が それである。x(t),y(t) が A,B 上にない場合を考えると、

- x(t), y(t) が, $100 xy \ge 0$ かつ a x y < 0 かつ,x(t) が A の x 座標よりも小さいならば,A に収束する.
- x(t), y(t) が、 $100 xy \ge 0$ かつ a x y < 0 かつ、x(t) が B の x 座標よりも大きいならば、A, B には収束しない.
- x(t), y(t) が、 $100 xy \ge 0$ かつ $a x y \le 0$ の範囲ならば、x(t), y(t) が A に収束する.
- その他の場合は、図に書いた B へ収束する経路よりも左側や上側にある場合は、A に収束する、図に書いた B へ収束する経路より右側や下側にある場合は、A 、B に収束しない。

(解答終)

Bに収束する経路については、手計算では概形は書けないことが多いので、PCでの近似解を書かせたり、簡易的に線形で書くこともある.



例題 24.3 a=25 として図 24 の B に収束するような経路の近似曲線を,Excel の散布図で書いてみよ. 」

(解答) 連立方程式 100 - xy = 0, 25 - x - y = 0 を解いて,A(5,20), B(20,5) が得られる.

B(20,5) から $0<\theta<\pi/2$ として,r を微小な正数として x,y をそれぞれ $r\cos\theta,r\sin\theta$ 増加させたときの, \dot{x},\dot{y} の値は,

(24.1) の右辺を偏微分による線形近似で、 $(x_0, y_0) = (20, 5)$ として、

$$\begin{cases} \dot{x} = 100 - (x_0 + r\cos\theta)(y_0 + r\sin\theta) \\ \dot{y} = a - (x_0 + r\cos\theta) - (y_0 + r\sin\theta) \end{cases}$$
(24.3)

と近似できる. (x_0,y_0) の近傍で、 $\frac{y}{x}$ と $\sin\theta/\cos\theta$ がほぼ一致している. したがってそのような θ と、そのときの $\sin\theta/\cos\theta$ の値を知りたいので、それを Excel のソルバーで計算させる. r=0.01 とする.

- (i). 見出しを書くとよい. A1 セルから J1 セルまで順に,theta, cos theta, sin theta, x, y, dot x, dot y, dot y/dot x, cos theta/sin theta, H 列-I 列
- (ii). A2からJ2まで順に、以下のように打ち込むとよい0.75、 =cos(A2)、 =sin(A2)、 =0.01*B2+20、 =0.01*C2+5、 =100-D2*E2、 =25-D2-E2、 =G2/F2、 =C2/B2、 =I2-H2
- (iii). Excel の,「データ」タブの, ソルバーを選択する. もし無ければ,「ファイル」タブ>オプション>アドイン で出てくる表について,下方の「管理」が Excel アドインになっているだろうから,その横の設定ボタンを押す. そしてソルバー をチェックしてから OK を押すと良い.
- (iv). 今 θ の初期値は 0.75 にしている. 角度で言うと約 45 度である. さてソルバーの表では、目的セルは\$J\$2 セルを選択し、目標値は指定値で 0 を選択する. 変数セルは A2 セルを選ぶ.
- (v). 解決ボタンを押して、その後 OK ボタンを押すと、A2 セルの値が変更されて、H2 セルと I2 セルの値がほぼ等しくなっている。この 2 つのセルの値が、x,y ともに x_0,y_0 の正の方向から (x_0,y_0) に近づく傾きの近似値となっている。

別のエクセルの Sheet を用意して、上の $H2 \cdot I2$ セルの値を利用して、まずは $20 \le x \le 39$ の範囲のデータを、以下の手順で得ると良い。幅は x の増加幅は 0.25 刻みとしているが、変更もできる。

- (i). A1:F1 セルまで見出しを書く. 順に, x, y, dot x, dot y, dot y/dot x, delta x
- (ii). A2 セルに,20. B2 セルに 5. 先程行ったソルバーの Sheet の F2:G2 セルを選んでコピーし,今のシートの D2 セルを右クリック>形式を選択して貼り付け> (値) を選んで,値貼り付けする.F2 セルには 0.25
- (iii). A3:F3 まで順に、=A2+F2、=B2+E2*F2、=100-A3*B3、=25-A3-B3、=D3/C3、=F2
- (iv). A3:F3 をコピーし、A78:F78 まで下方向にコピーする.

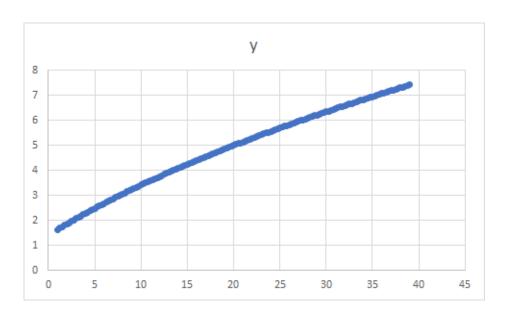
次に、 $1 \le x \le 20$ の範囲のデータである. (x_0, y_0) から x, y とも減少しているので、(24.1) での θ は、 $\pi < \theta < 3\pi/2$ を考える. そこで初期値を 4.5 としておこう. 3+1.5 で約 225 度を表している.

- (i). 先に行ったのソルバーの Sheet の A2 セルを, 4.5 に変更する.
- (ii). Excel の、「データ」タブの、ソルバーを選択する.
- (iii). さっきと全く同じ計算だから、ソルバー画面は変更しないで、そのまま解決ボタンを押して、その後 OK ボタンを押すと、A2 セルの値が変更されて、H2 セルと I2 セルの値がほぼ等しくなっている.この 2 つのセルの値が、 x_0,y_0 に x,y とも負の方向から近づく傾きの近似値となっている.

先の $20 \le x \le 39$ での近似値を得た Sheet を選ぶ.

- (i). A 列から F 列までまとめてコピーして, I 列:N 列まで貼り付ける.
- (ii). 先程行ったソルバーの Sheet の F2:G2 セルを選んでコピーし、今のシートの K2 セルを右クリック>形式を選択して貼り付け> (値)を選んで、値貼り付けする。N2 セルには-0.25 に変更する。
- (iii). これで I2:J29 まででデータが得られる.
- (iv). I79 セルに, =A3 と打ち込み, コピーする.
- (v). I79:J154 をマウスなどで選んで, 貼り付ける.
- (vi). I1:J154 をマウスなどで選んで、挿入タブの散布図を選択する。散布図は点のみのものを選ぶ。すると目的のグラフが得られる (図 24).

点 B から離れるほど、近似したグラフは真の軌道との誤差が大きくなるが、ある程度の目安にはなる。 Excel でもできるのは、かなりの驚きであろう.



第 VI 部

Ⅱ 部よりやや難しくて, ごくたまに出会うもの (まだ書いていない)

- 25 連続時間における動学的最適化 (まだ書いていない)
- 26 定係数 n 階差分方程式 (まだ書いていない)
- 27 定係数 n 階微分方程式 (まだ書いていない)

第 VII 部

より深く実数・実数列・1 変数実数値関数について 学ぶ

今までの章とは多少毛色が異なってくる。自転車を例に挙げると、今までが自転車の乗り方を知ることであったなら、これからは自転車の各パーツについてよく知ることになる。

よって、今までよくわからなかったことが、理解できるなるかもしれない、今までのところが得意の人でもつまずくときもあろう。

PC を補助として使いつつ、適切な量の時間を費やして、楽しんでほしい.

2節以降の順に、定義や証明を飛ばしたところなどを補っていく形である.

28 実数列の収束と、平方根や e の近似値

この章では k,n,n_0 は整数で、 a_n,b_n,c_n は数列とするので、以下では特に断らない.

28.1 有理数の公理 16 個と上限・下限の性質

有理数の四則演算や不等式は、中 $1\cdot$ 中2で行ってきたことだろう。有理数の特徴づけを行ったときに、たった16個の公理にまとめることができる。

有理数の集合を Q であらわす. 以下の a,b,c は Q の任意の元とする.

- (i). a + b = b + a
- (ii). (a+b) + c = a + (b+c)
- (iii). 任意の a に対して a+0=a を満たす, \mathbf{R} の元 0 が,唯一存在する.
- (iv). 任意の a に対して a + (-a) = 0 を満たす, \mathbf{R} の元 -a が,唯一存在する.
- (v). ab = ba
- (vi). (ab)c = a(bc)
- (vii). 任意のaに対して,a1 = aを満たす \mathbf{R} の元1が、唯一存在する.
- (viii). 任意の $a \neq 0$ に対して, $a(a^{-1}) = 1$ を満たす \mathbf{R} の元 a^{-1} が,唯一存在する.
- (ix). $0 \neq 1$
- (x). (a+b)c = ac + bc
- (xi). a < a
- (xii). $a \le b$ かつ $b \le a \Longrightarrow a = b$
- (xiii). $a \le b$ かつ $b \le c \Longrightarrow a \le c$
- (xiv). $a \le b$ または $b \le a$ の, 少なくとも一方が成り立つ.
- (xv). $a \le b \Longrightarrow a + c \le b + c$
- (xvi). $a \ge 0, b \ge 0 \Longrightarrow ab \ge 0$

最初の10個が等式に関するもので、残りの6個が不等式に関するものである.

実数の公理は、この16個の加えて、2.1節で紹介した実数の連続性

| 実数の部分集合について、非空で上に有界なものは、上限を持つ.

の 17 個である.

28.2 拡張された実数の四則演算や大小関係

実数の集合 \mathbf{R} に $-\infty$ や ∞ も含んで考えた集合

$$R \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$$

を拡張された実数と呼び, \overline{R} であらわすことは,定義 2.6 で定義した. \overline{R} において, ∞ と $-\infty$ を含む,等号と不等号の計算については,以下のように定義する.

定義 28.1 (無限大を含む四則と不等号) $a \in \mathbf{R}$ とする. 以下の (i) から (v) までの計算は、左辺の計算結果が右辺となることを示している.

- (i). $(\pm \infty) + (\pm \infty) = \pm \infty$ (複合同順)
- (ii). $(\pm \infty) (\mp \infty) = -(\mp \infty) + (\pm \infty) = \infty$ (複合同順)
- (iii). $(\pm \infty) + a = a + (\pm \infty) \pm \infty$ (複合同順)

(iv).
$$a(\pm \infty) = (\pm \infty)a = \begin{cases} \pm \infty & (a > 0 \text{ のとき}) \\ \mp \infty & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$
 (複合同順)

- (v). $a/(\pm \infty) = 0$
- (vi). $a < \infty$
- (vii). $-\infty < a$
- (viii). $(\pm \infty) = (\pm \infty)$ (複合同順)

python で等式について、計算させて、確かめよう.

from sympy import *

00+00

(-00)+(-00)

00-(-00)

00+10

-00+10

5*(oo)

-5*(oo)

5*(-00)

-5*(-00)

不等式については、式を評価するので、不等式が正しければ True が返ってくる. 同様に等式の評価は==である. 以下のコード全て True が返ってくることを確かめよ.

4<00

-oo<4

00==00

00==00+00

最後の式も True が返ってくるのは、==の右辺の oo+oo を先に計算して oo となり、それで oo==oo を評価しているためである.

実数の割り算 a/b では,b=0 のとき計算を定義していないのと同様に $(\infty)-(\infty)$ や, $(\infty)/(\infty)$ や, $0(\infty)$ なども計算を定義していないことに,注意すること.以下の python コードでも nan(not a number) が返ってくることを確かめよ.

00-00

00/00

0*00

28.3 ε 論法: 実数列の収束・1 変数実数値関数の極限値と連続性

この節の文字 a, b, c, α は全て実数である.

今まで任意のxについてなど、「任意の」と言う言葉と使ってきたが、それを \forall で表す。また「存在する」とい言葉を意味する記号を \exists で表す。どちらも論理記号である。

例えば以下のように表す.

- 3以上4以下の任意の数xとは、 $\forall x \in [3,4]$
- 任意の正数 ϵ とは、 $\forall \epsilon > 0$
- 3以上4以下に、ある実数 δ が存在するとは、 $\exists x \in [3,4]$

次の命題は, (i) ならば (ii) であることは簡単に証明できるだろう.

命題 28.2 a, b について,以下は同値である.

- (i). a = b
- (ii). 任意の $\epsilon > 0$ について, $|a-b| < \epsilon$

(ii) ならば (i) は、対偶を証明すれば良いのでやってみるとよい. この命題から数列の収束について考えていこう.まず以下が簡単に言える.

命題 28.3 実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ と α について,以下は同値である.

- (i). $a_0 = a_1 = \dots = a_n = \dots = \alpha$
- (ii). $(\forall \epsilon > 0)(\forall n \geq 0)(|a_n \alpha| < \epsilon)$

(ii) の意味は、任意の $\epsilon > 0$ について、任意の $n \geq 0$ について、 $|a_n - \alpha| < \epsilon$ が成り立つという意味である.

これを利用すると、数列 a_n について、どの番号以降か分からないが、その番号より後の a_n は全て α になるという数列が、以下のように書ける.

$$(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall \epsilon > 0)(\forall n > n_0)(|a_n - \alpha| < \epsilon) \tag{28.1}$$

この式の $|a_n - \alpha| < \epsilon$ は、 $\alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon$ である.

そこでどんなに小さい正数 ϵ をとっても、具体的な正整数の値はわからないけど n_0 という正整数が存在して、その n_0 番以降の n であれば、全て $\alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon$ であるという数列を考えよう.

それは (28.1) 式の最初の 2 つのカッコを入れ替えたものとなる。また「どんなに小さい ϵ について成り立つ」という言い方は,「ある正数 ϵ_0 が存在して, ϵ_0 より小さい任意の ϵ について成り立つ」という意味と同値である。

$$(\exists \epsilon_0 > 0)(\forall \epsilon < (0, \epsilon_0))$$

これによって数列の収束が定義できる.

定義 28.4 実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ について

- (i). 以下の条件が成り立つならば、 a_n は α に収束する: 任意の正数 ϵ について、ある正整数 n_0 が存在して、任意の $n>n_0$ のとき、 $|a_n-\alpha|<\epsilon$
- (ii). (i) の条件を論理式で書くと以下である.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n > n_0)(|a_n - \alpha| < \epsilon)$$
(28.2)

- (iii). a_n が α に収束するとき, $\lim a_n = \alpha$ と表す.
- (iv). 収束する数列は収束列といい、そうではないものを発散列という.

(28.2) はについては十分小さい ϵ について成り立てばよいので、以下も成り立つ.

定理 28.5 実数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ が α に収束することは以下と同値である.

- (i). ある正数 ϵ_0 が存在して、任意の正数 ϵ (ただし ϵ_0 未満) について、ある正整数 n_0 が存在して、任意の $n>n_0$ のとき、 $|a_n-\alpha|<\epsilon$
- (ii). (i) を論理式で書くと以下である.

$$(\exists \epsilon_0 > 0)(\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0))(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n > n_0)(|a_n - \alpha| < \epsilon)$$
(28.3)

数列の収束に関していくつか注意点を挙げておこう.

(i). 論理式はカッコが煩わしい. そこで論理式ではないが、(28.2)式についてだと、かっこを外して

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n > n_0, |a_n - \alpha| < \epsilon$$

や, 最後の部分だけ書き換えた.

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N} :$$

 $\forall n > n_0 \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$

や, 2 行にしないで 1 行にして,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n > n_0 \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$$

また:にしないで,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n > n_0 \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$$

と書く本も多い.以下では分かりやすさから、式では2行で書くことを中心とする.

- (ii). またこの節のここまでの「 $<\epsilon$ 」の部分を、 ϵ とは無関係な正の定数 b を用いて、「 $<b\epsilon$ 」と書き換えても、定義に変わりなない.よく使われるのは「 $<2\epsilon$ 」や「 $<\frac{1}{9}\epsilon$ 」などである.
- (iii). この節のここまでの「 $n > n_0$ 」の部分は、「 $n \ge n_0$ 」としても成り立つ。教科書によって異なるが、このレジュメでは前者で定義している。
- (iv). この節のここまでの「 $|a_n \alpha| < \epsilon$ 」の部分は、「 $a_n \alpha \le \epsilon$ 」としても成り立つ。ただし、どのような教科書でも数列の定義では前者にしている。

関数 f(x) の $x \to \infty$ の極限値は、上の n_0 を、適当な実数 x_0 に置き換えれば良い。

定義 28.6 区間 (a, ∞) で定義された関数 f(x) について,

(i). $x \to \infty$ のとき f(x) が α に収束するとは、以下が成り立つことである:

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_0 > a : x > x_0 \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon$$
 (28.4)

(ii). (i) が成り立つとき,f(x) の $x \to \infty$ の極限値は α であるといい, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha$ と表す.

_

 $x \to -\infty$ への極限値も同様に,

定義 28.7 区間 $(-\infty,b)$ で定義された関数 f(x) について,

(i). $x \to -\infty$ のとき f(x) が α に収束するとは、以下が成り立つことである:

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_0 < b : x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon$$
 (28.5)

(ii). (i) が成り立つとき,f(x) の $x \to -\infty$ の極限値は α であるといい, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha$ と表す.

2 つの定義の $\forall \epsilon > 0$ の部分を, $\exists n_0, \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0)$ としても f(x) への収束と同値となるのは,数列の場合と同様である.表現は省略する.

ここまでで,関数の極限値について $x\to\infty$ と $x\to-\infty$ について定義した. $x\to\infty$ については x を左側 から ∞ に近づけていると解釈できので,これを利用して,ある値 c について x を c の左側から近づける左側 極限値を考えよう.

そこで (28.4) 式の後半部分を見てみよう. $x\to\infty$ への極限を考えるときには、ある x_0 が存在して、任意の $x>x_0$ について考えている. よって、x を c の左側から近づける場合には、ある $x_0< c$ が存在して、 $x_0< x< c$ を満たす任意の x について成り立つことを言えれば良いことが示唆される. つまり、

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_0 < c :$$

 $x_0 < x < c \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon$

無論これで左側極限値を定義してもよいのだが、一般には $x_0=c-\delta$ と考えて、 x_0 の代わりに微小な正数 δ を用いて、以下のように定義する.

定義 28.8 区間 (a,b) で定義された関数 f(x) について, $c \in (a,b]$ とする.

(i). $x \to c - 0$ のとき f(x) が α に収束するとは、以下が成り立つことである:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: c - \delta < x < c \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon$$
 (28.6)

(ii). (i) が成り立つとき,f(x) の $x \to c-0$ の極限値は α であるといい, $\lim_{x \to c-0} f(x) = \alpha$ と表す.

 x_0 は正負は関係ないが、 ϵ,δ ともに小さい正数となっており、前出の x_0 を使う表現よりも、こちらのほうがわかりやすい.

右側極限値も同様に以下のように定義する.

定義 28.9 区間 (a,b) で定義された関数 f(x) について, $c \in [a,b)$ とする.

(i). $x \to c + 0$ のとき f(x) が α に収束するとは、以下が成り立つことである:

(ii). (i) が成り立つとき,f(x) の $x \to c+0$ の極限値は α であるといい, $\lim_{x \to c+0} f(x) = \alpha$ と表す.

両側極限値は,左側と右側の両方の極限値から,以下のように定義する.

定義 28.10 区間 (a,b) で定義された関数 f(x) について, $c \in [a,b]$ とする.

(i). $x \to c$ のとき f(x) が α に収束するとは、以下が成り立つことである:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: \\ 0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon$$
 (28.8)

(ii). (i) が成り立つとき,f(x) の $x \to c+0$ の極限値は α であるといい, $\lim_{x \to c+0} f(x) = \alpha$ と表す.

このように、 $x \to c$ のときの極限値については、 $0 < |x-c| < \delta$ という、c の δ 除外近傍を利用している. 一方関数の連続性については、c の δ 近傍を用いて、以下のように ϵ 論法で定義する.

定義 28.11 区間 I で定義された関数 f(x) が $c \in I$ で連続であるとは、以下が成り立つことである.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0:$$

 $|x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$

また,任意の $c \in I$ で f(x) が連続のとき,f(x) は I で連続であるという.もしくは f(x) は I での連続関数 関数であるという.

28.4 数列や関数の, ±∞への発散の定義

数列の発散数列や、関数が収束しない場合でも、 ∞ や $-\infty$ に発散する場合は特別に \lim で表してきた.これらをきちんと ϵ 論法で定義しよう.

 ∞ への発散については,「どんなに大きい実数 M をとったとしても,ある大きい n_0 さえとれば, n_0 より大きい任意の n で $a_n>M$ が成り立つ.」と考える.同様に $-\infty$ への発散は小さい実数 m を考えて,以下のように定義できる.

定義 28.12 実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ について,

(i). a_n は ∞ に発散するとは、以下が成り立つときである:

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N} : n > n_0 \Longrightarrow a_n > M$$

そして、 a_n が ∞ に発散するとき、 $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ で表す.

(ii). a_n は $-\infty$ に発散するとは、以下が成り立つときである:

$$\forall m \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N} : n > n_0 \Longrightarrow a_n < m$$

そして, a_n が $-\infty$ に発散するとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ で表す.

関数の $x \to \infty$ への発散も同様に定義する.

定義 28.13 区間 (a, ∞) で定義された 1 変数実数値関数 f(x) について,

(i). 以下が成り立つとき, f(x) は $x \to \infty$ に発散するといい, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ で表す:

$$\exists M_0 \in \mathbf{R}, \forall M > M_0, \exists x_0 \in \mathbf{R} : x > x_0 \Longrightarrow f(x) > M$$

(ii). 以下が成り立つとき、f(x) は $x \to \infty$ で $-\infty$ に発散するといい、 $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ で表す:

$$\exists m_0 \in \mathbf{R}, \forall m < m_0, \exists x_0 \in \mathbf{R} : x > x_0 \Longrightarrow f(x) < m$$

 $x \to -\infty$ への ∞ や $-\infty$ への発散の定義は省略する.

実数 $x \to c$ のときの $\pm \infty$ への発散も同様に.

定義 28.14 区間 (a,b) で定義された 1 変数実数値関数 f(x) について, $c\in[a,b]$ として,以下が成り立つとき,f(x) は $x\to c$ で ∞ に発散するといい, $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ で表す:

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists \delta > 0:$$

 $0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow f(x) > M$

_

以下が成り立つとき, f(x) は $x \to c$ で $-\infty$ に発散するといい, $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ で表す:

$$\forall m \in \mathbf{R}, \exists \delta > 0:$$

 $0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow f(x) < m$

上側極限 $x \to c + 0$ や下側極限 $x \to c - 0$ も同様に.

定義 28.15 前定義において,

- (i). $c \in (a,b)$ を $c \in (a,b]$ に, $x \to c$ を $x \to c 0$ に. $0 < |x-c| < \delta$ を $c \delta < x < c$ にそれぞれ読み替えて, 定義することができる.
- (ii). $c \in (a,b)$ を $c \in [a,b)$ に, $x \to c$ を $x \to c + 0$ に. $0 < |x-c| < \delta$ を $c < x < c + \delta$ にそれぞれ読み替えて, 定義することができる.

 M_0, m_0 を用いて関数 f(x) が $\pm \infty$ へ発散する同値性も、前節同様に当然存在する。ただし、前節と議論が同様なので省略する。

定理 28.16 数列 a_n について,以下が成り立つ.

- (i). $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \text{ is it, } \lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = 0$
- (ii). $a_n > 0$ で、 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ ならば、 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$

証明 (i) の証明: a_n の ∞ への発散を ϵ 論法で表すと、任意の $\epsilon > 0$ について、ある n_0 が存在して、 $n > n_0$ のとき $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\epsilon}$. 最後の式を書き換えると、 $|a_n| < \epsilon$. これは a_n が 0 に収束することを意味する.

(ii) の証明 a_n の 0 への収束を ϵ 論法で表すと、任意の M>0 について、ある n_0 が存在して、 $n>n_0$ のとき、 $0< a_n<1/M$. 最後の式を書き換えると、 $\frac{1}{a_n}>M$. これは $\frac{1}{a_n}$ が ∞ に発散することを意味する.

28.5 有界な単調数列の収束と発散

収束と発散については,以下の単調増加数列や単調減少数列が基本的なものである.

定理 28.17 実数列について

- (i). 上に有界な単調増加数列は収束する. その収束値は数列の集合の上限である. また上に有界でない単調増加数列は ∞ に発散する.
- (ii). 下に有界な単調減少数列は収束する. その収束値は数列の集合の下限である. 下に有界でない単調減少数列は $-\infty$ に発散する.

┙

証明 (i) のみ証明する.

[1] 数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ が上に有界な単調増加数列とする.上に有界なので,実数の連続性より,数列 a_n の集合について,その上限 $s=\sup\{a_n\}$ が実数で存在し,任意の $n\geq 0$ で $a_n\leq s$.また任意の $\epsilon>0$ について, $s-\epsilon$ は数列 a_n の集合の上界ではないので,ある n_0 が存在して, $s-\epsilon< a_{n_0}$.単調増加数列なので, $n>n_0$ のとき $a_{n_0}\leq a_n$ である.

以上をまとめると、任意の $\epsilon>0$ について、ある正整数 n_0 が存在して、 $n>n_0$ のとき、 $s-\epsilon< a_n \leq s$ が成り立つ。これは $|a_n-s|<\epsilon$ を満たすので、つまり a_n が s に収束することを意味する.

[2] 次に数列 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ が上に非有界な単調増加数列とする. 非有界なので、任意の M について、ある n_0 が存在して $b_{n_0} > M$. 単調増加なので、 $n > n_0$ のとき、 $b_n \geq b_{n_0}$.

従って、任意の M についてある n_0 が存在して、 $n>n_0$ のとき $b_n>M$ である.これは b_n が ∞ に発散することを意味する.

定理 28.18 (アルキメデスの原理) 任意の正数 a, b について, an > b を満たす正数 n は必ず存在する.

証明 n を n についての数列と考えると、明らかに非有界の単調増加数列であるので ∞ に発散する. 従って n>b/a を満たす正整数 n が存在する. これは an>b を満たす.

命題 28.19 (i).
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$
 (ii). $r > 1$ とする. $\lim_{n \to \infty} r^n = \infty$ (iii). $0 < r < 1$ とする. $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$

証明 (i) の証明: $n \ge 1$ の数列 $a_n = \frac{1}{n}$ は,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$
$$= \frac{n - (n+1)}{n(n+1)}$$
$$< 0$$

より単調減少数列. また明らかに $a_n>0$ なので、0 は数列の集合 $\{a_n\}$ の下界の 1 つなので、 a_n は下に有界. よって a_n は収束する. あとは下限を求めれば、それが収束値である.

先に書いたように下界の1 つは0 であるので,下限は0 以上である.そこで,仮に正数 ϵ が数列の下界であるとしよう.このとき任意のn について, $\frac{1}{n} \geq \epsilon$ が成り立つ.すなわち,任意のn について, $n \leq 1/\epsilon$ が成り立つが,これはアルキメデスの原理に矛盾する.

以上より下限は0であり, a_n の収束値も0である.

(ii) の証明: $b_n=r^n$ とすると $b_{n+1}-b_n=r^n(r-1)>0$ より, b_n は単調増加である. R>0 で, r=1+R とおけて,

$$b_n = r^n = (1+R)^n$$

(2 項定理より) $\geq Rn$

が成り立つ. アルキメデスの原理から b_n は上に非有界である. 定理 28.17(i) より, b_n は ∞ に発散する. (iii) の証明: (ii) と定理 28.16 から言える.

Sympy Live では以下のコードで得られる.

limit(1/n,n,oo)

小文字の O(アルファベット) を 2 つ並べた oo を、sympy では ∞ を表す記号としている.

28.6 単調関数の収束と発散: 2.2 節の証明

前節の定理 28.17 と同様の証明により,2.2 節の単調関数の収束と発散に関する 2 つの定理 (定理 2.8・定理 2.10) を証明できる.ともに単調増加関数についてのみ証明する.

定理 2.10 の方が前節の定理 28.17 に似た形をしているのでこちらを先に示す.

定理 2.10 の証明 : 同様にできるので (i) の単調増加の場合のみ示す. 非有界開区間 $\check{I}=(a,\infty)$ で定義された 1 変数実数値 f(x) が,単調増加とする.

f(x) が \check{I} で上に有界ならば,f(x) に関する上限 s が存在する.任意の $\epsilon>0$ について $s-\epsilon$ は上限ではないので,ある $x_0\in \check{I}$ が存在して, $f(x_0)\geq s-\epsilon$. f は単調増加関数なので, $x>x_0$ のとき $f(x)\geq s-\epsilon$. つまり,

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in \check{I} :$$

 $x > x_0 \Longrightarrow |f(x) - s| \le \epsilon$

これは $\lim_{x \to a} f(x) = s$ を意味する.

f(x) が \check{I} で上に非有界ならば、任意の実数 M について、ある $x_0 \in \check{I}$ が存在して、 $f(x_0) > M$. f は単調増加関数なので、 $x > x_0$ のとき f(x) > M. つまり

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists x_0 \in \check{I} :$$

 $x > x_0 \Longrightarrow f(x) > M$

これは $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ を意味する.

定理 2.8 の証明 : 同様にできるので (ii) の単調増加の場合のみ証明する.有界開区間 $\check{I}=(a,b)$ で定義された 1 変数実数値 f(x) が,単調増加とする.

f(x) が \check{I} で下に有界ならば,f(x) に関する下限 s が存在する.任意の $\epsilon>0$ について $s+\epsilon$ は下限ではないので,ある $x_0\in \check{I}$ が存在して, $f(x_0)\leq s+\epsilon$.f は単調増加関数なので, $x< x_0$ のとき $f(x)\leq s+\epsilon$. $x_0=a+\delta$ で書き直すと.

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: \\ &a < x < a + \delta \Longrightarrow |f(x) - s| \leq \epsilon \end{aligned}$$

これは $\lim_{x\to a+0} f(x) = s$ を意味する.

f(x) が \check{I} で下に非有界ならば、任意の実数 m について、ある $x_0 \in \check{I}$ が存在して、 $f(x_0) < m$. f は単調増加関数なので、 $x < x_0$ のとき f(x) < m. $x_0 = a + \delta$ で書き直すと.

$$\forall m \in \mathbf{R}, \exists \delta > 0:$$

 $a < x < x_0 \Longrightarrow f(x) < m$

これは $\lim_{x\to a+0} f(x) = -\infty$ を意味する.

単調減少関数についての証明も、確かめると良い.

28.7 数列の極限値と,四則演算・絶対値・不等式

この節で扱うものは、定理自体は簡単だが、証明は ϵ 論法に頼っている。そこで、初見の場合はゆっくりと証明を追うと良い。

定理 28.20 (極限値と絶対値)

- (i). a_n が α に収束することは, $|a_n-\alpha|$ が 0 に収束することと同値である.
- (ii). a_n が α に収束するならば、 $|a_n|$ は $|\alpha|$ に収束する.

証明 (i) の証明. a_n が α に収束することは、任意の正数 ϵ について、ある $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して、 $n > n_0$ のとき、

$$|a_n - \alpha| < \epsilon$$

が成り立つことと同値である。ところで上の左辺は $||a_n-\alpha|-0|$ と書ける。従って,これは数列 $|a_n-\alpha|$ が 0 に収束することと同値である。よって命題が成り立つ。

(ii) の証明. 三角不等式 $||a| - |b|| \le |a - b|$ より

$$||a_n| - |\alpha|| \le |a_n - \alpha|$$

 a_n の収束より、任意の正数 ϵ について、ある $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して、 $n > n_0$ ならば、上の式の右辺が ϵ 未満となる.

これは、数列 $|a_n|$ が $|\alpha|$ に収束することを表す.

系 28.21 (0 でのはさみうち) 数列 a_n と $c_n \geq 0$ で, c_n が 0 に収束しかつある n^* 以上の n について, $|a_n-\alpha|\leq c_n$ が成り立つとき, a_n は α に収束する.

証明 前定理 (ii) の方法と全く同じ方法で, $|a_n-\alpha|$ が 0 に収束することが言える.前定理 (i) より, a_n が α に収束する.

 a_n が実数 α に収束することを証明するときには、このように $|a_n-\alpha|$ を上から 0 に押さえるような数列 c_n を見つけることが、解析学の一つのテクニックである.

では次に四則演算について証明しよう. 以下の証明は、前の系と少し似ている. 直感的に言えば「| 数列 -収束させたい値 |」を任意の正数 ϵ やその正の定数倍で押さえることである.

定理 28.22 (極限値の四則) a_n, b_n がそれぞれ α, β に収束するとき,

- $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$ (i).
- (ii). $\lim ca_n = c\alpha (c は定数)$
- (iii).
- $\lim_{n \to \infty} a_n b_n = \alpha \beta$ $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (iv). $(\varepsilon) (\beta \neq 0)$

証明 式で書くと,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbf{N}, \forall n > n_1, |a_n - \alpha| < \epsilon \forall \epsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbf{N}, \forall n > n_2, |b_n - \beta| < \epsilon$$
(28.9)

の 2 式がそれぞれ成り立つ. この ϵ , n_1 , n_2 を以下の証明で用いる.

(i) の証明: 任意の正数 ϵ について、ある $n_0 = \max\{n_1,n_2\}$ が存在して、任意の $n>n_0$ について、

$$|a_n + b_n - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)|$$

 $\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta|$
 $((28.9) 式より) < \epsilon + \epsilon$
 $= 2\epsilon$

が成り立つ. これより $a_n + b_n$ は $\alpha + \beta$ に収束する.

(ii) の証明: 数列 ca_n については c=0 のときは自明なので、以下 $c\neq 0$ とする. 任意の正数 ϵ についてあ る n_1 が存在して, $n > n_1$ ならば,

$$|ca_n - c\alpha| = |c(a_n - \alpha)|$$

= $|c| \cdot |a_n - \alpha|$
 $((28.9) 式より) < |c| \cdot \epsilon$

が成り立つ、これより ca_n は $c\alpha$ に収束する.

(iii) の証明: 定理 28.20(ii) より, $|b_n|$ は $|\beta|$ に収束する. よって $\epsilon=1$ とした ϵ 論法よりある整数 n_3 が存 在して $n > n_3$ のとき $|b_n| < |\beta| + 1$ である。(28.9)式の n_1, n_2 を用いて, $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ とする。

任意の $\epsilon > 0$ について、ある $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ があって、任意の $n > n_0$ について、

が成り立つ. これより a_nb_n は $\alpha\beta$ に収束する.

(iv) の証明:

(iii) が成り立つので、(iv) では $a_n=1$ として証明すれば十分である.また定理 28.20(ii) より、 $|b_n|$ は $|\beta|$ に収束するので、 $\epsilon=|\beta|/2$ の ϵ 論法より、ある $n_3\in \mathbf{N}$ が存在して、 $n>n_3$ のとき $\frac{|\beta|}{2}<|b_n|$ が言える. つ $\sharp \ 0 < \frac{1}{b_n} < \frac{2}{|\beta|}$

任意の $\epsilon > 0$ について、ある $n_0 = \max\{n_2, n_3\}$ が存在して、任意の $n > n_0$ について、

が成り立つ. これより $\frac{1}{b_n}$ は $\frac{1}{\beta}$ に収束する.

不等号については以下が成り立つ.

定理 28.23 (極限の不等号) ある n^* が存在して、任意の $n \geq n^*$ について $a_n \leq b_n$ とする. さらに a_n は $n o \infty$ のときに、収束するか、 ∞ もしくは $-\infty$ に発散するかとする. b_n も同様とする. このとき、 $\overline{m{R}}$ の意 味で以下が成り立つ.

$$\lim_{n \to \infty} a_n \le \lim_{n \to \infty} b_n$$

特に $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ のときは $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim b_n = \infty$ と等号で成り立ち, $\lim_{n \to \infty} b_n = -\infty$ のときは $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ と等号で成り立つ.

証明 まず $[1]\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$ や $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ のときは、明らかに不等式は成り立つ。 [2] また $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ のときは、 a_n の ∞ への発散から、任意の $M\in \mathbf{R}$ について、任意の n_0 が存在して、 $n>n_0$ ならば $a_n>M$ である.最後の式から $b_n>M$ が言える.これより b_n が ∞ に発散することを意味 する. よって, $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim b_n = \infty$ [3] $\lim_{n \to \infty} b_n = -\infty$ のときも [2] と同様に, $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = -\infty$ となる.

[4] よって残りは、 a_n,b_n ともに実数に収束する場合を考えればよい。そこで、それぞれ実数 lpha,eta に収束す るとする.

任意の $\epsilon > 0$ について、以下の2つの論理式が得られる。

$$(\exists n_1 > n^*)(\forall n > n_1)(\alpha - \epsilon < a_n) (\exists n_2 > n^*)(\forall n > n_2)(b_n < \beta + \epsilon)$$

このとき, ある $n_0 = \max(n_1, n_2)$ が存在して, $n > n_0$ のとき,

$$\alpha - \epsilon < a_n \le b_n < \beta + \epsilon$$

これより,

$$\alpha < \beta + 2\epsilon$$

が言える. 任意の正数 ϵ で成り立つので $\alpha \leq \beta$ が言える.

 b_n の ∞ への発散を言いたいときに,[2] のように $b_n \geq a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ となるような, b_n を下から押さえる a_n を見つけることや, a_n の $-\infty$ への発散を言いたいときに,[3] のように $a_n \leq b_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$ となるような, a_n を上から押さえる b_n を見つけることが,解析学の一つのテクニックである.

 $\pm\infty$ への発散ではなくて、実数への収束については、以下のはさみうちの原理も基本的である.

定理 28.24 (はさみうちの原理) 数列 a_n, c_n, b_n がある n^* 以上の任意の n について, $a_n \leq c_n \leq b_n$ となって いるとする. a_n, b_n が収束して, その極限値が等しいならば, c_n もその極限値に収束する.

証明 a_n, c_n ともに実数 α に収束すると仮定する.

教育的配慮のために、 ϵ 論法を使わずに証明する方法と、 ϵ 論法を使う証明の両方を示す.

 ϵ 論法を使わない証明: a_n, b_n ともに α に収束すると仮定する. n^* 以上の n について

$$|c_n - \alpha| = |c_n - a_n + a_n - \alpha|$$

$$\leq |c_n - a_n| + |a_n - \alpha|$$

$$\leq b_n - a_n + |+|a_n - \alpha|$$

$$\to (\alpha - \alpha) + 0 \quad (n \to \infty)$$

よって、系 28.21 より、 c_n は α に収束する.

 ϵ 論法による証明: a_n,b_n ともに α に収束すると仮定する. ϵ 論法より,任意の $\epsilon>0$ について,以下の論理式が成り立つ.

$$(\exists n_1 > n^*)(\forall n > n_1)(\alpha - \epsilon < a_n)$$

$$(\exists n_2 > n^*)(\forall n > n_2)(b_n < \alpha + \epsilon)$$

 $n>n^*$ のとき $a_n \leq c_n \leq b_n$ なので、任意の $\epsilon>0$ について、ある $n_0=\max(n_1,n_2)$ が存在して、 $n>n_0$ のとき、 $\alpha-\epsilon < c_n < \alpha+\epsilon$ が成り立つ.これは c_n が α に収束することを意味する.

 ϵ 論法のほうが直接的に証明できることがわかるであろう. また $\pm\infty$ を含む和や積の関係は以下である.

命題 28.25 2 つの数列 a_n,b_n について, a_n は実数に収束するか, ∞ に発散するか $-\infty$ に発散するかのいずれかとする。 b_n も同様とする。このとき,このとき拡張された実数の計算の定義 28.1 を用いて,以下が成り立つ:

(i). 和 $\lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n$ が $\overline{\pmb{R}}$ の意味で計算可能ならば,

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n$$

(ii). $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ で,積 $\lim_{n \to \infty} a_n \lim_{n \to \infty} b_n$ が \overline{R} の意味で計算可能ならば,

$$\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \lim_{n \to \infty} b_n$$

証明 α, β は実数とする. $\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n$ を仮定しても一般性を失なわないので、こう仮定する.

(i) の証明: 和の計算可能性より,以下の[1]から[5]までの場合分けで全ての場合が証明できる.

 $[1]a_n, b_n$ ともに収束するならば、定理 28.22 より証明済みである.

 $[2]\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ の場合: 右辺は ∞ である. ある n_0 が存在して, $n>n_0$ ならば $a_n>0$ である. このn について,

$$a_n + b_n > b_n \to \infty (n \to \infty)$$

なので、定理 28.23 より、 a_n+b_n は ∞ に発散する. 従って等式は成り立つ.

 $[3]\lim_{n o\infty}a_n=\infty,\,\lim_{n o\infty}b_n=\beta$ の場合: 右辺は ∞ である. 以下の2つの論理式が言える.

$$(\forall M \in \mathbf{R})(\exists n_1 > n^*)(\forall n > n_1)(a_n > M - \beta + 1)$$

$$(\exists n_2 > n^*)(\forall n > n_2)(b_n > \beta - 1)$$

従って、任意の M について、ある $n_0 = \max(n_1, n_2)$ が存在して、任意の $n > n_0$ について $a_n + b_n > M$. これは $a_n + b_n$ が ∞ に発散することを意味するので、等式は成り立つ.

- $[4]\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha,\lim_{n\to\infty}b_n=-\infty$ の場合: [3] と同様に証明すれば、等号は成り立つ.
- [5] $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=-\infty$ の場合: [2] と同様に証明すれば、等号は成り立つ.
- (ii) の証明: 積の計算可能性より,以下の[1]から[3]までの場合分けで全ての場合が証明できる.
- $[1]a_n, b_n$ ともに収束するときは、定理 28.22 で証明済みである.
- $[2]\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ の場合: 右辺は ∞ である. ある n_0 が存在して, $n>n_0$ ならば $a_n>1$ である. このn について,

$$a_n b_n > b_n \to \infty (n \to \infty)$$

なので、定理 28.23 より、 a_nb_n は ∞ に発散する. 従って等式は成り立つ.

 $[3]\lim_{n\to\infty}a_n=\infty,\lim_{n\to\infty}b_n=\beta>0$ の場合: 右辺は ∞ である. 以下の2つの論理式が言える.

$$(\exists n_2 > n^*)(\forall n > n_2)(b_n > \beta/2)$$

 $(\forall M \in \mathbf{R})(\exists n_1 > n^*)(\forall n > n_1)(a_n > 2M/\beta)$

従って、任意の M について、ある $n_0=\max(n_1,n_2)$ が存在して、任意の $n>n_0$ について $a_nb_n>M$. これは a_nb_n が ∞ に発散することを意味するので、等式は成り立つ.

Sympy Live で $\lim_{n\to\infty} 0.9999^n$ を求めるコードは,

limit(0.9999**n,n,oo)

である。0 となることを確認せよ.また $\lim_{n \to \infty} 2^n$ を返すコードを考えて,打ち込むこと.経済学では以下が重要である.

命題 28.26 |r| < 1 のとき

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$

証明

$$\sum_{k=0}^{n} r^{k} = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

$$\rightarrow \frac{1}{1 - r} \quad (n \rightarrow \infty)$$

無限級数については、32章でさらに詳しく紹介する.

28.8 a の n 乗根の定義

n が 2 以上の整数で,a>0 とする. $x^n=a$ となる実数 x>0 が唯一定まることは,証明無しで用いてきた.数列の極限を用いてここで証明しておく.

例題 28.27 n が 2 以上の整数, a>0 として, $x^n=a$ となる x を探したい. そこで数列 $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}, \{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ を以下のようにする.

- (i). $b_0 = 0, c_0 = 1 + a$
- (ii). b_k, c_k の決め方については,

(a)
$$\left(\frac{b_{k-1}+c_{k-1}}{2}\right)^n < a \ \mathcal{O} \ \mathcal{E}, \ b_k = \frac{b_{k-1}+c_{k-1}}{2}, c_k = c_{k-1}$$

(b) $\left(\frac{b_{k-1}+c_{k-1}}{2}\right)^n \geq a \ \mathcal{O} \ \mathcal{E}, \ b_k = b_{k-1}, c_k = \frac{b_{k-1}+c_{k-1}}{2}$

このとき b_k, c_k は同じ値に収束する.その収束値 c が, $x^n = a$ を満たす唯一の正数である.

明らかに $b_0^n < a, < c_0^n$ が成り立ち, b_k は上に有界な単調増加数列であり, c_k は下に有界な単調減少数列である.よってそれぞれ実数に収束する. b_k が β に収束すると仮定すると, b_k, c_k の作り方から $b_k \leq \beta \leq c_k$ なので,

$$0 \le c_k - \beta \le c_k - b_k = \frac{c_0 - b_0}{2^k}$$
 (定理 28.22(ii) と例題 28.19 より) \to 0 $(k \to \infty)$

従って c_k は β に収束する. つまり b_k と c_k は同じ値 β に収束する. $\beta=c$ として以下書いていく.

任意の k について, $b_k^n < a$. 両辺の極限値をとって $c^n \le a$ である.任意の k について, $c_k^n \ge a$. 両辺の極限値をとって, $c^n \ge a$ である.よって, $c^n = a$ となる.0 < x < y ならば $x^n < y^n$ なので,c 以外に $x^n = a$ を満たす正数は存在しない.

 $0^n = 0$ も含めて、以下のように定義できる.

定義 28.28 (n 乗根の定義) n は 2 以上の正整数とする. $a \ge 0$ について $x^n = a$ を満たす x を a の n 乗根といい, $\sqrt[n]{a}$ または $a^{1/n}$ で表す.

28.9 関数の極限値と、数列の極限値の関係

- (i). 区間 (a,∞) で定義された 1 変数実数値関数 f(x) について, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$ であることは, ∞ に発散 する任意の数列 $a_n \in (a,\infty)$ が $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \alpha$ を満たすことと,同値である.
- (ii). 区間 $(-\infty,b)$ で定義された 1 変数実数値関数 f(x) について, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\alpha$ であることは, ∞ に発散する任意の数列 $a_n\in (-\infty,b)$ が $\lim_{x\to\infty}f(a_n)=\alpha$ が成り立つことと,同値である.
- (iii). 区間 (a,b) で定義された 1 変数実数値関数 f(x) と $c \in [a,b]$ について、 $\lim_{x \to c} f(x) = \alpha$ であることは、c に収束する任意の数列 $a_n \in (a,b) \setminus \{c\}$ が $\lim_{x \to c} f(a_n) = \alpha$ を満たすことと、同値である.
- (iv). 区間 (a,b) で定義された 1 変数実数値関数 f(x) と $c \in [a,b)$ について, $\lim_{x \to c+0} f(x) = \alpha$ であることは, c に収束する任意の数列 $a_n \in (c,b)$ が $\lim_{n \to c+0} f(a_n) = \alpha$ を満たすことと,同値である.
- (v). 区間 (a,b) で定義された 1 変数実数値関数 f(x) と $c\in(a,b]$ について, $\lim_{x\to c-0}f(x)=\alpha$ であることは, c に収束する任意の数列 $a_n\in(a,c)$ が $\lim_{n\to c-0}f(a_n)=\alpha$ を満たすことと,同値である.

証明 同様にできるので, (i) と (iii) のみ証明する

(i) の証明. \Longrightarrow の証明. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$ より,任意の $\epsilon > 0$ について,ある x_0 が存在して, $x > x_0$ ならば, $|f(x) - \alpha| < \epsilon$ である. a_n は, ∞ に発散するので,この ϵ, x_0 に対して,ある $n_0 \in N$ が存在して, $n > n_0$ ならば $a_n > x_0$ である.まとめると,任意の $\epsilon > 0$ について,ある $n_0 \in N$ が存在して, $n > n_0$ のとき, $|f(a_n) - \alpha| < \epsilon$ である.これは $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$ を意味する.

 \longleftarrow の証明. 対偶を証明する. $\lim_{x\to\infty}f(x)=\alpha$ が成り立たないことは、ある $\epsilon>0$ が存在して、任意の $x_0\in \mathbf{R}$ について、ある $x>x_0$ が存在して、 $|f(x)-\alpha|\geq\epsilon$ である.

このxの1つを x_1 とする. x_1+1 より大きいxで $|f(x)-\alpha| \ge \epsilon$ を満たす x_2 は存在する. x_2+1 より大きくて $|f(x)-\alpha| \ge \epsilon$ を満たすx も存在するので、それを x_3 とする.

このように順に、 x_1, \cdots, x_n, \cdots という数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ を作っていくと、この数列は狭義単調増加数列であり、 $x_{n+1}-x_n>1$ であることから、数列 x_n は明らかに ∞ に発散する.一方、 x_n の各々の値については、 $|f(x_n)-\alpha|\geq \epsilon$ が成り立つ.従って、数列 $f(x_n)$ は α に収束しない.

以上より対偶が成り立つので、命題も成り立つ.

(iii) の証明. ⇒ の証明. $\lim_{x\to c} f(x) = \alpha$ より, 任意の $\epsilon > 0$ について, ある $\delta > 0$ が存在して, $0 < |x-c| < \delta$ ならば, $|f(x) - \alpha| < \epsilon$ である. c に収束する任意の数列 $a_n \neq c$ をとると, この δ に対して, ある $n_0 \in N$ が存在して, $n > n_0$ ならば $0 < |a_n - c| < \delta$ である.

まとめると、任意の $\epsilon>0$ について、ある $n_0\in N$ が存在して、 $n>n_0$ のとき、 $|f(a_n)-\alpha|<\epsilon$ である. これは数列 $f(a_n)$ が $n\to\infty$ で、 α に収束することを意味する.

 \longleftarrow の証明. 対偶を証明する. $\lim_{x\to c}f(x)=\alpha$ が成り立たないので、ある $\epsilon>0$ が存在して、任意の $\delta>0$ について、ある $x\in(c-\delta,c+\delta)\backslash\{c\}$ が存在して、 $|f(x)-\alpha|\geq\epsilon$ である.

この ϵ について、ある $\delta_0 > 0$ をとって、 $x \in (c - \delta_0, c + \delta_0) \setminus \{c\}$ かつ、 $|f(x) - \alpha| \ge \epsilon$ を満たす x が存在するので、その 1 つを x_0 とする.

 $\delta_1 = |x_1 - c|/2$ とする. $x \in (c - \delta_1, c + \delta_1) \setminus \{c\}$ かつ, $|f(x) - \alpha| \ge \epsilon$ を満たす x が存在するので,その 1 つを x_1 とする.

このように $i=1,2,\cdots$ について x_i を定めたときに、 $\delta_{i+1}=|x_i-c|/2$ として、 $x\in(c-\delta_{i+1},c+\delta_{i+1})\setminus\{c\}$ かつ、 $|f(x)-\alpha|\geq\epsilon$ を満たす x の 1 つを x_{i+1} とする.

このようにして、順に数列 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ を作る.

このとき $\delta_i \leq \delta_0/2^i \to 0$ $(i \to \infty)$ なので、 x_i は c に収束するが、全ての i について $|f(x_i) - \alpha| \geq \epsilon$ が言えるので、数列 $f(x_i)$ は α に収束しない.

以上より対偶が成り立つので, 命題も成り立つ.

28.10 関数の極限値と、四則演算・絶対値・不等式

前節の関数の極限は、 $x \to \infty, x \to -\infty, x \to c, x \to c + 0, x \to c - 0$ の 5 種類の方向で考えた。5 種類をいちいち書くのは大変なので、この節ではこれらを取りまとめて示すこととする。

仮定 28.29 1 変数実数値関数の定義域と極限値について,以下の5つのように場合分けする.

- (i). 定義域が (a, ∞) で、 $\lim_{x\to\infty}$ を表す.
- (ii). 定義域が $(-\infty, b)$ で、 $\lim_{r \to -\infty}$ を表す.
- (iii). 定義域が (a,b) で、 \lim は \lim を表す. ただし $c \in [a,b]$
- (iv). 定義域が (a,b) で、 $\lim_{x\to c+0}$ を表す。ただし $c\in [a,b)$
- (v). 定義域が (a,b) で, で lim は $\lim_{x\to c-0}$ を表す. ただし $c\in(a,b]$

この節の以下の4つの定理は、28.7節の定理を関数で表したものである。前節より、関数の極限値が数列の極限値として解釈できるので、この節の定理全て、証明はすでに行われたこととなる。

定理 28.30 (極限値と絶対値) 1 変数実数値関数 f(x) の定義域と \lim は、仮定 28.29 の 5 個のどれかとする. このとき、

- (i). $\lim f(x) = \alpha$ は、 $\lim |f(x) \alpha| = 0$ と同値である.
- (ii). $\lim f(x) = \alpha$ ならば、 $\lim |f(x)| = |\alpha|$

定理 28.31 (関数の極限値の四則) 2 つの 1 変数実数値関数 f(x), g(x) の定義域と lim は,2 つともに仮定 28.29 の 5 個のどれか一つと同じものとする.このとき,それぞれ $\lim f(x), \lim g(x)$ が存在するならば,

- (i). $\lim (f(x) + g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x)$
- (ii). $\lim(pf(x)) = p\lim f(x)$ (p は定数)
- (iii). $\lim (f(x)g(x)) = \lim f(x) \lim g(x)$
- (iv). $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ (ただし $\lim g(x) \neq 0$)

定理 28.32 2 つの 1 変数実数値関数 f(x),g(x) の定義域と \lim は,2 つともに仮定 28.29 の 5 個のどれかと する.このとき,任意の x で $f(x) \leq g(x)$ であり,またそれぞれ $\lim f(x), \lim g(x)$ が存在するとき,

 $\lim f(x) \le \lim g(x)$

┙

定理 28.33 (はさみうちの原理)3 つの 1 変数実数値関数 f(x), g(x), h(x) の定義域と \lim は、3 つともに 仮定 28.29 の 5 個のどれかとする.このとき,任意の x で $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ であり,またそれぞれ $\lim f(x), \lim h(x)$ が存在して等しいならば, $\lim f(x) = \lim g(x) = \lim h(x)$.

28.11 関数の連続性と四則演算

定義 28.34 区間 I で定義された関数 f(x) が $c \in I$ で連続であるとは、以下が成り立つことである.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$$

 $|x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$

また任意の $c \in I$ で連続のとき, f(x) は I で連続関数という.

連続関数の四則は以下のように書ける. 証明は一応書くが, 数列の極限値の四則 (定理 28.22) とほぼ同じように書けることを確かめると良い.

定理 28.35 区間 I で定義された関数 f(x),g(x) が $c\in I$ で連続であるとき,

- (i). f(x) + g(x) は c で連続
- (ii). af(x) は c で連続
- (iii). f(x)g(x) は c で連続
- (iv). f(x)/g(x) は c で連続 (ただし $g(c) \neq 0$)

証明 まず最初に, f(x), g(x) の仮定より, 任意の $\epsilon > 0$ について, 以下の 2 つの式が成り立つ.

$$\exists \delta_1 > 0 : |x - c| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon \exists \delta_2 > 0 : |x - c| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - g(c)| < \epsilon$$
 (28.12)

の2式がそれぞれ成り立つ.

(i) の証明: 任意の $\epsilon>0$ についての (28.12) 式から,ある正数 $\delta_0=\max\{\delta_1,\delta_2\}$ が存在して, $|x-c|<\delta$ ならば,

$$|f(x) + g(x) - (f(c) + g(c))| = |(f(x) - f(c)) + (g(x) - g(c))|$$

$$\leq |f(x) - f(c)| + |g(x) - g(c)|$$

$$< \epsilon + \epsilon$$

$$= 2\epsilon$$

が成り立つ. よって f(x) + g(x) は c で連続である.

(ii) の証明: 数列 aa_n については a=0 のときは自明であるので,以下 $a\neq 0$ とする.任意の $\epsilon>0$ について,(28.12) 式での δ_1 が存在して, $|x-c|<\delta_1$ のとき,

$$|af(x) - af(c)| = |a(f(x) - f(c))|$$
$$= |a| \cdot |f(x) - f(c)|$$
$$< |a| \cdot \epsilon$$

が成り立ち、|a| は ϵ とは無関係の正数なので、af(x) は c で連続.

(iii) の証明: g(x) の c での連続性より,ある正数 δ_3 が存在して $|x-c|<\delta_3$ のとき $|g(x)|\leq |g(c)|+1$ である. 任意の $\epsilon>0$ についての (28.12) 式からの δ_1,δ_2 を用いて, $\delta_0=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ とすると,任意の $|x-c|<\delta_3$ について,

$$|f(x)g(x) - f(c)g(c)| = |g(x)(f(x) - f(c)) + f(c)(g(x) - g(c))|$$

$$\leq |g(x)| \cdot |f(x) - f(c)| + |f(c)| \cdot |g(x) - g(c)|$$

$$< (|g(c)| + 1)\epsilon + |f(c)|\epsilon$$

$$= (|f(c)| + |g(c)| + 1)\epsilon$$
(28.13)

が成り立つ. (|f(c)| + |g(c)| + 1) は ϵ に無関係の正の定数なので, f(x)g(x) は c で連続である.

(iv) の証明:

(iii) が成り立つので、(iv) では f(x)=1 として証明すれば十分である。定理 $\frac{28.30}{x}$ より、 $\lim_{x\to c}|g(x)|=|g(c)|$ なので、ある $\delta_3>0$ が存在して、 $|x-c|<\delta_3$ のとき

$$\frac{|g(c)|}{2} < |g(x)|$$

が言える. 任意の $\epsilon>0$ についての (28.12) 式からの δ_2 を用いて, $\delta_0=\min\{\delta_2,\delta_3\}$ とすると, $|x-c|<\delta_3$ ならば.

$$\begin{split} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(c)} \right| &= \left| \frac{g(c) - g(x)}{g(x)g(c)} \right| \\ &= \frac{1}{|g(c)| \cdot |g(x)|} |g(x) - g(c)| \\ &< \frac{1}{|g(c)|^2/2} \epsilon \end{split}$$

が成り立つ. $\frac{1}{|q(c)|^2/2}$ は ϵ に無関係の正の定数なので, $\frac{1}{q(x)}$ は c で連続である.

数列との関係は以下となる.

定理 28.36 区間 I で定義された関数 f(x) が $c \in I$ で連続であることは、c に収束する任意の実数列 $x_n \in I$ が $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(c)$ を満たすことと、同値である.

証明は省略する.極限値の場合とほとんど同様にできる.

28.12 PC による数値計算

28.12.1 2 分法で a の平方根の近似値を求める

簡単化のため 0 < a < 1 とする. $f(x) = x^2 - a$ としたとき,f(0) < 0 f(1) > 0 f は [0,1] で狭義単調増加なので, $f(x_*) = 0$ となる x_* が唯一存在しそうである.実際存在することそして,その近似値を求める. 2 つの数列 b_n, c_n を以下のように定める.

- (i). $b_0 = 0, c_0 = 1$
- (ii). 任意の $n \ge 0$ について,

(a)
$$f\left(\frac{b_n+c_n}{2}\right)<0$$
 ならば, $b_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2},c_{n+1}=c_n$

(b) そうでない場合は、 $c_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2}, b_{n+1} = b_n$

あきらかに b_n は $b_n \le 1$ で上に有界だし単調増加数列. よって収束する. c_n は下に有界な単調減少数列なので収束する. まずはその様子を Excel のシートで見てみよう.

- (i). A1:E1 に見出しを書く. n,bn,cn, 平均,a= の順
- (ii). F1 に a の値を 0 から 1 の間で好きな数字を入れる.
- (iii). A2:E2 に数字・数式を書く. 0,0,1,=(B2+C2)/2,D2*D2-\$G\$1 の順
- (iv). A3:B3 に数式を書く.「=A2+1」「=if(E2<0,D2,A2)」「=if(E2>=0,D2,B2)」の順
- (v). C3:E3 は、C2:E2 をコピーする.
- (vi). A3:E3 をコピーして,下方向に A32:B32 までコピーする.

 $c_{32}-b_{32}=1/2^{32}$ となり、ほぼ 2*10 億分の 1. たった 32 回でここまでの近似値が得られる.

無論 $c_n-b_n=\frac{1}{2^n}\to 0 \quad (n\to\infty)$ であることから, b_n と c_n は $n\to\infty$ のとき一致し,それを x_* としよう. $b_n^2-a<0, c_n^2-a\geq 0$ だから $x_*^2-a\leq 0, x_*^2-a\geq 0$ より, $f(x_*)=0$ となる.この x_* を \sqrt{a} とよぶのである.

a=0,1 のとき \sqrt{a} もそれぞれ 0 と 1. q>1 のときは, $b_0=1,c_0=q$ として上の (ii) を繰り返せば, $n\to\infty$ のとき, b_n,c_n も同じ値に収束する.それを \sqrt{q} と呼ぶ.

ただし $b_0=1, c_0=q$ による PC で近似計算は収束が遅い. よって,a=1/q として上の (i)(ii) で \sqrt{a} の近似値を求めて, \sqrt{q} の近似値は, $\frac{1}{\sqrt{a}$ の近似値 とするとよい.

28.12.2 上下で e の近似値を挟みこむ

2 分法でも上下から挟み込んだわけだが、今度は e についてその近似値を求めてみよう。まず定義は $e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ である。実際 n についての数列 e_n を、

$$e_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

としたときに、明らかに単調増加数列である。まずはその様子を Excel のシートで見てみよう。

- (i). A1:C1 に見出しを書く. n,en,e の上限 gn の順
- (ii). A2:B2 に数字を書く. 0,1 の順
- (iii). A3:B3 に数式を書く. =A2+1,=A2+1/fact(A2)
- (iv). A3:B3 をコピーして、A22:B22 まで下方向にコピーする.

C 列は後で書く、B 列をみていると収束している感じがする、それには上に有界であることを示せばよい、 実際 $e_n \leq 3$ であることが以下から言える、

 $n \ge 2$ とすると,

$$e_n = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1/2}{1 - 1/2}$$

$$= 3$$

よって e_n は収束しその収束値を e と定義したのである. $e_n < e$ であるが、上のエクセルの C 列に $e \le g_n$ となる数列 g_n を書き込みたい.上と同様に以下のように表すことができる.

$$e = e_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$= e_n + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \cdots \right)$$

$$\leq e_n + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots \right)$$

$$= e_n + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}}$$

先につくった Excel のシートの C 列に、この最右辺を書いていけばよい.

- (i). C2 セルに数式を書く. =B2+1/(fact(A2+1)*(1-1/(A2+2)))
- (ii). C2 をコピーして,下方向に C22 までコピーする.

 $n o \infty$ のとき、明らかに $rac{1}{(n+1)!} \cdot rac{1}{1-rac{1}{n+2}}$ は 0 に収束する.

さらにこの値は n=15 だと、約 $5.07819\cdot 10^{-14}$ であるから、 e_{15},g_{15} と、たった 15 回繰り返すだけで、かなりの精度の近似値が得られるのである.

28.12.3 VBA で、a の平方根と e の近似値を作成する

前々節と前節での説明を基に、VBA でそれぞれの近似値を返す関数を作成する.

2 分法のプログラムは以下で得られる. a の数を入力し,区間 [b,c] が小さくなっていく様子を 10 回 msgbox で表示し,最後に近似値を返すものとする.

Sub mysqrt1()

Dim a, b, c, i, Mx_loop

'2 分法

a = CDbl(InputBox("(0,1) の範囲でaの数値入力"))

If a \leq 0 Or a \geq 1 Then

MsgBox "0<a<1 を入力すること. 終了"

Exit Sub

```
End If

b = 0
c = 1
Mx_loop = 20

For i = 1 To Mx_loop
x = (c + b) / 2
If x ^ 2 > a Then
c = x
Else
b = x
End If
MsgBox i & "回目:" & vbCr & b & vbCr & c
Next i
MsgBox "以上·以下·平均" & vbCr & b & vbCr & c & vbCr & (b + c) / 2
End Sub
```

どのような a を入れても,最初の幅が 1 なので,20 回で幅が $1/2^{20}$ である.これは 100 万分の $1(1/10^6)$ よりやや小さい.従って最後に出てくるメッセージボックスの 3 つの値を,全て小数第 6 位を四捨五入すれば,同じ値になる.つまりたった 20 回の繰り返しで,小数第 5 位まで正しい値が得られるのである.

これを書き直して,ワークシート上から値が求められるように関数化する.以下の mysqrt01 関数が一例である. mx_1oop は 40 にしたので,誤差は $1/2^{40}$ と約 1 兆分の 1 弱である.

```
Function mysqrt01(a)
    Dim b, c, i, Mx_loop
    '2 分法
    If a <= 0 Or a >= 1 Then
        mysqrt01 = "0<a<1 を入力すること. 終了"
        Exit Function
End If

b = 0
c = 1
    Mx_loop = 40

For i = 1 To Mx_loop
    x = (c + b) / 2
    If x ^ 2 > a Then
        c = x
    Else
```

b = x

```
End If
 Next i
 mysqrt01 = (b + c) / 2
End Function
 e については,まず e_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} を n が 15 になるまで,順番に表示するプログラム e_approx を考える
と,以下が一例である.
Sub e_approx()
 Dim i, s, myfact, Mx_loop
 s = 1
 myfact = 1
 Mx_{loop} = 15
 For i = 1 To Mx_loop
    myfact = myfact / i
    s = s + myfact
    MsgBox i & "回目:" & s
 Next i
End Sub
```

上で平方根を返す関数を作ったように、この e_approx を元にして、ワークシート上で表示できるような関数 mye() を作成してみるとよい.

29 <mark>3.3</mark> 節 (連続関数・導関数に関する重要な定理群) の証明

実数列や、1変数の関数の証明の重要なものは、この章に数多くある。とはいえ、平均値の定理・コーシーの平均値の定理などの証明は、すでに3.3節で済ませてあるので、それも見ておくこと。

29.1 数列の上極限と下極限 その1

数列 r^n を考えたときに, $r \le -1$ のときは $\lim_{n \to \infty} r^n$ は存在しない.よって,上記のような無限大を含む計算はできない.そこで極限値 \lim の拡張として,上極限 (じょうきょくげん)・下極限 (かきょくげん) を定義し,無限大を含む計算ができるようにする.

まず例として, $n \ge 1$ の数列,

$$a_n = \frac{1}{n}, \ b_n = 10n$$

を考えよう. それぞれの数列について $n \ge 1$ に関する上限を考えると、明らかに

$$\sup_{k \ge 1} a_k = 1, \quad \inf_{k \ge 1} b_k = \infty$$

である. sup の下の添字は、どの番号以降の数列についての上限をとったかという、条件を表す.

同様に、 $n \ge 2$ に関する上限を考えると、明らかに、

$$\sup_{k>2} a_k = \frac{1}{2}, \quad \inf_{k\geq 2} b_k = \infty$$

が成り立つ. $\sup a_k > \sup a_k$ と、 $\sup b_k = \sup b_k$ となっている. $n \geq 2$ 以降の上限を表す $\sup a_k, \sup b_k$ に $k \geq 1$ は、 $k \geq 2$ は、 $k \geq 1$ を $k \geq 2$ は、 $k \geq 1$ を $k \geq 2$ は、 $k \geq 1$ の値が考慮されていない。一方 $\sup a_k, \sup b_k$ には、 a_1 や b_1 の値が考慮されている。従って、 $k \geq 1$

 $k\geq 1$ $k\geq 1$ $\sup a_k,\sup b_k$ が、 $\sup a_k,\sup b_k$ よりも、小さいか等しくなることは明らかであろう。 $k\geq 2$ $k\geq 2$ $k\geq 1$

従って数列 a_n が与えられたとき, $\sup a_k$ については,以下の2通りの場合が考えられる. $k \ge n$

- (i). a_n が上に非有界のときは、以下と同値: $\sup_{k>0} a_k = \sup_{k>0} a_k = \cdots = \infty$
- (ii). a_n が上に有界のときは,以下と同値: 任意の n について, $\sup_{k\geq n}a_k$ は実数で, n について単調減少数列であり, $\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}a_k$ は実数か $-\infty$.
- (i) の式の場合を、 $\limsup_{n\to\infty} \sup_{k>n} a_k = \infty$ と定義する.

下限についても同様に、以下の2通りの場合が考えられる.

- (i). a_n が下に非有界のとき: $\sup_{k\geq 1} a_k = \sup_{k\geq 2} a_k = \cdots = -\infty$
- (ii). a_n が下に有界のとき: 任意の n について, $\sup_{k\geq n}a_k$ は実数で, n について単調増加数列であり, $\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}a_k$ は実数か ∞ .
- (i) の式の場合を, $\lim_{n \to \infty} \inf_{k \ge n} a_k = -\infty$ と定義する. これらよって,以下を定義できる.

定義 29.1 (上極限・下極限)数列 a_n について,

 $\lim_{n o \infty} \left(\sup_{k > n} a_k \right)$ が $\overline{m{R}}$ で唯一定まる.それを a_n の上極限と呼び,以下のように書く.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n$$
, $\sharp \, \sharp \, \sharp \, \limsup a_n$, $\sharp \, \sharp \, \sharp \, \limsup a_n$

(ii). $\lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k>n} a_k\right)$ が \overline{R} で唯一定まる. それを a_n の下極限と呼び、以下のように書く.

$$\liminf_{n \to \infty} a_n, \sharp \sharp \sharp \lim \inf a_n, \sharp \sharp \sharp \sharp \lim \underbrace{\lim}_{n \to \infty} a_n$$

このレジュメでは主に、 $\limsup a_n$, $\liminf a_n$ の形で表すとする. この節の最初の r^n については以下が言 える.

例題 29.2 r^n の上極限と下極限を表にまとめると以下が言える.

	$\liminf r^n$	$\limsup r^n$
r > 1	∞	∞
r = 1	1	1
r < 1	0	0
r = -1	-1	1
r < -1	$-\infty$	∞

上極限と下極限の作り方から,以下が言える.

定理 29.3 M は実数とする.数列 a_n について

- (i). $n \ge n^*$ のとき $a_n \le M$ ならば、 $\limsup a_n \le M$ 、 $\liminf a_n \le M$
- (ii). $n \ge n^*$ のとき $a_n \ge M$ ならば、 $\limsup a_n \ge M$ 、 $\liminf a_n \ge M$

このように、 $\liminf a_n, \limsup a_n$ が存在することと、定数で抑えられることが、いろいろな証明で用いら

今までは ϵ 論法を使わなかった.上限と数列の上極限の定義から,以下のように ϵ 論法で上極限を表すこと ができる.

定理 29.4 (上極限の ϵ 論法) 数列 a_n と実数 α について,以下の (i) から (iv) が成り立つ.

- (i). $\limsup a_n = \alpha$ は、以下の 2 つが成り立つことと同値である.
 - (a) 任意の $\epsilon>0$ について、ある $n_0\in \mathbf{N}$ が存在して、 $n>n_0$ ならば、 $a_n<\alpha+\epsilon$. 論理記号で書 くと.

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N} :$$

 $n > n_0 \Longrightarrow a_n < \alpha + \epsilon$

(b) 任意の $\epsilon > 0$ と任意の $n_0 \in \mathbb{N}$ について,ある $n > n_0$ が存在して, $\alpha - \epsilon < a_n$.論理記号で書 くと.

$$\forall \epsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbf{N}, \exists n > n_0, \alpha - \epsilon < a_n$$

(ii). $\limsup a_n = \infty$ は,任意の実数 M と任意の $n_0 \in \mathbb{N}$ について,ある $n > n_0$ が存在して, $a_n > M$ であることと同値である.論理記号で書くと,

$$\forall M \in \mathbf{R}, \forall n_0 \in \mathbf{N}, \exists n > n_0, a_n > M$$

(iii). $\limsup a_n = -\infty$ は、任意の実数 M について、ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して、任意の $n > n_0$ について、 $a_n < M$ であることと同値である。論理記号で書くと、

$$\forall M \in \mathbf{R}, \forall n_0 \in \mathbf{N} : n > n_0 \Longrightarrow a_n < M$$

証明 (i) のみ証明する.

 $\limsup a_n = \alpha$ ならば (a) が成り立つことは、 $\sup a_k$ が任意の n で実数かつ、n に関する単調減少数列で $k \ge n$ あり、それが α に収束することから言える.

 $\limsup a_n = \alpha$ ならば (b) が成り立つことの証明:

任意の $\epsilon>0$ と任意の $n_0\in \mathbf{N}$ を取る.このとき仮に,任意の $n>n_0$ について, $a_n\leq \alpha-\epsilon$ であると仮定する.このとき $\sup_{k\geq n_0+1}a_k\leq \alpha-\epsilon$ が言えるので, $\limsup a_n\leq \alpha-\epsilon$ となる.これは $\limsup a_n=\alpha$ と矛盾する.よってある $n>n_0$ が存在して, $a_n>\alpha-\epsilon$ が言える.

- (a) かつ (b) ならば $\limsup a_n = \alpha$ の証明:
- (a) より、任意の $\epsilon > 0$ について $\limsup a_n < \alpha + \epsilon$ が言えるので、 $\limsup a_n \leq \alpha$ である.
- (b) より、任意の $\epsilon>0$ について、 $\alpha-\epsilon<\sup_{k\geq n}a_k$ が言える.よって $\alpha-\epsilon\leq\limsup a_n$. ϵ は正で任意なので、 $\alpha\leq\limsup a_n$

従って $\limsup a_n = \alpha$ である.

(i) の (a) を見ると、上極限 α の右側 $\alpha+\epsilon$ については、数列の極限値の定義と同様の形をしているが、(b) の形が極限値の定義とは異なることに気をつけると良い。同様に右側という意味では、(iii) の $-\infty$ の形は、数列の $-\infty$ への発散と同じ形をしていることに気をつけると良い。

下極限についても同様に言える.

定理 29.5 (下極限の ϵ 論法) 数列 a_n と実数 α について、以下の (i) から (iv) が成り立つ.

- (i). 数列 $\liminf a_n = \alpha$ となることは、以下の 2 つが成り立つことと同値である.
 - (a) 任意の $\epsilon>0$ について,ある $n_0\in \mathbf{N}$ が存在して, $n>n_0$ ならば, $\alpha-\epsilon< a_n$. 論理記号で書くと.

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N} :$$

 $n > n_0 \Longrightarrow \alpha - \epsilon < a_n$

(b) 任意の $\epsilon>0$ と任意の $n_0\in {\bf N}$ について、ある $n>n_0$ が存在して、 $a_n<\alpha+\epsilon$. 論理記号で書くと.

$$\forall \epsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbf{N}, \exists n > n_0, a_n < \alpha + \epsilon$$

(ii). $\liminf a_n = \infty$ となることは、任意の実数 M について、ある $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して、任意の $n > n_0$ に

ら,以下が成り立つ.

ついて, $a_n > M$ であることと同値である. 論理記号で書くと,

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N} : n > n_0 \Longrightarrow a_n > M$$

(iii). $\liminf a_n = -\infty$ となることは、任意の実数 M と任意の $n_0 \in \mathbb{N}$ について、ある $n > n_0$ が存在して、 $a_n < M$ であることと同値である、論理記号で書くと、

$$\forall M \in \mathbf{R}, \forall n_0 \in \mathbf{N}, \exists n > n_0, a_n < M$$

定理 29.4・定理 29.5 と,実数列の収束の ϵ 論法の定義や,実数列の $\pm\infty$ への発散の ϵ 論法による定義か

系 29.6 数列 a_n について、 α は実数とする.

- (i). $\lim a_n = \alpha$ であることは、 $\liminf a_n = \limsup a_n = \alpha$ と同値である.
- (ii). a_n が ∞ に発散することは、 $\liminf a_n = \infty$ と同値である.
- (iii). a_n が $-\infty$ に発散することは、 $\limsup a_n = -\infty$ と同値である.

例題 29.2 の r>1, r=1, |r|<1 の場合で確認すると良い.また上極限と収束については,以下も基本的である.

定理 29.7 数列 a_n と実数 α について,

$$\lim a_n = \alpha \Longleftrightarrow \lim \sup |a_n - \alpha| = 0$$

証明 \implies の証明: $\lim a_n = \alpha$ より,任意の $\epsilon > 0$ について,ある $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して,任意の $n > n_0$ に

ので、 $\limsup |a_n - \alpha| = 0$ である.

← の証明:

 $|a_n-\alpha|\geq 0$ と上極限の ϵ 論法の (a) から、数列 $|a_n-\alpha|$ が 0 に収束する.これは a_n が α に収束すること と同値である.

ついて, $0 \le |a_n - \alpha| < \epsilon$ である. 定理 29.3 より, $0 \le \limsup |a_n - \alpha| \le \epsilon$ が成り立つ. ϵ は任意の正数な

この定理は α の値が既知の場合である. 場合によっては α が未知でも、収束することを言いたいことがあるが、以下の場合それが言える.

系 29.8 以下は同値である.

- (i). 数列 a_n が収束する.
- (ii). a_n が有界で、 $\limsup a_n = \liminf a_n$ が成り立つ

┙

29.2 実数列の性質のつづき.上極限とボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理

簡単化のためこの節の数列は n=1 や k=1 からスタートすると仮定する. $a_n=(-1)^n/n$ から例えば n=2,4,6 と偶数のものを順に取り出した数列を考えると,

$$1/2, 1/4, 1/6, \cdots$$

のようになる.このようにある数列が与えられたときに、その一部分を取り出して作る数列を、部分列という.きちんと定義すると以下である.

定義 29.9 数列 a_n について,k から $n \in N$ への狭義単調増加な整数列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ によって,新しくできる数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ を, a_n の部分列という.

定理 29.10 (ボルツァーノ・ワイエルシュトラス) 有界な数列は収束する部分列を持つ

証明 数列 a_n が、任意の $n \ge 1$ について、 $a \le a_n \le b$ を満たす有界数列とする.従ってその上極限を α とすると、定理 29.3 より、 $a \le \alpha \le b$ を満たす.定理 29.4(ii) より $i = 1, 2, \cdots$ について、順に

- (i). 整数 n > 1 で、 $\alpha 1 < a_n$ となるものが存在するので、この n を n_1 とする.
- (ii). 整数 $n > n_1$ で、 $\alpha 1/2 < a_n$ となるものが存在するので、この n を n_2 とする.
- (iii). $k \ge 2$ について以下同様に、整数 $n > n_k$ で、 $\alpha 1/k < a_n$ となるものが存在するので、この n を n_{k+1} とすると定める.

この順序で得られた整数 n_i を用いた, a_n の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を考える.この部分列の作り方と定理 29.4(i) から, a_{n_k} は α に収束する.よって命題が成りたつ.

上の証明では上極限に収束する部分列を作ったが、同様にして下極限に収束する部分列を作ることもできる.

初見だと,こんな定理の何が役立つかと思うが、実はとても重要な定理であり、次節の証明で用いられる.

29.3 定理 3.1 (最大・最小の定理)の証明

計明

有界閉区間 [a,b] で定義された関数 f(x) が,[a,b] で連続であるとする。[1] 上に有界であることを,背理法で証明する:

f(x) は上に有界でないと仮定すると、区間 [a,b] 内の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で、

$$f(x_n) > n$$

を満たすものが存在する. この x_n は有界区間 [a,b] にあるので、ボルツァーノ・ワイエルストラスの定理より、収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を持つ. x_n の作り方から、 $f(x_n)$ は ∞ に発散するので、その部分列も同様に

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \infty \tag{29.1}$$

がいえる. 部分列 x_{n_k} は収束するので、その収束値を α とすると、 $a \leq \alpha \leq b$ である. [a,b] で f(x) は連続

なので,

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k \to \infty} x_{n_k})$$
$$= f(\alpha) \in \mathbf{R}$$

がいえるが、これは (29.1) 式と矛盾する. よって f(x) は有界である.

[2]f(x) が [a,b] で最大値を持つことを証明する.

f(x) は上に有界なので、上限 s を持つ、上限の性質から $n=1,2,\cdots$ に対して、

$$f(x_n) > s - 1/n$$

となる数列 x_n をとることができる. $x_n \in [a,b]$ なのでボルツァーノ・ワイエルストラスの定理より, x_n は,収束する部分列 x_{n_k} を持つ.この部分列の収束値を α とすると, $\alpha \in [a,b]$ である.部分列の作り方から $n_k \geq k$ なので,上の式から,

$$f(x_{n_k}) > s - 1/k$$

がいえる. f は連続関数なので、両辺のk に関する極限をとると、

$$f(\alpha) \ge s$$

が言える. これは f が $\alpha \in [a,b]$ で最大値をもつことを意味する.

29.4 定理 3.2(中間値の定理) の証明

証明 同様にできるので f(a) < f(b) の場合のみ証明する。任意の定数 $\gamma \in (f(a),f(b))$ について,区間 [a,b] の部分集合 $X = \{x|u \geq x \Longrightarrow f(u) \geq \gamma\}$ を考える。 $b \in X$ なので,X は非空である。さらに X は有界集合なので,下限 inf X が存在する。それを x_0 とする。

2点 x=a,b での f(x) の連続性と $f(a)<\gamma< f(b)$ より、簡単な計算から $a< x_0< b$ が言える.また x_0 の定義から、

$$u \ge x_0 \Longrightarrow f(u) \ge \gamma$$
 (29.2)

が成り立つ.

仮に $f(x_0) > \gamma$ とする. f(x) の連続性から,ある $\epsilon > 0$ (ただし $\epsilon < f(x_0) - \gamma$) について,ある $\delta > 0$ (ただし $\delta < x_0 - a$) が存在して, $x_0 - \delta < x < x_0$ ならば, $f(x_0) - \epsilon < f(x)$ が言える. つまり $\gamma < f(x)$ が言える.

よってこの δ について, $x_0 - \delta/2 \in [a,b]$ であり、かつ (29.2) 式と合わせて、

$$u \ge x_0 - \delta/2 \Longrightarrow f(u) \ge \gamma$$

が言える. これは $(x_0 - \delta/2) \in X$ を意味するが, $x_0 = \inf X$ に矛盾する.

次に仮に $f(x_0) < \gamma$ とする. f(x) の連続性より,ある $\epsilon > 0$ (ただし $\epsilon < \gamma - f(x_0)$) について,ある $\delta > 0$ (ただし $\delta < b - x_0$) が存在して, $x_0 < x < x_0 + \delta$ ならば, $f(x) < f(x_0) + \epsilon < \gamma$ が言える.これは (29.2) 式に矛盾する.

以上より、
$$f(x_0) = \gamma$$
 である.

29.5 導関数の定義と定理 3.3 の証明

前節と前々節は、導関数には関係なかった.次節以降では導関数が関係してくる.春の講習でも行ったが、 ここで定義をきちんと書いておこう.

定義 29.11 区間 I で定義された関数 f(x) について, $c \in I$ とする.

- (i). $\lim_{\substack{h\to -0\\ \text{で表す}}} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ が存在するとき、これを f(x) の c の左側導値または左側微分係数といい、 $f'_-(c)$
- (ii). $\lim_{h\to +0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ が存在するとき、これを f(x) の c の右側導値または右側微分係数といい、 $f'_+(c)$ で表す.
- (iii). $\lim_{\substack{h\to 0 \ \text{h}}} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ が存在するとき,これを f(x) の c の導値または微分係数といい,f'(c) であらわす.
- (iv). 任意の $c \in I$ で f(x) の導値が存在するとき,f(x) は I で微分可能と言う.f'(x) を f(x) の導関数と呼ぶ.導関数は他に, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$ などでも表す.また,f(x) から導関数 f'(x) を求めることを,f(x) を x で微分するという.
- (v). 任意の $c \in I$ で f(x) の左側導値 (resp. 右側導値) が存在するとき,f(x) は I で左側 (resp. 右側) 微分可能と言う。 $f'_{-}(x)$ (resp. $f'_{+}(x)$) を f(x) の左側導関数 (右側導関数) と呼ぶ.

┙

計算自体はすでに f''(x) など 2 階導関数の計算を行ってきたので馴染みがあるだろうが,n 階導関数の定義も書いておく.

定義 29.12 区間 I で定義された関数 f(x) の導関数 f'(x) を, $f^{(1)}(x)$ と表すこともある. さらに,

- (i). f'(x) が導関数を持つとき、f(x) は I で 2 回微分可能であるといい、それを f''(x) または $f^{(2)}(x)$ で表し、f(x) の 2 階導関数という.
- (ii). $f^{(2)}(x)$ が導関数を持つとき、f(x) は I で 3 回微分可能であるといい、それを $f^{(3)}(x)$ で表し、f(x) の 3 階導関数という.
- (iii). 上記 (ii) を, $f^{(i)}(x)$ について $i=3,4\cdots,n-1$ と繰り返して, $f^{(n)}(x)$ が得られるとき, f(x) は I で n 回微分可能であるといい, $f^{(n)}(x)$ を f(x) の n 階導関数という.
- (iv). f(x) が n 階導関数を持ち、それが I で連続関数の時、f(x) は C^n 級であるという.
- (v). 任意の正整数 n について,
 - (a) f(x) が n 階導関数を持つとき、f(x) は ∞ 回微分可能であるという.
 - (b) 上記 (a) かつ、任意の n で $f^{(n)}(x)$ が I で連続関数の時、f(x) は I で C^{∞} 級であるという.

_

定理 3.3 の証明:

区間 I で定義された関数 f(x) が, $c \in I$ で導値 f'(c) を持つとする.

このとき, ある $\delta > 0$ があって, $|x-c| < \delta$ ならば,

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < 1$$

が成り立つ.変形して

$$|f(x) - f(c)| < (1 + |f'(c)|) \cdot |x - c|$$

$$\rightarrow 0 \quad (x \rightarrow c)$$

これより $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ なので、f(x) は c で連続である.

29.6 定理 <mark>3.4</mark>(ロルの定理) の証明

証明 [1] 区間 [a,b] で f(x)=0 のときは、明らかに命題が成り立つ.

[2]f(x) の最大値が正の場合を考える。最大・最小の定理 (定理 3.1) と f(a)=f(b)=0 より、ある $x_0\in(a,b)$ で f(x) は最大値を取る。よって、任意の x について、 $f(x)-f(x_0)\leq 0$ 。このとき以下の 2 式が成り立つ。

$$x < x_0 \Longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$$
$$x > x_0 \Longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$$

この 2 式について上は $x \to x_0 - 0$, 下は $x \to x_0 + 0$ について, それぞれ極限を取ると, 微分可能性より

$$f'(x_0) \ge 0$$
$$f'(x_0) \le 0$$

が成り立つ. 従って, $f'(x_0) = 0$ となり, 命題が成り立つ.

[3] 最大値が 0 の場合で [1] 以外の場合を考えよう.このとき最大・最小の定理 (定理 3.1) と f(a)=f(b)=0 より,ある $x_0\in(a,b)$ で f(x) は最小値を取る.以下 [2] と同様にして,命題が成り立つ.

29.7 定理 3.7(テイラーの公式) の証明

テイラーの公式は,次の定理の系として得られる.

定理 29.13 (一般化された平均値の定理) [a,b] で定義された 2 つの連続関数 f(x),g(x) が,ともに a で n-1 階導値を持ち,かつ (a,b) で n 階導関数 $f^{(n)}(x),g^{(n)}(x)$ をもち,それらが (a,b) で有界とする.このとき以下の式を満たすある数 $c \in (a,b)$ が存在する.

$$g^{(n)}(c)\left[f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k\right] = f^{(n)}(c)\left[g(b) - g(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k\right]$$
(29.3)

-

証明

$$H(x) = \left[f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k \right] \left[g(b) - g(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(x)}{k!} (b - x)^k \right] - \left[f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b - x)^k \right] \left[g(b) - g(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k \right]$$

とする.これは,[a,b] で連続で,(a,b) で微分可能で H(a)=0, H(b)=0 である.よってロルの定理より H'(c)=0 となる $c\in(a,b)$ が存在する.H'(x) は,

H'(x)

$$\begin{split} &= \left[f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right] \left[-g'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{g^{(k+1)}(x)}{k!} (b-a)^k - \frac{g^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-a)^{k-1} \right) \right] \\ &- \left[-f'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-a)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-a)^{k-1} \right) \right] \left[g(b) - g(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right] \\ &= \left[f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right] g^{(n)}(x) - f^{(n)}(x) \left[g(b) - g(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right] \end{split}$$

なので.

$$\left[f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k \right] g^{(n)}(c) - f^{(n)}(c) \left[g(b) - g(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k \right] = 0$$

が成り立つ. 移項して (29.3) 式が得られる.

a と b を入れ替えて、以下も成り立つ。

系 29.14 (一般化された平均値の定理) [b,a] で定義された 2 つの連続関数 f(x),g(x) が,ともに a で n-1 階導値を持ち,かつ (b,a) で n 階導関数 $f^{(n)}(x),g^{(n)}(x)$ をもち,それらが (b,a) で有界とする.このとき (29.3) 式を満たす $c \in (b,a)$ が存在する.

テイラーの公式の証明 (定理3.7) は以下となる.

[a,x] の場合は定理 29.13 によって,[x,a] の場合は系 29.14 によって,それぞれ (29.3) 式について,b に x を代入し, $g(x)=(x-a)^n$ を代入することによって,

$$n! \left[f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \right] = f^{(n)}(c)(x - a)^n$$

x と a の大小にかかわらず、c はその間の数なので、ある $\lambda \in (0,1)$ によって、 $c=(1-\lambda)x+\lambda c$ と表すことができる.これを上の式に代入して変形することによって

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n)}((1 - \lambda)x + \lambda a)}{n!} (x - a)^n$$

が得られる.

導関数の四則・合成関数の微分・逆関数の微分 30

30.1 導関数の四則

定理 30.1 区間 I で定義された関数 f(x), g(x) が I で微分可能とする. このとき以下が成り立つ.

- (i). $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$
- (ii). $\{pf(x)\}' = pf'(x)$ (p は定数)

(iii).
$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(iv). $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ (7276 $g(x) \neq 0$)

- (i)(ii) は簡単なので, 省略する.
- (iii) の証明:

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
 極限値の四則より $\rightarrow f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ $(h\rightarrow 0)$

(iv) の証明: (iii) なので、f(x) = 1 として証明しても一般性を失わない。 $\{1/g(x)\}' = -g'(x)/[g(x)]^2$ を 証明すればよい.

$$\begin{split} \frac{1/g(x+h)-1/g(x)}{h} &= \frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} \\ &= -\frac{1}{g(x)}\frac{1}{g(x+h)}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ & \\ & \underline{$$
極限値の四則より $\rightarrow -\frac{1}{g(x)}\frac{1}{g(x)}g'(x) \quad (h \rightarrow 0) \end{split}$

すでに何回も何回も計算しているが,以下の証明はしていないので,ここで示す.

命題 30.2 n は整数とする.実数を定義域とする x の関数 x^n の導関数は nx^{n-1}

証明 n=0 のときは $x^n=1$ だから、導関数が 0 になるので明らかに成り立つ。

┙

$$n\geq 1$$
 のときは、 $a^n-b^n=(a-b)\sum_{i=0}^{n-1}a^ib^{n-1-i}$ より,
$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\frac{h\sum_{i=0}^{n-1}(x+h)^ix^{n-1-i}}{h}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}(x+h)^ix^{n-1-i}$$
 連続関数の四則より $\to\sum_{i=0}^{n-1}x^ix^{n-1-i}$ $(h\to 0)$

 $n \le -1$ のときを考える. $m = -n \ge 1$ として, $x^n = \frac{1}{r^m}$ である. 商の微分より,

$$\begin{aligned} \{x^n\}' &= \frac{-\{x^m\}'}{[x^m]^2} \\ \text{(ii) } \& \mathcal{Y} &= -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} \\ &= -\frac{m}{x^{m+1}} \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

 $n\geq 1$ のときは、 x^n を $x^{n-1}\cdot x$ と分けて、積の微分についての数学的帰納法で証明することもできるし、二項定理で $(x+h)^n=\sum_{k=0}^n {C_k} x^{n-k} h^k$ を使って証明することもできる.

では例として, $f(x)=x^7$ について,f'(x) を定義に従って sympy Live で求めてみよう. コンソール上で,以下の順に打ち込むとよい. 4 行目で $((x+h)^7-x^7)/h$ の分子を因数分解して約分したものが得られる. それを見たら,5 行目の答えを見なくとも $h\to 0$ のとき $7x^6$ となることが明らかとなる.

h=symbols('h')

f1=((x+h)**7-x**7)/h

f1.factor()

limit(f1,h,0)

g.factor() によって、 $((x+h)^7-x^7)/h$ を書き下した式が表記される。この式を見ると、最後の行がなくとも、 $h\to 0$ のとき f1 が $7x^6$ に収束することが分かるであろう。

 C^{∞} 級と、 x^n の関係について述べる。n が正整数で $f(x)=x^n$ のとき、m>n となる任意の m で f(x) の m 階導関数 $f^{(m)}(x)=0$ であり、これは当然連続関数である。従って、

命題 30.3 n は 0 以上の正数とする.実数を定義域とする x の関数 x^n は, C^∞ 級である.

 $f(x)=x^2+x+1, g(x)=x^3$ としよう. このとき導関数の四則演算を sympy Live で確かめてみよう. 1 変数関数の微分なので diff の第 2 引数に x を書かず省略可能である.

x=symbols('x')

f=x**2+x*1

```
g=x**3
f1=diff(f)
g1=diff(g)
print(f1,g1)
print(diff(f+g))
print(diff(f+g)-(f1+g1))
print(diff(f*g))
print(diff(f*g)-(f1*g+f*g1))
print(diff(f/g))
```

5 行目で、f'(x) = 2x + 1, $g'(x) = 3x^2$ が表記される。7 行目と 9 行目の結果がそれぞれ 0 となるのは、和の微分 $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$ と積の微分 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ からである。

12 行目も商の微分から 0 になるはずだが、そのような返ってこないであろう.これは項を簡単にさせる simplify を以下の様に用いれば、0 が返ってくる.

```
print(simplify(diff(f/g)-(f1*g-f*g1)/g**2))
```

simplify の代わりに、因数分解をする factor か、展開する expand を用いても、0 が返ってくる。色々な関数で確かめてほしい。

30.2 合成関数とその微分

29 ページで, $(7x^2 + 4x)^{100}$ について述べ, (3.2) 式で合成関数の微分方法を説明した. しかし定義も証明もしていないので, それらをこの節で行う.

定義 30.4 2 つの実数の部分集合 X,U と、 $x\in X$ の実数値関数 f(x) と、 $u\in U$ の実数値関数 g(u) を考える. 任意の $x\in X$ について $f(x)\in U$ のとき、 $x\in X$ の関数 g(f(x)) が存在する. これを $g\circ f(x)$ と表し、f と g の合成関数という.

連続関数の合成関数は連続関数である.

定理 30.5 定義 $\frac{30.4}{0}$ の条件を満たす f(x),g(u) があって,f(x),g(u) とも定義域で連続とする.このとき合成関数 $g\circ f(x)$ も連続である.

証明 任意の $c \in X$ と f(c) をとる. f(x) と g(u) の連続性より,以下が言える.

- 任意の $\epsilon > 0$ について、ある $\delta_1 > 0$ が存在して、 $|u f(c)| < \delta_1$ ならば、 $|g(u) g(f(c))| < \epsilon$
- この $\delta_1 > 0$ について,ある $\delta_2 > 0$ が存在して,任意の $|x-c| < \delta_2$ ならば, $|f(x) f(c)| < \delta_1$

よって、任意の $\epsilon>0$ について、ある $\delta_2>0$ が存在して、 $|x-c|<\delta_2$ ならば $|g(f(x))-g(f(c))|<\epsilon$ なので、g(f(x)) は c で連続である。c は任意なので、 $x\in X$ で $g\circ f(x)$ は連続関数である。

イメージとしては、y=g(u), u=f(x) として、x=c から、x を Δx だけ増やした時の u の増分を Δu とする.そしてそのときの y の増分が Δy とする.このとき, $\Delta u \neq 0$ ならば,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

で、 $\Delta x \to 0$ ならば $\Delta u \to 0$ なので、上の両辺で $\Delta x \to 0$ とするつ、

$$\{g \circ f(x)\}' = g'(f(x))f'(x)$$

となる. イメージとしての理解では、これで問題はないが、実際には $\Delta u = 0$ となる場合も証明しなければならない.

そこで面倒ではあるが,以下の順で証明する.

定理 30.6 開区間 I で定義された関数 f(x) について, $c \in I$ で微分可能であることは,ある $\delta > 0$ が存在して,開区間 $(c-\delta,c+\delta)$ で定義されたある連続関数 v(x) と,ある実数 α が存在して,

$$\begin{cases} f(x) - f(c) &= v(x)(x - c) \\ v(c) &= \alpha \end{cases}$$

を満たすことと同値である.

証明

(i). \Longrightarrow の証明: c で微分可能なので,ある $\delta>0$ が存在して, $0<|x-c|<\delta$ を満たす任意の x について,v(x) を

$$v(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} & \text{(if } x \neq c)\\ f'(c) & \text{(if } x = c) \end{cases}$$

とすればよい.

(ii). \iff の証明: $x \neq c$ ならば

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = v(x)$$

であり、v(x) は c で連続なので、 $x\to c$ のとき右辺は α に収束する.よって、 $x\to c$ のときの左辺の極限値が存在する.よって f(x) が c で微分可能となる.

結果としてこの定理の α が f'(c) となる.

この証明のように「ある $\delta>0$ が存在して,開区間 $(c-\delta,c+\delta)$ が存在して」と書くのは面倒なので,次の証明では δ 近傍という表現を多用する.

定理 30.7 定義 30.4 の条件を満たす f(x),g(u) があって,f(x),g(u) とも定義域で微分可能とする.このと き合成関数 $g\circ f(x)$ の導関数は,

$$\{g \circ f(x)\}' = g'(u)|_{u=f(x)} \cdot f'(x)$$
$$= g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

┙

証明 任意の $c \in X$ をとる. 定理 30.6 より,g(u) が微分可能であることから,f(c) のある δ_1 近傍で定義された u の関数 $v_1(u)$ で,

$$\begin{cases} g(u) - g(f(c)) &= v_1(u)(u - f(c)) \\ v_1(f(c)) &= g'(f(c)) \end{cases}$$
(30.1)

が成り立つような連続関数が存在する. f(x) は微分可能なので x の連続関数である. よって, この δ_1 について, ある $\delta_2 > 0$ が存在して, $|x-c| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x)-f(c)| < \delta_1$ が存在する. 定理 30.6 より, この δ_2 より さらに小さい $\delta > 0$ をとって, c の δ 近傍で, 以下の様に定義された関数 $v_2(x)$ が存在する.

$$\begin{cases} f(x) - f(c) &= v_2(x)(x - c) \\ v_2(c) &= f'(c) \end{cases}$$
 (30.2)

この c の δ 近傍において,(30.1) 式と (30.2) 式から,u = f(x) を代入すると

$$\begin{cases} g(f(x)) - g(f(c)) &= v_1(f(x))(f(x) - f(c)) \\ v_1(f(c)) &= g'(f(c)) \end{cases}$$
(30.3)

(30.2) 式を代入して,

$$\begin{cases} g(f(x)) - g(f(c)) &= v_1(f(x))v_2(x)(x - c) \\ v_1(f(c))v_2(c) &= g'(f(c))f'(c) \end{cases}$$
(30.4)

合成関数の連続性から、 $v_1(f(x))$ は x について連続、 $v_2(x)$ は x について連続なので、その積 $v_1(f(x))v_2(x)$ も連続関数である。よって、この式と定理 30.6 から、合成関数 $g \circ f$ が c で微分可能である。

30.3 逆関数とその微分

定義 30.8 実数の部分集合 X で定義された関数 f(x) について,その f(x) の値域の集合を $Y = \{f(x)|x \in X\}$ とする.任意の $y \in Y$ について,f(x) = y を満たす $x \in X$ が一意に定まるとき,

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

を満たす関数 f^{-1} が存在する. これを f の逆関数という.

1 変数実数値関数の逆関数の存在は、狭義単調関数に関するものがほとんどなので、これに注目する.

命題 30.9 実数の部分集合 X で定義された関数 f(x) が狭義単調増加 (resp. 減少) 関数とする. f(x) の値域 の集合を $Y=\{f(x)|x\in X\}$ とする. このとき Y で定義された, f の逆関数 f^{-1} が存在し、これも y について狭義単調増加 (resp. 減少) 関数となる.

簡単なので証明は省略する.

命題 30.10 区間 I_x で定義された関数 f(x) が狭義単調関数で I_x で連続とする.

- (i). このとき f(x) の値域の集合 $\{f(x)|x \in I_x\}$ も区間となる.
- (ii). 前命題より、(i) の区間を定義域とする f^{-1} が存在するが、これも連続関数となる.

┙

証明 狭義単調増加の場合のみ証明する.

(i) の証明. 背理法で示す. 値域の集合 $Y = \{f(x)|x \in I_x\}$ が区間にならないと仮定する. このとき, I_x に含まれるある 2 数 a < b と, $\gamma \in (f(a), f(b))$ があって, γ が Y に含まれない. しかし f(x) が連続関数だから, 中間値の定理 (定理 3.2) に対して矛盾が生じる. よって Y は区間である.

(ii) の証明.

 $(1)I_x$ が開区間の場合: $I_x=(a,b)$ としても一般性は失わないので,こう仮定する.(i) の Y を用いて,ある適当な $y_0\in Y$ をとり, $x_0=f^{-1}(y_0)$ とする. $x_0\in I_x$ なので,任意の正数 $\epsilon<\frac{1}{2}\min\{x_0-a,b-x_0\}$ について閉区間 $[x_0-\epsilon,x_0+\epsilon]$ は I_x に含まれる.

この ϵ について、f(x) の定義と、中間値の定理より、 $f(x_0 - \epsilon < y < f(x_0 + \epsilon)$ を満たす任意の y について、f(x) = y となる x が、開区間 $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ で存在する.

そこで、 $\delta = \min\{f(x_0) - f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)\}$ として、 $y_0 = f(x_0), x = f^{-1}(y)$ で上記を書き直すと、

 $\frac{1}{2}\min\{x_0-a,b-x_0\}$ 未満の任意の正数 ϵ について,ある $\delta>0$ が存在して, $|y-y_0|<\delta$ ならば, $|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|\leq\epsilon$ が成り立つ.これは y_0 で $f^{-1}(y)$ が連続であることを意味している. y_0 は任意なので, $f^{-1}(y)$ は区間 Y で連続関数である.

- (2) $I_x=[a,b)$ や $I_x=[a,\infty)$ の場合の a での連続性を示す場合も,(1) の場合を少し変更して連続性が言える.
- (3) $I_x=(a,b]$ や $I_x=[-\infty,b]$ の場合の b での連続性を示す場合も,(2) の場合を少し変更して連続性が言える.

これにより, x の関数 x^n の連続性から, $x \ge 0$ の n 乗根の関数 $\sqrt[n]{x}$ の連続性が言える. また微分に関しては以下が言える.

定理 30.11 (逆関数の微分) 区間 I_x で定義された関数 f(x) が、狭義単調連続関数とする. 区間 $I_y=\{f(x)|x\in I_x\}$ を定義域とする,f(x) の逆関数 $f^{-1}(y)$ が存在することは前定理より言える. さらに、

(i). f(x) が I_x で微分可能の時, $f^{-1}(y)$ も I_y で微分可能であり,導関数は以下のように書ける.

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} \Big|_{x=f^{-1}(y)}$$
$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

(ii). f(x) が I_x で C^1 級ならば、 $f^{-1}(y)$ も I_y で C^1 級である.

証明 (i) の狭義単調増加の場合のみ証明する.

任意の $y \in I_y$ について、で y = f(x) となる $x \in I_x$ が唯一存在する.

十分小さい $\Delta y \neq 0$ をとるとき, $y + \Delta y \in I_y$ とすると, $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$,となる $\Delta x \neq 0$ が唯一存在する.また f が I_x で微分可能であることから,f は I_x で連続なので, $\Delta y \to 0$ のとき $\Delta x \to 0$ となる.

よって,

$$\frac{\Delta f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$= \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$\to \frac{1}{f'(x_0)} \quad (\Delta y \to 0)$$

$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

これにより, $n \geq 2$ において, x > 0 の x の関数 $\sqrt[n]{x}$ の導関数が, $\frac{1}{n}x^{1/n-1}$ で表されることが言える.

31 関数の凹凸と連続

この章では区間で定義された関数の凹凸についての特徴づけを行う. 微分可能性は仮定しないので、主に 3.9.1 節で取り上げなかった部分を述べる.

31.1 片側微分可能関数の性質

凹凸と密接な関係にある片側微分について, まず述べておく.

また,区間で微分可能ならば連続であることの証明 (定理 3.3 の証明は 29.5 節) と全く同様にして,以下が言える.

命題 31.1 開区間 I で定義された関数 f(x) が,右側微分可能であれば,右側連続である.左側微分可能であれば,左側連続である.

開区間 \check{I} で微分可能な関数 f(x) が,c で最大点を持つならば f'(c)=0 であった.これを左側導関数と,右側導関数について拡張したものが以下である.

補題 31.2 (1階の条件の拡張とロルの定理の拡張)

(i). 開区間 \check{I} を定義域とする関数 f(x) が, \check{I} で左側微分と右側微分ともに可能とする. c が最大点 (resp. 最小点) となるならば,

$$f'_{-}(c) \ge 0 \ge f'_{+}(c)$$
 (resp. $f'_{-}(c) \le 0 \le f'_{+}(c)$)

(ii). 有界閉区間 [a,b] で定義された関数 f(x) が,[a,b] で連続で (a,b) で左側微分と右側微分ともに可能であり,f(a)=f(b)=0 とする.このとき,ある $c\in(a,b)$ が存在して,

$$f'_{-}(c)f'_{+}(c) \le 0$$

証明 (i) の証明: 最大点のみ証明する. 任意の x_1, x_2 について, $x_1 < c < x_2$ ならば,

$$\frac{f(x_1) - f(c)}{x_1 - c} \ge 0 \ge \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c}$$

 $x_1 \rightarrow c - 0$ と $x_2 \rightarrow c + 0$ とると、命題の式が得られる.

(ii) の証明: 最大・最小の定理 (定理 3.1) から,f は [0,1] で最大点と最小点を必ず持つ。f(x)=0 の場合は明らかに命題がなりたつので,それ以外の関数を考える。それは (0,1) で最大点を持つ場合か,(0,1) で最小点を持つ場合かのどちらかである。どちらの場合も,(i) より命題が成り立つ。

次に微分可能性の拡張を考えよう。 開区間で $f'(x) \ge 0$ ならば f(x) が単調増加であることは、平均値の定理を用いて証明した。この拡張として以下が成り立つ。 無論証明では、平均値の定理は用いることはできない。

命題 31.3 開区間 \check{I} で定義された関数 f(x) が、 \check{I} で左側微分と右側微分ともに可能とする.

- (i). 任意の $x \in \check{I}$ で, $f'_{-}(x)$, $f'_{+}(x)$ がともに \check{I} で 0 以上 (resp. 0 以下) であることは,f(x) が \check{I} で単調増加 (resp. 単調減少) であることと同値である.
- (ii). 任意の $x \in \check{I}$ で、 $f'_{-}(x), f_{+}(x)$ がともに \check{I} で正 (resp. 負) のとき、f(x) は \check{I} で狭義単調増加 (resp. 狭義単調減少) である.

証明 (i) の単調増加のみ証明する.

 \Longleftrightarrow の証明: f(x) が単調増加とし、任意の $c \in I$ をとる。仮定より c 以外の任意の $x \in I$ について、 $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$. この式の $x \to c-0, x \to c+0$ をそれぞれ計算して、 $f'_-(c) \geq 0, f'_+(c) \geq 0$.

(i) の ⇒ の証明: 対偶を証明する.

f(x) が単調増加ではないとする.このときある $x_1 < x_2$ があって, $f(x_1) > f(x_2)$.そこで [0,1] を定義域とする λ の関数,

$$H(\lambda) = f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) - [(1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)]$$

を考える. f の仮定より $H(\lambda)$ は左側微分も右側微分も可能である. 計算すると,

$$H'_{+}(\lambda) = f'_{+}((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)(x_2 - x_1) - [f(x_2) - f(x_1)]$$

$$H'_{-}(\lambda) = f'_{-}((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)(x_2 - x_1) - [f(x_2) - f(x_1)]$$

 $H(\lambda)$ は前補題の (ii) の条件を満たしているので、ある $\lambda \in (0,1)$ が存在して、 $H'_+(\lambda)$ か $H'_-(\lambda)$ の少なくとも一方が 0 以下にならなければならない。また、仮定より $(x_2-x_1)>0$ 、 $-[f(x_2)-f(x_1)]>0$ である。従ってある $\hat{\lambda} \in (0,1)$ が存在して、

$$f'_{+}((1-\hat{\lambda})x_1+\hat{\lambda}x_2)<0$$
 または $f'_{-}((1-\hat{\lambda})x_1+\hat{\lambda}x_2)<0$

が成り立つ. $(1-\hat{\lambda})x_1+\hat{\lambda}x_2\in \check{I}$ なので、「任意の $x\in \check{I}$ で $f'_-(x),f'_+(x)$ がともに 0 以上である」ことは成り立たない。

対偶が証明されたので、命題も証明された.

31.2 区間で定義された凹関数・凸関数の特徴づけ

微分可能性とは関係なく, まず以下が成り立つ.

定理 31.4 区間 I で定義された関数 f(x) について,

(i). f(x) が I で凹関数 (resp. 凸関数) であることは、任意の $x_1 < c < x_2$ について、

$$\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} \ge \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c} \quad \left(\text{resp. } \frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c}\right)$$

が成り立つことと同値である.つまり,任意の $c \in I$ を取ったときに, $x \in I \setminus \{c\}$ で定義された x の 関数

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \tag{31.1}$$

が単調減少 (resp. 単調増加) であることと同値である.

_

(ii). f(x) が狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) であることは、任意の $x_1 < c < x_2$ について、

$$\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} > \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c} \quad \left(\text{resp. } \frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} < \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c}\right)$$

が成り立つことと同値である. つまり、任意の $c \in I$ を取ったときに、 $x \in I \setminus \{c\}$ で定義された (31.1) 式の x の関数が、狭義単調減少 (resp. 狭義単調増加) であることと同値である.

証明 (ii)の狭義凹関数のみ証明する.

f(x) が狭義凹である定義は、

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, x_1 < x_2, \forall \lambda \in (0,1), f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) > (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

である. $c = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ として, λ を c で表すと, 上の式の両辺を $x_2 - x_1$ 倍することによって

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, x_1 < x_2, \forall \lambda \in (0,1), \forall c \in (a,b), f(c)(x_2 - x_1) > (x_2 - c)f(x_1) + (c - x_1)f(x_2)$$

と同値である. この不等式を変形して, 命題が成り立つ.

さらにこの定理の $\frac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1}$ と $\frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c}$ の間には, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ が入っても成り立つ.

系 31.5 区間 I で定義された関数 f(x) について,

(i). f(x) が I で凹関数 (resp. 凸関数) であることは、任意の $x_1 < c < x_2$ について、

$$\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} \ge \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ge \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c}$$

$$\left(\text{resp. } \frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c}\right)$$

が成り立つことと同値である.

(ii). f(x) が狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) であることは、任意の $x_1 < c < x_2$ について、

$$\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c}$$

$$\left(\text{resp. } \frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c}\right)$$

が成り立つことと同値である.

証明は簡単なので省略し、(ii) の狭義凹関数について図 31.1 で示すことにする。 この図は f(x) は狭義凹関数であることと、y=f(x) のグラフを書いたときに、

「線分 AC の傾き」 > 「線分 AB の傾き」 > 「線分 CB の傾き」

が成り立つことを (ii) では示している。AC の傾きと CB の傾きに注目すると,標語的に「線分の傾きは狭義 単調減少」とイメージできる。実際に,図 31.1 で点 C と点 B の間に,y=f(x) 上に点 D を取ると,

١

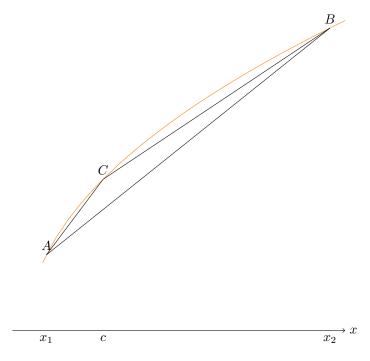


図 31.1 f(x) が狭義凹関数のときの y = f(x) のグラフのイメージ図

「線分 AC の傾き」>「線分 DB の傾き」

がイメージできるであろう. その結果, 以下の系も言える.

系 31.6 区間 I で定義された関数 f(x) について,

(i). f(x) が I で凹関数 (resp. 凸関数) であることは, 任意の 4 点 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$ (ただし $x_1 < x_2 \le x_3 < x_4$) をとったとき,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ge \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} \quad \left(\text{resp. } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}\right)$$

が成り立つことと同値である.

(ii). f(x) が I で狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) であることは、 任意の 4 点 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I($ ただし $x_1 < x_2 \le x_3 < x_4)$ をとったとき、

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} \quad \left(\text{resp. } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}\right)$$

が成り立つことと同値である.

(i) では、平均変化率が単調減少 (resp. 単調増加) であることが、凹関数 (resp. 凸関数) と同値であることを、表している.

つまり定理 31.4 で極限を考えることにより、以下が簡単に言える. なおこの節の残りの部分では、左側導関数や右側導関数がよく出てくる.

定理 31.7 開区間 \check{I} で定義された関数 f(x) について,

- (i). 以下の(a)(b)(c)は同値である.
 - (a) \check{I} で凹関数 (resp. 凸関数) である.
 - (b) 以下の 2 つが全て成り立つ. その 2 つから $f'_{-}(x)$, $f'_{+}(x)$ がともに単調減少 (resp. 単調増加) であることも言える.
 - (b-1) \check{I} で左側微分と右側微分ともに可能で, 任意の x で, $f'_-(x) \geq f'_+(x)$ (resp. $f'_-(x) \leq f'_+(x)$)
 - (c) 以下の3つがともに成り立つ
 - (c-1) (b-1) が成り立つ.
 - (c-2) $x_1 > x_0$ ならば, $f'_+(x_0)(x_1-x_0) \ge f(x_1)-f(x_0)$ (resp. $f'_+(x_0)(x_1-x_0) \le f(x_1)-f(x_0)$)
 - (c-3) $x_1 < x_0$ ならば, $f'_-(x_0)(x_1 x_0) \ge f(x_1) f(x_0)$ (resp. $f'_-(x_0)(x_1 x_0) \le f(x_1) f(x_0)$)
- (ii). 以下の (a)(b)(c) は同値である.
 - (a) Ĭで狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) である.
 - (b) 以下の 2 つが全て成り立つ. その 2 つから $f'_{-}(x)$, $f'_{+}(x)$ がともに狭義単調減少 (resp. 狭義単調増加) であることも言える.
 - (b-1) \check{I} で左側微分と右側微分ともに可能で, 任意の x で, $f'_-(x) \geq f'_+(x)$ (resp. $f'_-(x) \leq f'_+(x)$)
 - (b-2) $x_1 < x_2$ ならば、 $f'_+(x_1) > f'_-(x_2)$ (resp. $f'_+(x_1) < f'_-(x_2)$)
 - (c) 以下の3つがともに成り立つ
 - (c-1) (b-1) が成り立つ.
 - (c-2) $x_1 > x_0$ ならば, $f'_+(x_0)(x_1-x_0) > f(x_1)-f(x_0)$ (resp. $f'_+(x_0)(x_1-x_0) < f(x_1)-f(x_0)$)
 - (c-3) $x_1 < x_0$ ならば, $f'_-(x_0)(x_1 x_0) > f(x_1) f(x_0)$ (resp. $f'_+(x_0)(x_1 x_0) < f(x_1) f(x_0)$)

証明 (ii) の狭義凹関数のみ証明する.

[1](a)⇒(b) の証明:

前命題 (ii) より任意の c について、 $x_1 < c < x_2$ ならば、

$$\frac{f(x_1) - f(c)}{x_1 - c} > \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c}$$

定理 $\frac{31.4}{6}$ より、左辺は x_1 について単調減少かつ、下に有界なので $x_1 \to c - 0$ についての極限値を持つ. 計算して、

$$f'_{-}(c) \ge \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c}$$

この不等式の右辺では, x_2 を減少させると右辺が増加する.上に有界なので, $x_2 \to c+0$ の極限値を持つ. よって

$$f'_{-}(c) \geq f'_{+}(c)$$

これで (b-1) が言える.

ある c_3, c_4 (ただし $c_1 < c_3 < c_4 < c_2$) を取る。系 31.6 より,任意の $x_1 \in (c_1, c_3)$ と任意の $x_2 \in (c_4, c_2)$ に

ついて

$$\frac{f(x_1) - f(c_1)}{x_1 - c_1} > \frac{f(c_4) - f(c_3)}{c_4 - c_3} > \frac{f(c_2) - f(x_2)}{c_2 - x_2}$$
(31.2)

が言える. 定理 31.4 より最左辺は x_1 について,最右辺も x_2 について,それぞれ狭義単調減少である.それぞれ $x_1 \to c_1 + 0$ と $x_2 \to c_2 - 0$ の極限をとっても不等号は変わらない.よって,

$$f'_{+}(c_1) > \frac{f(c_4) - f(c_3)}{c_4 - c_3} > f'_{-}(c_2)$$

なので (b-2) が言える.

 $[2](b) \Longrightarrow (c)$ の証明:

(c-3) は (c-2) と同様にできるので, (c-2) のみ示す.

(b-1) と命題 31.1 から、f(x) は \check{I} で連続関数. 次に任意の x_0 をとって固定する. $x \geq x_0$ についての関数

$$g(x) = (f(x) - f(x_0)) - f'_{+}(x_0)(x - x_0)$$

も x の連続関数であり、 $g'_+(x) = f'_+(x) - f'_+(x_0)$ である。 $g'_+(x_0) = 0$ であり、(b-2) より $x > x_0$ で

$$0 = g'_{+}(x_0) > g'_{-}(x) \ge g'_{+}(x)$$

が成り立つ. 命題 31.3 より g(x) は $x>x_0$ で狭義単調減少なので、 $x>x_0$ で、 $g(x)=(f(x)-f(x_0))-f'_+(x_0)(x-x_0)< g(x_0)=0$. x に x_1 を代入して変形すれば、(c-2) が言える.

 $[3](c) \Longrightarrow (a)$ の証明:

任意の異なる 2 点 a,b をとり, $\lambda \in (0,1)$ で $c=(1-\lambda)a+\lambda b$ とする.a < c < b なので,(c-2) と (c-3) よりそれぞれ,

$$f'_{+}(c)(b-c) > f(b) - f(c)$$
 (31.3)

$$f'_{-}(c)(a-c) > f(a) - f(c)$$
 (31.4)

が言える. (c-2) と b-c>0 より (31.3) 式から,

$$f'_{-}(c)(b-c) > f(b) - f(c)$$
 (31.5)

が成り立つ. cの定義から, (31.4) 式と (31.5) 式の左辺を直して,

$$-\lambda f'_{-}(c)(b-a) > f(a) - f(c)$$
$$(1 - \lambda)f'_{-}(c)(b-a) > f(b) - f(c)$$

それぞれ $(1 - \lambda)$ 倍と λ 倍して、両辺それぞれ加えて、

$$0 > (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b) - f(c)$$

c を戻して左辺に移項すれば、任意の a,b と任意の $\lambda \in (0,1)$ について、

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) > (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

が成り立つので、f は狭義凹関数である.

この定理と命題 31.1 からすぐに,

- 系 31.8 開区間 \check{I} で定義された関数 f(x) が, \check{I} で凹関数 (resp. 凸関数) のとき,f(x) は \check{I} で連続である.」が言える.このように開区間では,関数の凹性や凸性が連続性の十分条件となるのである. そしてこの定理と,最大最小に関する前節の補題 31.2 を合わせると,以下が言える.
- 系 31.9 開区間 \check{I} で定義された関数 f(x) について,
- (i). \check{I} で凹関数 (resp. 凸関数) ならば, f(x) は以下の少なくとも 1 つを満たす.
 - (a) $f'_{-}(x), f'_{+}(x)$ ともに 0 以上. よって \check{I} で f(x) は単調増加となる.
 - (b) $f'_{-}(x), f'_{+}(x)$ ともに 0 以下. よって \check{I} で f(x) は単調減少となる.
 - (c) ある点cが存在して、以下の全てを満たす。
 - (1) $f'_{-}(c) \ge 0 \ge f'_{+}(c)$ (resp. $f'_{-}(c) \le 0 \le f'_{+}(c)$)
 - (2) x < c のとき、 $f'_{-}(x), f'_{+}(x)$ とも 0 以上 (resp. 0 以下).
 - (3) x > c のとき、 $f'_{-}(x), f'_{+}(x)$ とも 0 以下 (resp. 0 以上).

よって, c で最大値 (resp. 最小値) をとって, x < c ならば f(x) は単調増加 (resp. 単調減少) で, x > c ならば f(x) は単調減少 (resp. 単調増加) となる.

- (ii). \check{I} で狭義凹関数 (resp. 狭義凸関数) ならば、f(x) は以下の (a)(b)(c) のどれか 1 つのみを満たす.
 - (a) $f'_{-}(x), f'_{+}(x)$ ともに正. よって \check{I} で f(x) は狭義単調増加となる.
 - (b) $f'_{-}(x), f'_{+}(x)$ ともに負. よって \check{I} で f(x) は狭義単調減少となる.
 - (c) ある点cが1点のみ存在して、以下の全てを満たす。
 - (1) $f'_{-}(c) \ge 0 \ge f'_{+}(c)$ (resp. $f'_{-}(c) \le 0 \le f'_{+}(c)$)
 - (2) x < c のとき、 $f'_{-}(x), f'_{+}(x)$ とも正 (resp. 負).
 - (3) x > c のとき、 $f'_{-}(x), f'_{+}(x)$ とも負 (resp. 正).

よって、1 点 c でのみ最大値 (resp. 最小値) をとって、x < c ならば f(x) は狭義単調増加 (resp. 狭義単調減少) で、x > c ならば f(x) は狭義単調減少 (resp. 狭義単調増加) となる.

注意: (i) では (a) かつ (b) が成り立つことがある。実際関数 f(x)=1 を考えると、これは凹関数でもあり凸関数でもある。そして、(i) の (a)(b)(c) 全てを満たす。一方 (ii) については、(a)(b)(c) それぞれ背反なので、成り立つならばどれか 1 つである。 (注意終)

証明

簡単なので、(ii) の狭義凹関数のみ概略を説明する。狭義凹関数なので最大値を持つならば唯一である。その場合、前定理と補題 31.2 から、(c) が言える。最大値を持たない場合は、 $f_+(x)$ が常に正の場合か、 $f_+(x)$ が常に負のどちらかが成り立つ。前者ならば (a) が成り立ち、後者なら (b) が成り立つ。

さらに定義域が有界開区間ならば、関数の有界性について、以下が成り立つ.

命題 31.10 有界開区間 (a,b) で定義された関数 f(x) が,(a,b) で凹関数 (resp. 凸関数) のとき,f(x) は上に (resp. 下に) 有界である.

証明 凹関数のときのみ証明する.

 $c=rac{a+b}{2}$ とする.定理 31.4 より,x の関数 (ただし $x \neq c)$, $rac{f(x)-f(c)}{x-c}$ は x について単調減少なので,定理 31.7 より任意の x>c について,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le f'_{+}(c)$$

x-c>0 \sharp \mathfrak{H} ,

$$f(x) \le f'_{+}(c) \cdot (x - c) + f(c)$$

$$\le |f'_{+}(c)| \cdot |x - c| + |f(c)|$$

$$\le |f'_{+}(c)| \frac{a + b}{2} + |f(c)|$$

なので、f(x) は (c,b) で上に有界である.

同様に定理 31.4 より、任意の x < c について、

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge f'_{-}(c)$$

が成り立つので、x-c<0 に注意して上と同様に変形することにより、任意の $x\in(a,c)$ について、

$$f(x) \le |f'_{-}(c)| \frac{a+b}{2} + |f(c)|$$

が成り立つので、(a,c)で上に有界である.

x = c の場合も含めて、以上より f(x) は (a,b) で上に有界である.

有界閉区間での凹凸性は、端点の極限値と関係する。直感的に有界閉区間 [a,b] で連続で、開区間 (a,b) で凹関数ならば、[a,b] で凹関数と言えそうである。実際以下のように、それを含む命題が成り立つ。

定理 31.11 有界閉区間 [a,b] で定義された関数 f(x) について,

- (i). [a,b] で凹関数 (resp. 凸関数) であることは、以下がともに成り立つことと同値である。
 - (A). (a,b) で凹関数 (resp. 凸関数) である.
 - (B). 2つの極限値 $\lim_{x\to a+0} f(x)$, $\lim_{x\to b-0} f(x)$ を持ち,

$$f(a) \le \lim_{x \to a+0} f(x), \quad f(b) \le \lim_{x \to b-0} f(x)$$
 (resp. $f(a) \ge \lim_{x \to a+0} f(x), \quad f(b) \ge \lim_{x \to b-0} f(x)$)

(ii). (i) において凹・凸をそれぞれ、狭義凹・狭義凸と読み替えても、命題は成り立つ.

証明 (ii) の狭義凹関数のみ証明する.

 \Longrightarrow の証明: [a,b] で狭義凹ならば、(a,b) で狭義凹である。すなわち (A) が成り立つ。次に系 31.9 より f(x) は、

- (1) ある点 $c \in (a,b)$ があって, (c,b) で狭義単調減少.
- (2) (a, b) で狭義単調増加.

のどちらかである. (1) の場合は $x \to b-0$ で f(x) は収束するか, $-\infty$ に発散するかである. (2) の場合は,前命題より f(x) は (a,b) で上に有界なことと合わせて, $x \to b-0$ で f(x) は収束する.

そこで, $x \to b-0$ で f(x) が $-\infty$ に発散するか,f(b) 未満に収束すると仮定する.このとき, $\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \infty$ となるのだが,これは定理 $\frac{31.4}{x-b}$ から, $\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ が x について狭義単調減少であることに矛盾する.従って $x\to b-0$ のとき,f(x) は f(b) 以上の値に収束する.

a についても同様の計算で、 $x \to a+0$ のとき f(x) は f(a) 以上の値に収束することが言える.

以上より (B) が成り立つ.

 \leftarrow の証明: 任意の $c_1 < c_2$ (ただし $a < c_1 < c_2 < b$) をとる. (A) と定理 31.4 より、任意の $x \in (c_2,b)$ について

$$\frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} > \frac{f(x) - f(c_2)}{x - c_2}$$

かつ、右辺はxについて狭義単調減少である。よって、 $x \to b-0$ の極限を取っても不等号は変わらないので、

$$\frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} > \frac{\lim_{x \to b-0} f(x) - f(c_2)}{b - c_2}$$

$$((B) \& \emptyset) \ge \frac{f(b) - f(c_2)}{b - c_2}$$

同様にして、任意の $c_1 < c_2$ について、

$$\frac{f(c_1) - f(a)}{c_1 - a} > \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1}$$

が言える. 以上より [a,b] での任意の x_1, x_2, x_3 (ただし $x_1 < x_2 < x_3$) について,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

が言えるので、定理 31.4 より f(x) は [a,b] で狭義凹関数である.

32 級数 $\sum a_n \cdot x$ の整関数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ や e^x や $\sin x, \cos x$ の定義

32.1 数列の上極限と下極限 その2

 \limsup や \liminf や \liminf の下にある $n \to \infty$ は煩雑なので、この節では省略する。 1/n 以外の数列では、以下の n 乗根の極限値はよく使われる.

例題 32.1 *a* は任意の正数とする.

- (i). $\lim a^{1/n} = 1$
- (ii). $\lim n^{1/n} = 1$

証明 (i) の証明:

a=1 のときは明らか. a>1 とする. $a^{1/n}>1$ なので、数列 $b_n>0$ を作って、 $a^{1/n}=1+b_n$ とする. $n\geq 2$ として、

$$a = (1+b_n)^n$$
 (二項定理より) $> 1+nb_n$

移項して,

$$b_n < \frac{a-1}{n}$$

$$\to 0 \quad (n \to \infty)$$

 $\lim b_n = 0$ なので、 $\lim a^{1/n} = 1$.

a<1 のときは、1/a>1 となるので、 $a^{1/n}=1/(1/a)^{1/n}\to 1/1$ $(n\to\infty)$ より成り立つ.

(ii) の証明:

 $n\geq 2$ のとき $n^{1/n}>1$ なので、数列 $b_n>0$ を作って、 $n^{1/n}=1+b_n$ とする. $n\geq 3$ として、

$$n=(1+b_n)^n$$
 $(二項定理より) > 1+rac{n(n-1)}{2}b_n$

移項して,

$$b_n < \frac{2}{n} \\ \to 0 \quad (n \to \infty)$$

 $\lim b_n = 0$ なので、 $\lim n^{1/n} = 1$.

補題 32.2 2 つの数列 a_n, b_n と実数 c を考える. 任意の n について, $\overline{m{R}}$ の計算において以下が成り立つ.

(i).

$$\sup_{k \ge n} (c + a_k) = c + \sup_{k \ge n} a_k$$
$$\inf_{k \ge n} (c + a_k) = c + \inf_{k \ge n} a_k$$

(ii). $a_n \ge 0, b_n \ge 0, c > 0$ のとき,

$$\sup_{k \ge n} (ca_k) = c \sup_{k \ge n} a_k$$
$$\inf_{k > n} (ca_k) = c \inf_{k > n} a_k$$

(iv). $a_k \ge 0, b_k \ge 0$ のとき,

$$\inf_{k \ge n} a_k \cdot \inf_{k \ge n} b_k \le \inf_{k \ge n} (a_k b_k) \le \begin{cases} \inf_{k \ge n} a_k \cdot \sup_{k \ge n} b_k \\ \sup_{k \ge n} a_k \cdot \inf_{k \ge n} b_k \end{cases} \le \sup_{k \ge n} (a_k b_k) \le \sup_{k \ge n} a_k \cdot \sup_{k \ge n} b_k$$

証明 (i)(ii) は明らか.

(iii) の証明: 同様にできるので、 $\inf_{k\geq n}a_k+\sup_{k\geq n}b_k\leq \sup_{k\geq n}(a_k+b_k)\leq \sup_{k\geq n}a_k+\sup_{k\geq n}b_k$ のみ証明する. 任意の $m \ge n$ について,

$$\inf_{k \ge n} a_k + b_m \le a_m + b_m \le \sup_{k \ge n} a_k + \sup_{k \ge n} b_k \tag{32.1}$$

は明らか、この右側の不等式から、 $\sup_{k\geq n}(a_k+b_k)\leq \sup_{k\geq n}a_k+\sup_{k\geq n}b_k$ が言える.

 $\inf_{k\geq n}a_k$ が実数の場合は、(i) より $\sup_{k\geq n}(\inf_{k\geq n}a_k+b_k)=\inf_{k\geq n}a_k+\sup_{k\geq n}b_k$ なので、(32.1) 式の左側の不等式 について、両辺の $m \ge n$ に関する上限を取ると、

$$\inf_{k \ge n} a_k + \sup_{k \ge n} b_k \le \sup_{k \ge n} (a_k + b_k) \tag{32.2}$$

が言える。また $\inf_{k\geq n}a_k=-\infty$ のときは, $\inf_{k\geq n}a_k+\sup_{k\geq n}b_k$ での \overline{R} の計算可能性より $\sup_{k\geq n}b_k<\infty$ が仮定されているので, $\inf_{k\geq n}a_k+\sup_{k\geq n}b_k=-\infty$ となる。よってこの場合も,(32.2) 式が成り立つ。

(iv) の証明: 同様にできるので、 $\inf_{k\geq n}a_k\sup_{k\geq n}b_k\leq \sup_{k\geq n}a_kb_k\leq \sup_{k\geq n}a_k\sup_{k\geq n}b_k$ のみ証明する.

任意の $m \ge n$ について,

$$(\inf_{k \ge n} a_k) b_m \le a_m b_m \le \sup_{k \ge n} a_k \sup_{k \ge n} b_k \tag{32.3}$$

は明らか、右側の不等式から、 $\sup(a_k b_k) \leq \sup a_k \sup b_k$ が言える. $k \ge n$ $k \ge n$ $k \ge n$

 $\inf_{k\geq n}a_k>0$ のときは、(ii) より、 $\sup_{k\geq n}(\inf_{k\geq n}a_kb_k)=\inf_{k\geq n}a_k\sup_{k\geq n}b_k$ なので、(32.3) 式の左側の不等式の両辺の $m \ge n$ に関する上限を取ると,

$$\inf_{k \ge n} a_k \cdot \sup_{k \ge n} b_k \le \sup_{k \ge n} (a_k b_k) \tag{32.4}$$

 $\inf_{k\geq n}a_k=0$ のときは、 $\inf_{k\geq n}a_k\cdot\sup_{k\geq n}b_k$ での \overline{R} の計算可能性より $\sup_{k\geq n}b_k<\infty$ が仮定されているので、 $\inf_{k\geq n}a_k\cdot\sup_{k\geq n}b_k=0$ となる.よってこの場合も、(32.4) 式が成り立つ.

(iii)(iv) で $n \to \infty$ を取ると、重要な以下の定理が言える.

定理 32.3 2 つの数列 a_n, b_n について、 \overline{R} の計算において以下が成り立つ.

(i).
$$\liminf a_n + \liminf b_n \le \liminf (a_n + b_n) \qquad \le \begin{cases} \liminf a_n + \limsup b_n \\ \limsup a_n + \limsup b_n \end{cases}$$
$$\le \lim \sup (a_n + b_n) \le \lim \sup b_n$$

(ii). $a_n \ge 0, b_n \ge 0$ のとき,

$$\lim\inf a_n \cdot \lim\inf b_n \leq \liminf(a_n b_n) \leq \begin{cases} \lim\inf a_n \lim\sup b_n \\ \lim\sup a_n \lim\inf b_n \end{cases}$$
$$\leq \lim\sup(a_n b_n) \leq \lim\sup b_n$$

証明 上極限・下極限の定義と、定理 28.23 と命題 28.25 から言える.

この定理で $\limsup a_n = \liminf a_n = \alpha$ を考えると、以下が言える.

定理 32.4 数列 a_n, b_n について, a_n が実数 α に収束するならば,

(i).

$$\lim \sup(a_n + b_n) = \alpha + \lim \sup b_n$$
$$\lim \inf(a_n + b_n) = \alpha + \lim \inf b_n$$

(ii). $\alpha > 0$ のとき

$$\lim \sup(a_n b_n) = \alpha \lim \sup b_n$$
$$\lim \inf(a_n b_n) = \alpha \lim \inf b_n$$

次の例題は ϵ 論法の練習でよく出てくるが、上極限を使うと簡単に証明することができる.

例題 32.5 数列 a_n と実数 α について,

$$\lim a_n = \alpha \Longrightarrow \lim \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \alpha$$

┙

証明 :定理 $\frac{29.7}{6}$ より $\limsup |a_n - \alpha| = 0$ である. ある整数 n_0 をとって, $n > n_0$ のとき,

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \alpha \right| \leq \frac{|a_1 - \alpha| + |a_2 - \alpha| + \dots + |a_{n_0} - \alpha| + \dots + |a_n - \alpha|}{n} \\
\leq \frac{|a_1 - \alpha| + |a_2 - \alpha| + \dots + |a_{n_0} - \alpha|}{n} + \frac{n - n_0}{n} \sup_{k > n_0} |a_k - \alpha|$$
(32.5)

 $n \to \infty$ のとき,右辺第 1 項は 0 に収束し,右辺第 2 項は $\sup_{k>n_0} |a_k-\alpha|$ に収束する.よって両辺の上極限を取ると,

$$\limsup \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \alpha \right| \le 0 + \sup_{k > n_0} |a_k - \alpha|$$

$$(\limsup |a_n - \alpha| = 0 \ \sharp \ 0) \to 0 + 0 \quad (n_0 \to \infty)$$

よって $\limsup \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \alpha \right| = 0$ なので,定理 $\frac{29.7}{n}$ より命題が成り立つ.

この証明から、定理 29.7 が基本的である理由の一端がわかっただろう.このように絶対値の上極限を上から 0 で押さえることによって、収束が言えるのである.

またこの例題では $\alpha=\pm\infty$ の場合も成り立つのだが、それを上の例題を拡張した形で示す.

命題 32.6 数列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ について,

$$\begin{cases} a_1 = A_1 \\ a_n = A_n - A_{n-1} & (n = 2, 3, \dots) \end{cases}, \begin{cases} b_1 = B_1 \\ b_n = B_n - B_{n-1} & (n = 2, 3, \dots) \end{cases}$$

 $b_n>0$ かつ $\lim_{n\to\infty}B_n=\infty$ とする. このとき,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\alpha\in\overline{\pmb{R}}\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=\alpha$$

証明 仮定より、ある n_1 が存在して、任意の $n > n_1$ で $B_n > 0$.

 $\alpha \in [-\infty,\infty)$ のときは,任意の $p>\alpha$ について,ある n_2 が存在して,任意の $n>n_2$ について $\frac{a_n}{b_n} < p$ である.

よって、任意の $p>\alpha$ について、ある $n_0=\max(n_1,n_2)$ が存在して、 $n>n_0$ のとき、

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{B_n}
< \frac{(a_1 + \dots + a_{n_0}) + p(b_{n_0+1} + \dots + b_n)}{B_n}
< \frac{a_1 + \dots + a_{n_0}}{B_n} + p\left(1 - \frac{b_1 + \dots + b_{n_0}}{B_n}\right)$$

右辺は $n \to \infty$ のとき p に収束するので、両辺の上極限を取ると、

$$\limsup \frac{A_n}{B_n} \le p$$

同様に, $\alpha \in (\infty, \infty]$ のとき, 任意の $q < \alpha$ について

$$\lim\inf\frac{A_n}{B_n} \ge q$$

この 2 式より, $\liminf \frac{A_n}{B_n} = \limsup \frac{A_n}{B_n} = \alpha$ が言えるので, 命題が成り立つ.

この命題で, $A_n = \sum_{k=1}^n a_k, B_n = n$ としたときが,例題 32.5 の場合である.また証明で, ϵ 論法ではなく,任意の $p > \alpha$ と任意の $q < \alpha$ を使った理由は, α が $\pm \infty$ のときには, $\alpha - \epsilon = \alpha + \epsilon = \alpha$ となってしまうためである.

命題 32.7 数列 $a_n > 0$ について,以下が成り立つ.

$$\frac{1}{\limsup a_n} = \liminf \frac{1}{a_n} \le \limsup \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\liminf a_n}$$

証明 命題の不等式部分が成り立つのは明らかなので、左と右の等式について証明する.

定理 32.3(ii) の左から 2 番目と 3 番目の不等式に $b_n = 1/a_n$ を代入すると,

$$1 \le \limsup a_n \liminf \frac{1}{a_n} \le 1 \tag{32.6}$$

$$1 \le \liminf a_n \limsup \frac{1}{a_n} \le 1 \tag{32.7}$$

の 2 式が成り立つ. (32.6) 式より, \overline{R} の計算で積 $\limsup a_n \liminf \frac{1}{a_n}$ が計算可能な場合は,命題の左側の等式が成り立つ.積 $\limsup a_n \liminf \frac{1}{a_n}$ が計算不可能な場合とは,

- (i). $\limsup a_n = 0$, $\liminf \frac{1}{a_n} = \infty$
- (ii). $\limsup a_n = \infty$, $\liminf \frac{1}{a_n} = 0$

のどちらかのみであるが、このどちらの場合も命題の左側の等式が成り立つ.

同様にして(32.6)式より、命題の右側の等式が成り立つ。

この節の例題 32.1 と同様によく用いられるのは、以下である.

例題 32.8 (i). $\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} = \infty$

(ii). 任意の正の定数
$$M$$
 に対して, $\lim_{n\to\infty} \frac{M^n}{n!} = 0$

これは,以下の定理を証明した後に示す.

定理 32.9 $n \ge 1$ の数列 $a_n > 0$ について,以下が成り立つ.

(i).
$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- (ii). $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ ならば、 $\lim a_n = 0$
- (iii). $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ならば、 $\lim a_n = 0$ (iv). $\liminf \sqrt[n]{a_n} > 1$ ならば、 $\lim a_n = \infty$
- (v). $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ならば、 $\lim a_n = \infty$

証明 (iii) は (i)(ii) から, (v) は (i)(iv) から言えるので, (i)(ii)(iv) を証明すればよい.

(i) の証明:

 $\lim \inf_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} \text{ は明らか. そこで } \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ のみ証明する}^{32.1}.$ $\lim \sup_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty \text{ のときは不等式は明らかに成り立つので, } \limsup_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \geq 0 \text{ として証明すれば十}$

 $n o \infty$ 分である.

上極限の ϵ 論法より、任意の $\epsilon > 0$ について、ある正整数 n_0 が存在して、 $n > n_0$ ならば、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r + \epsilon$$

これより,

$$a_n < (r + \epsilon)a_{n-1}$$

$$< (r + \epsilon)^2 a_{n-2}$$

$$\cdots$$

$$< (r + \epsilon)^{n-n_0} a_{n_0}$$

両辺 1/n 乗すると,

$$\sqrt[n]{a_n} < (r + \epsilon)^{1 - n_0/n} \sqrt[n]{a_{n_0}} \tag{32.8}$$

両辺の上極限を取ると,

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} \le r + \epsilon$$

$$= \limsup_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} + \epsilon$$

 ϵ は任意なので、

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

(ii) の証明: 上極限の ϵ 論法より,任意の正数 ϵ (ただし $\epsilon < 1 - r$) について,ある正整数 n_0 が存在して, $n > n_0$ ならば,

$$\sqrt[n]{a_n} < r + \epsilon$$

両辺n乗して,

$$a_n < (r + \epsilon)^n$$

 $\to 0 \quad (n \to \infty)$

 $[\]frac{1}{32.1} \liminf_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} \le \liminf_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ の証明は同様にできる.

よって $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ.

(iv) の証明: $1 < R < \liminf \sqrt[n]{a_n}$ を満たす R が存在する. この R に対して,下極限の ϵ 論法より,ある 正整数 n_0 が存在して, $n > n_0$ ならば,

$$\sqrt[n]{a_n} > R$$

両辺n乗して,

$$a_n > R^n$$

 $\to \infty \quad (n \to \infty)$

これは a_n が ∞ に発散することを意味する.

例題 32.8 の証明 :

(i) の証明 $a_n = n!$ とする.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = n$$

$$\rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

より、 $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ 従って、前定理 (i) より $\lim \sqrt[n]{a_n} = \infty$

(ii) の証明 $a_n = \frac{M^n}{n!}$ とする.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{M^n}$$
$$= \frac{M}{n+1}$$
$$\to 0 \quad (n \to \infty)$$

従って、前定理 (iii) より $\lim a_n = 0$

定理 $\frac{32.9}{00}$ の数列については, r^n との比較となっている.すでに証明してあるように,r>1 のときは発散 し $0 \le r < 1$ のときは 0 に収束する.この性質を用いて比較している.

32.2 実数列の収束と, コーシー列

数列や関数では、コーシー列の考え方が重要である。数列の収束の定義では、実数値 α がわかっているということで定義した。しかし、収束値がわかっていなくとも、収束するか否かを知ることができれば便利である。それを実現できるのが、コーシー列の概念である。

定義 32.10 実数列 a_n を考える. 任意の $\epsilon>0$ について、ある $n_0\in \mathbf{N}$ が存在して、任意の $m,n>n_0$ について、 $|a_n-a_m|<\epsilon$ が成り立つとき、つまり論理式で書くと

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N} : n \ge n_0, m \ge n_0 \Longrightarrow |a_n - a_m| < \epsilon$$
 (32.9)

このとき, a_n はコーシー列であるという.

_

上の (32.9) 式は,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N} : n > m \ge n_0 \Longrightarrow |a_n - a_m| < \epsilon$$
 (32.10)

と同値であるので、この式も a_n がコーシー列であることの同値性として用いられる.

定理 32.11 実数列 a_n について以下は同値である.

- (i). a_n はある実数に収束する.
- (ii). a_n はコーシー列である.

証明 (i) ならば(ii) の証明

 a_n がある実数 α に収束すると仮定する. 任意の $\epsilon > 0$ について, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$n \ge n_0 \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon/2$$

このとき、任意の 2 つの整数 $p,q \ge n_0$ について

$$|a_p - a_q| = |(a_p - \alpha) - (a_q - \alpha)|$$

$$\leq |a_p - \alpha| + |a_q - \alpha)|$$

$$< \epsilon/2 + \epsilon/2$$

$$= \epsilon$$

が成り立つので、 a_n はコーシー列である.

(ii) ならば (i) の証明. a_n はコーシー列なので、任意の $\epsilon > 0$ について、ある $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して、

$$n > m \ge n_0 \Longrightarrow |a_n - a_m| < \epsilon$$

 $m=n_0$ とすると, $n>n_0$ のとき,

$$a_{n_0} - \epsilon < a_n < a_{n_0} + \epsilon$$

が成り立つ. この式で $n \to \infty$ の上極限と下極限をそれぞれとると. 以下の 2 式が成り立つ.

$$a_{n_0} - \epsilon \le \limsup_{n \to \infty} a_n \le a_{n_0} + \epsilon$$

$$a_{n_0} - \epsilon \le \liminf_{n \to \infty} a_n \le a_{n_0} + \epsilon$$
(32.11)

 $\limsup_{n \to \infty} a_n, \limsup_{n \to \infty} a_n$ がともに実数であり、さらに、 $\liminf_{n \to \infty} a_n \le \limsup_{n \to \infty} a_n$ より、

$$0 \le \limsup_{n \to \infty} a_n - \liminf_{n \to \infty} a_n \le 2\epsilon$$

がいえる. $\epsilon > 0$ で任意なので、この式は $\liminf_{n \to \infty} a_n = \limsup_{n \to \infty} a_n$ を意味する.

以上より命題 29.6(i) より, a_n は実数に収束する.

(32.11) 式について注意が必要である.それは「 ϵ が任意の正数なので, $\limsup_{n\to\infty}a_n=a_{n_0}$ である」としては誤りということである. n_0 が ϵ と無関係の定数であれば「」内は正しいが,この n_0 は ϵ を決めた後に決めるものであり,関係があるため「」内は誤りである.

32.3 級数と正項級数

簡単化のため、実数列は n=0 からスタートするものとする.実数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ について、 $\sum_{n=0}^\infty a_n$ を無限級

数,もしくは単に、級数と呼ぶ.これは $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ が収束していようがいまいが関係はない.

級数が収束するための必要条件は、簡単なものならば以下が有名である.

命題 32.12
$$\lim a_n \neq 0$$
 ならば、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

証明 $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とする. a_n が 0 に収束しないので,ある $\epsilon > 0$ が存在して,任意の n_0 についてある $n > n_0$ が存在して, $|a_n| \ge \epsilon$. この不等式は, $|s_n - s_{n-1}| \ge \epsilon$ と同値である.

これは、数列 s_n がコーシー列ではないので事を意味する. 従って s_n は収束しない.

定義 32.13
$$a_n \geq 0$$
 とする. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を正項級数と呼ぶ.

上に有界な単調増加数列が収束することから,以下が簡単に言える.

命題 32.14 正項級数は、0以上のある実数に収束するか、 ∞ に発散するかのどちらかである.

例えば
$$\sum_{n=0}^{\infty} n$$
 は ∞ に発散し, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ は 1 に収束することが知られている.よって,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

と書く. Sympy Live で確かめてみよう. 以下のコードはそれぞれ $A=\sum_{n=0}^m n, B=\sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)}$ を定義して, $m\to\infty$ を考えている.

m n=symbols('m, n')

A=Sum(n,(n,1,m))

B=Sum(1/(n*(n+1)),(n,1,m))

limit(A,m,oo)

limit(B,m,oo)

ちなみに $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}}$ も収束することが知られているが,上のように limit を使うとエラーがでる.以下の様に $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^{1.5}}$ を定義した後に,m に ∞ を代入するという形でコードを書くとよい.

D=Sum(1/n**1.5,(n,1,m))

D.subs(m,oo).evalf()

これによって,小数による近似値が得られる.

32.4 絶対収束級数と root test と ratio test

前節の正項級数を拡張しよう.

定義 32.15 級数 $\sum_{n=0}^\infty a_n$ について,各項の絶対値をとった級数 $\sum_{n=0}^\infty |a_n|$ が収束するとき,級数 $\sum_{n=0}^\infty a_n$ を絶対収束級数と呼ぶ.

定理 32.16 絶対収束級数は収束する.

証明 $s_n=\sum_{k=0}^n a_k$ とする.仮定より $\sum_{k=0}^n |a_k|$ が収束するので,任意の $\epsilon>0$ について,ある正整数 n_0 が存在して,任意の n,m(ただし $n>m\geq n_0$) について,

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| - \sum_{k=0}^{m} |a_k| = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon$$

が成り立つ. この任意の $\epsilon>0$ と、ある正整数 n_0 について、任意の $n>m\geq n_0$ について、

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right|$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^n |a_k|$$

$$\leq \epsilon$$

従って数列 s_n はコーシー列なので収束する. つまり $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は収束する.

例えば $n \ge 0$ として, $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} & (n \text{ が } 2 \text{ で割 } 9 \text{ 切れるとき}) \\ 0 & (その他のとき) \end{cases}$

についての,級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を考えよう.すると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

より, $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ は収束する.したがって $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ は絶対収束級数である.

定数 0 < r < 1 について $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ は収束するので,正項級数と絶対収束級数の定義から,以下が言える.

定理 32.17 (root test) 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は

(i). $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ のとき、絶対収束する.

(ii). $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ のとき,発散する.

_

この(i)と定理 32.9 と合わせれば,

系 32.18 (ratio test) 級数
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$
 は $\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ のとき、絶対収束する.

定理 32.17 の証明: (i) の証明

仮定より、 $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < r < 1$ を満たす、ある正数 r を 1 つ取る.

上極限の ϵ 論法から,ある正整数 n_0 が存在して, $n>n_0$ のとき $\sqrt[n]{|a_n|}< r$ が成り立つ. つまり $|a_n|< r^n$. これより,k>0 で $|a_{n_0+k}|< r^{n_0+k}$.

任意の $n > n_0$ について,

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n_0} a_k \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-n_0} a_{n_0+k} \right| \le \sum_{k=1}^{n-n_0} |a_{n_0+k}|$$

$$< \sum_{k=1}^{n-n_0} r^{n_0+k}$$

$$< \sum_{k=1}^{\infty} r^{n_0+k}$$

$$= \frac{r^{n_0+1}}{1-r}$$

従って移項すると,

$$\sum_{k=0}^{n_0} a_k - \frac{r^{n_0+1}}{1-r} < \sum_{k=0}^{n} a_k < \sum_{k=0}^{n_0} a_k + \frac{r^{n_0+1}}{1-r}$$

n について上極限を取ると,

$$\sum_{k=0}^{n_0} a_k - \frac{r^{n_0+1}}{1-r} \le \limsup_{n \to \infty} \sum_{k=0}^n a_k \le \sum_{k=0}^{n_0} a_k + \frac{r^{n_0+1}}{1-r}$$
(32.12)

これより上極限 $\limsup_{n \to \infty} \sum_{k=0}^n a_k$ は実数である.右側の不等式から, $n_0 \to \infty$ の下極限を計算すると,

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n a_k \leq \liminf_{n_0\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n_0}a_k + \frac{r^{n_0+1}}{1-r}\right)$$

$$\left(\lim_{n_0\to\infty}\frac{r^{n_0+1}}{1-r} = 0 \right)$$
 と定理 32.3(iii) から
$$\left(\lim_{n_0\to\infty}\frac{r^{n_0+1}}{1-r} = 0\right)$$

が言える.これは $\limsup_{n \to \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \liminf_{n \to \infty} \sum_{k=0}^n a_k$ が実数で成り立つことことを意味するので,すなわち $\sum_{k=0}^\infty a_k$ は実数である.

(ii) の証明: $1 < \limsup \sqrt[n]{a_n}$ より、上極限の ϵ 論法から、任意の n_0 について、ある $n > n_0$ が存在して、 $\sqrt[n]{a_n} > 1$. つまり、 $a_n > 1$. これは a_n が 0 に収束しないことを表すので、命題 $\frac{32.12}{n}$ より、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

絶対収束級数のポイントは,足し算をする項を変更しても和が変わらないという点である. 実数 a,b で a+b=b+a となるのは,項が有限個の場合であり,無限にある場合はそうなるとは限らない. しかし絶対 収束級数ならば,自由に変えてもよいのである.

定理 32.19 絶対収束級数は和の順序を変更しても、収束値は変わらない. またその変更した級数も絶対収束 する.

証明

 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束級数で, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \alpha \in \mathbf{R}$ とする.絶対収束の仮定から, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ は実数である.数列 $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ は,数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の順序を変えた数列とする.

そこで $k=0,1,\cdots$, についての各 b_k について,n の値が 1 つ定まって, $a_n=b_k$ となるとする.よって整数 $k=0,1,2,\cdots$ を定義域とする関数 $\sigma(k)$ を作り,任意の k について $a_{\sigma(k)}=b_k$ となるものとする.

さらに、各 $k=0,1,\cdots$ について、関数M(k)を

$$M(k) = \max_{0 \le i \le k} \sigma(i)$$

とする. つまり $\sigma(0), \sigma(1), \cdots, \sigma(k)$ の中の最大値とする. M(k) は k について明らかに単調増加である. $k \to \infty$ のとき, $M(k) \to \infty$ となるのも明らかである.

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の絶対収束性と, α に収束することから,任意の $\epsilon>0$ について以下の 2 つの論理式が成り立つ

$$(\exists n_1 \in \mathbf{N})(\forall n \ge n_1) \left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \epsilon \right)$$
$$(\exists n_2 > n_1)(\forall n \ge n_2) \left(\left| \sum_{k=0}^{n} a_k - \alpha \right| < \epsilon \right)$$

よって、任意の $\epsilon > 0$ について、ある $n_0 = \max(M(n_2))$ が存在して、 $n > n_0$ のとき、

$$\left| \sum_{k=0}^{n} b_k - \alpha \right| = \left| \sum_{k=0}^{n_2} a_k + \sum_{i \le n, \sigma(i) > n_2} a_{\sigma(i)} - \alpha \right|$$

が言える.右辺の絶対値の中の第 2 項の意味は, $i=0,1,2,\cdots,n$ について, $a_{\sigma(i)}$ が n+1 個定まるが,その中で, $\sigma(i)>n_2$ を満たすものだけの和を表すものである.続きを書くと,

$$\left| \sum_{k=0}^{n} b_k - \alpha \right| \le \left| \sum_{k=0}^{n_2} a_k - \alpha \right| + \left| \sum_{i \le n, \sigma(i) > n_2} a_{\sigma(i)} \right|$$

$$\le \left| \sum_{k=0}^{n_2} a_k - \alpha \right| + \sum_{i \le n, \sigma(i) > n_1} |a_{\sigma(i)}|$$

$$\le \left| \sum_{k=0}^{n_2} a_k - \alpha \right| + \sum_{n > n_1} |a_n|$$

$$< 2\epsilon$$

よって, $n \to \infty$ のとき $\sum_{k=0}^n b_k$ が α に収束する.つまり, $\sum_{n=0}^\infty b_n = \alpha$ である.

この定理の応用を考えよう.まず,

 $(a_0+a_1+a_2)(b_0+b_1+b_2)=a_0b_0+a_0b_1+a_0b_2+a_1b_0+a_1b_1+a_1b_2+a_2b_0+a_2b_1+a_2b_2$ が成り立つ。右辺について、新しい数列 c_n を以下のように、i を整数で走らせて、 a_ib_{n-i} の和としよう。

$$c_0 = a_0 b_0, \ c_1 = a_0 b_1 + b_0 a_1, \ c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \ c_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1, \ c_4 = a_2 b_2$$

こうした場合, 当然, $(a_0+a_1+a_2)(b_0+b_1+b_2)=\sum_{n=0}^4 c_n$ が成り立つ. これについて無限和であっても, 絶対収束級数ならば, 同様のことが成り立つのである. 定理にすると以下である.

定理 32.20 2 つの級数 $\sum_{i=0}^\infty a_n, \sum_{i=0}^\infty b_n$ がともに絶対収束するとき, $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ を定義すると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{i=0}^{\infty} b_n$$

証明 まず $\sum_{n=0}^\infty c_n$ が絶対収束することを示す.i,j は 0 以上の整数とすると, $\sum_{n=0}^k c_n$ は, $i \geq 0, j \geq 0, i+j \leq k$ を満たす全ての i,j について, a_ib_j の有限個の和である.そこで $\sum_{n=0}^k c_n = \sum_{i \geq 0, j \geq 0, i+j \leq k} a_ib_j$ と表す.

$$\begin{split} \sum_{n=0}^{k} |c_n| &= \sum_{i \geq 0, j \geq 0, i+j \leq k} |a_i| |b_j| \\ &\leq \sum_{0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq k} |a_n| |b_i| \\ &= \sum_{i=0}^{k} |a_i| \sum_{j=0}^{k} |b_j| \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \\ &< \infty \end{split}$$

これより,級数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ は絶対収束する.次に, $\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}a_n, \beta=\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ とすると,仮定より以下が成り立つ.

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^k a_n\sum_{n=0}^k b_n\right)=\alpha\beta,\ \lim_{k\to\infty}\sum_{n=k}^\infty |a_n|=0,\ \lim_{k\to\infty}\sum_{n=k}^\infty |b_n|=0$$

ある正整数 k_0 をとって $k > 2k_0$ のとき,

$$\left| \sum_{n=0}^{k} c_{n} - \alpha \beta \right| = \left| \sum_{i \geq j \geq 0, i+j \leq k} a_{i} b_{j} - \alpha \beta \right|$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{k_{0}} \sum_{j=0}^{k_{0}} a_{i} b_{j} + \sum_{i=k_{0}+1}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} a_{i} b_{j} + \sum_{i=0}^{k_{0}} \sum_{j=k_{0}+1}^{k-i} a_{i} b_{j} - \alpha \beta \right|$$

$$\leq \left| \sum_{i=0}^{k_{0}} \sum_{j=0}^{k_{0}} a_{i} b_{j} - \alpha \beta \right| + \sum_{i=k_{0}+1}^{k} |a_{i}| \cdot \sum_{j=0}^{k-i} |b_{j}| + \sum_{i=0}^{k} |a_{i}| \cdot \sum_{j=k_{0}+1}^{k-i} |b_{j}|$$

$$\leq \left| \sum_{i=0}^{k_{0}} a_{i} \sum_{j=0}^{k_{0}} b_{j} - \alpha \beta \right| + \sum_{i=k_{0}+1}^{\infty} |a_{i}| \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |b_{j}| + \sum_{i=0}^{\infty} |a_{i}| \cdot \sum_{j=k_{0}+1}^{\infty} |b_{j}|$$

$$(32.14)$$

左辺で $k \to \infty$ の上極限をとって

$$\limsup_{k \to \infty} \left| \sum_{n=0}^{k} c_n - \alpha \beta \right| \le \left| \sum_{i=0}^{k_0} a_i \sum_{j=0}^{k_0} b_j - \alpha \beta \right| + \sum_{i=k_0+1}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| + \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{j=k_0+1}^{\infty} |b_j| + \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{j=k_0+1}^{\infty} |b_j|$$

従って
$$\limsup_{k \to \infty} \left| \sum_{n=0}^k c_n - \alpha \beta \right| = 0$$
 が成り立つので、 $\sum_{n=0}^\infty c_n = \alpha \beta$ が言える.

(32.13) 式から (32.14) 式への変形については,図 32.1 がそのイメージ図である.(32.14) 式の絶対値の中にある,第 1 項,第 2 項,第 3 項が,それぞれア,イ,ウの領域 (境界線含む) にある整数 i,j についての a_ib_j の和となっている.

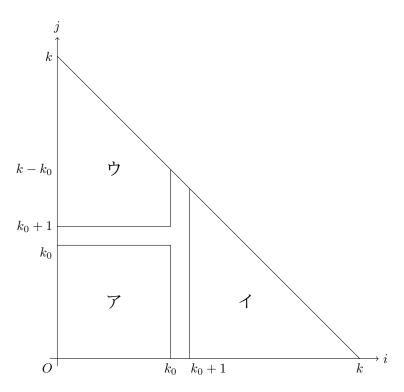


図 32.1 (32.13) 式から (32.13) 式への変形のイメージ図

32.5 整関数の定義

x の n 次多項式を逆に書いていくと、実数 a_0, a_1, \dots, a_n で、例えば

$$a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$$

と書ける. x の代わりに x-a として,

$$a_0(x-a)^0 + a_1(x-a)^1 + \dots + a_n(x-a)^n = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k$$

としても n 次多項式である. 項数が n+1 個と有限個の和になっている. f(x) は連続関数で、微分可能であることはすでに示してある.

これを拡張して、n を無限にとって、定数 a_0, a_1, \cdots について、x の関数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \dots + a_n (x-a)^n + \dots$$
 (32.15)

を考える.まずはそもそもこのような x の実数値関数が存在するかどうかが第 1 のポイントである.つまり, x が与えられたときに f(x) が実数となるかである.

例えば $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots$ を考えよう.これは |x|<1 であれば, $\frac{1}{1-x}$ を返す.従って |x|<1 において,g(x) は実数値関数と言える.しかし $x\geq 1$ であれば, $g(x)=\infty$ となってしまうので,g(x) は実数値関数とは言えない.

さて (32.15) 式の実数値関数 f(x) が存在するならば、それが項別に微分可能かということが第 2 のポイントとなる。項別微分について今の g(x) を例にとると、|x|<1 で

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$$

であり、 $\frac{1}{1-x}$ の導関数は $\frac{1}{(1-x)^2}$ である。最右辺が項ごとに微分できるならば、あきらかに

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$$

と書ける. 果たして

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$$

が言えるのだろうかということが、その第 2 のポイントである.この節を学ぶことによって、この 2 つのポイントに答えることができる.

第1のポイントは、前節の定理 32.17 を用いれば、ある程度わかる、実際それから、

$$\limsup |a_n(x-a)^n|^{1/n} = |x-a| \cdot \limsup |a_n|^{1/n} < 1 \Longrightarrow f(x)$$
 が実数で存在する $\limsup |a_n(x-a)^n|^{1/n} = |x-a| \cdot \limsup |a_n|^{1/n} > 1 \Longrightarrow f(x)$ が存在しない

が言える. この $|x-a|\limsup |a_n|^{1/n}$ が 1 より小か大かがポイントになる. |x-a| は x と a からの距離である. なので、 $\limsup |a_n|^{1/n}$ が正数であれば、

$$|x - a| < \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$$

を満たす任意のx について、(32.15) 式の整関数が存在し、不等号の向きが逆のときは、任意のx について (32.15) 式の整関数が存在しない。

上の式の右辺が、整関数が収束するか否かの境目である.これをを収束半径と呼び、 $\limsup |a_n|^{1/n}$ が 0 と ∞ の場合を含めて、以下のように定義する.

定義 32.21 a を中心とする整関数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ について、収束半径 R を

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$$

と定義する。ただし、 $\limsup |a_n|^{1/n}=0$ のときは、 $R=\infty$ と定義し、 $\limsup |a_n|^{1/n}=\infty$ のときは、R=0 と定義するので、R は 0 以上の実数か ∞ において、一意に定まる。

定理 32.22 前定義の整関数と収束半径について,

- (i). |x-a| < R ならば、整関数は絶対収束する.
- (ii). |x-a| > R ならば、整関数は発散する.

収束に関して,以下の例題を見てみよう.

┙

例題 32.23 以下の3つのxに関する整級数の収束半径を、それぞれ求めよ、

(i).
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
, (ii). $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, (iii). $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^n$

(解答)

- (i) は, $a_n^{1/n}=1^{1/n}=1$ で定数なのでその上極限も 1.収束半径は 1/1=1.
- (ii) は,例題 $\frac{32.8}{2.8}$ より $\lim(n!)^{1/n}=\infty$ なので, $\lim\frac{1}{(n!)^{1/n}}=0$.定義 $\frac{32.21}{2.21}$ より, $R=\infty$
- (iii) は, $\frac{1}{(3^n)^{1/n}} = \frac{1}{3}$ で定数なので,その上極限も 1/3.収束半径はこの逆数で 3.

(解答終)

この (i) は、この節の冒頭で、 $\sum_{n=0}^\infty x^n$ が |x|<1 のときに実数値となることに対応している.また (ii) は、次節への準備である.

$32.6 \exp(x)$ の定義の動機と定義

3.11 節など、すでに何回か計算自体は行っているが、ここでは $\exp(x)$ 関数についてきちんと取り上げる。 $\exp(x)$ の定義の動機は、実数全体を定義域とし、f'(x)=f(x) が常に成り立つ C^∞ 級の f(x) で、f(0)=1 のものを探したいというものである 32.2 . 特に x=0 では

$$1 = f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = \cdots$$

をみたす. テイラーの公式から, ある $\lambda \in (0,1)$ があって, 以下が成り立つ.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} x^n + \frac{f^{(k+1)}(\lambda x)}{(k+1)!} x^{k+1} = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} x^n + \frac{f^{(k+1)}(\lambda x)}{(k+1)!} x^{k+1}$$

これが任意の k について成り立つ。 剰余項を無視して $\sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} x^n$ に注目して, $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} x^n$ のように,x の整関数を考える。この整関数については, $\lim (n!)^{1/n} = \infty$ なので,収束半径が ∞ になる.よって,以下が定義できる.

定義 32.24 実数全体を定義域とする関数 exp を,

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

とする.

あとは $\exp(x)$ が微分可能かどうかである.それは可能であり,結果として $\exp(x)$ が C^∞ 級であることは次節で示す.また任意の x について, $\{\exp(x)\}'=\exp(x)$ であることは次々節で示す.

^{32.2} 微分方程式の書き方では、y' = y, y(0) = 1 をみたす C^{∞} 級の y(x) を求めるということである.

整関数の微分可能性 32.7

前節の冒頭で、2つのポイントを挙げ、第1のポイントについてはすでに述べた。ここでは第2のポイント について、その答えをポジティブであることを示す。要するに、x の a を中心とする整級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \tag{32.16}$$

が実数で存在したならば、これが微分可能であり、しかもこれを項別に微分した整級数、

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} \tag{32.17}$$

となるのである. つまり, (32.16) 式の導関数が (32.17) 式であることを示す.

まずはこの2つの整級数の収束半径が一致することを,2つの補題を用いて示す.

なおこの節の証明や定義では「逆数」とカッコつきで言葉が何回か出てくる.それは実数 a の逆数 a^{-1} に 加え、 ∞ の逆数は0で、0の逆数は ∞ と定義している.

(32.16) 式と (32.17) 式を比較すると、後者は x のべき部分が n 乗ではなく n-1 乗となっている. また、 初項も前者はn=0からだが、後者はn=1からとなっている.この見かけの違いはあまり気にする必要が ないということが、以下の補題からわかる.

補題 32.25 数列 a_n について、任意の整数の定数 m について、

- (i). $\limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/(n+m)} = \limsup_{n \to \infty} |a_{n+m}|^{1/n}$ (ii). $\liminf_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} = \liminf_{n \to \infty} |a_n|^{1/(n+m)} = \liminf_{n \to \infty} |a_{n+m}|^{1/n}$

証明 (i) の証明: $\limsup |a_n|^{1/n} = \limsup |a_n|^{1/(n+m)}$ のみ証明する (これが証明されればもう一方の等 式については明らかなので).

極限を考えるので,n は十分大きいものを考えれば良い.よって,n+m>0 を仮定しても一般性は失わな いので,こう仮定する.

 $\limsup |a_n|^{1/n} = \alpha$, $\limsup |a_n|^{1/(n+m)} = \beta$ とする. α, β ともに 0 以上の実数もしくは ∞ である.

 $n\to\infty$ $[1]\alpha<\infty$ のとき: 上極限の ϵ 論法より,任意の $\epsilon>0$ について,ある n_0 が存在して,任意の $n>n_0$ につ いて, $|a_n|^{1/n} < (\alpha + \epsilon)$ つまり, $|a_n| < (\alpha + \epsilon)^n$ が言える. これより,

$$|a_n|^{1/(n+m)} < (\alpha + \epsilon)^{1/(1+m/n)}$$

なので、両辺の上極限をとって、 $\beta \le \alpha + \epsilon$. ϵ は任意なので $\beta \le \alpha$ であり、従って β は実数である.

 β が実数であることから、今証明したこの論法と全く同様の議論で、 $\alpha \leq \beta$ が言える. よって $\alpha = \beta$ で

 $[2]lpha=\infty$ のとき: 仮に eta を実数と仮定する. [1] の証明より lpha が実数となる. これは $lpha=\infty$ に矛盾する. よって $\beta = \infty$

(ii) の証明: (i) と同様の理由で、 $\liminf_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}=\liminf_{n\to\infty}|a_n|^{1/(n+m)}$ のみ証明する.

 $\liminf_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}=\alpha$, $\liminf_{n\to\infty}|a_n|^{1/(n+m)}=\beta$ とする. α,β ともに 0 以上の実数もしくは ∞ である.

 $[1]\alpha=\infty$ のとき: 任意の M>0 について,ある n_0 が存在して, $n>n_0$ のとき, $a_n^{1/n}>M$. これより, $a_n^{1/(n+m)}>M^{1/(1+m/n)}$. $n\to\infty$ で両辺の下極限をとって, $\beta\geq M$. M は任意なので $\beta=\infty$ を意味する.

[2] $0<\alpha<\infty$ のとき: 下極限の ϵ 論法より,任意の $\epsilon>0$ (ただし $\epsilon<\alpha$) について,ある n_0 が存在して,任意の $n>n_0$ について, $|a_n|^{1/n}>(\alpha-\epsilon)$ つまり, $a_n>(\alpha-\epsilon)^n$ が言える.これより,

$$a_n^{1/(n+m)} > (\alpha + \epsilon)^{1/(1+m/n)}$$

なので、 $n \to \infty$ で両辺の下極限をとって、 $\beta \ge \alpha - \epsilon$. ϵ は任意なので $\beta \ge \alpha$ である.

- $(a)\beta$ が実数の場合は、今証明したこの論法と全く同様の議論で、 $\beta \le \alpha$ が言える. よって $\alpha = \beta$ である.
- $(b)\beta = \infty$ の場合は、[1] と全く同様の議論より $\alpha = \infty$ となって矛盾する.

 $[3]\alpha=0$ のとき: 仮に β が ∞ とすると,[1] と同様の議論で $\alpha=\infty$ となり矛盾が生じる.仮に β が 0 より大きい実数のときにはは,[2] と同様の議論で α は β と一致し, $\alpha>0$ となり矛盾が生じる.よって $\beta=0$ である.

例題 32.26 任意の整数 m について,

$$\lim_{n \to \infty} (n+m)^{1/n} = 1$$

証明 $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ と前補題から言える.

命題 32.27 任意の整数 k,ℓ,m (ただし $k+m\geq 0$) について, $\{a_i\}_{i=k+\ell}^\infty$ についての,整関数 $\sum_{n=k}^\infty a_{n+\ell}(x-a)^{n+m}$ の収束半径は, $1/\limsup|a_{n+\ell}|^{1/n}$.

証明 与えられた整関数は $\sum_{n=k+m}^{\infty} a_{n-m+\ell}(x-a)^n$ なので、収束半径は $\limsup_{n\to\infty} |a_{n-m+\ell}|^{1/n}$ の「逆数」である。 前補題よりこれは、 $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+\ell}|^{1/n}$ の「逆数」である。

この命題のポイントは、整関数部分のべき乗部分が、 $(x-a)^n$ でなくとも、例えば $(x-a)^{n-1}$ であっても、係数部分の n 乗根の上極限を考えればよいということである。よって、

定理 32.28 x に関する 2 つの整関数 ($\frac{32.16}{2}$) 式と ($\frac{32.17}{2}$) 式について,その収束半径は,一致する.

証明

$$\limsup |na_n|^{1/n} = \limsup (n^{1/n}|a_n|^{1/n})$$

 $(\lim n^{1/n} = 1 \, \mathcal{SOC}) = \limsup |a_n|^{1/n}$

前命題より、これは2つの級数の収束半径が一致することを意味する.

以上の準備によって、この節の目的を達成することができる.

定理 32.29 x の整関数 (32.16) 式の収束半径 R は非 0 とする.このときその導関数は,|x-a| < R の範囲で定義された,(32.17) 式となる.

証明 a=0としても一般性を失わないので、そう仮定する、従って、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

とし、この整級数の収束半径 R は、正または ∞ である。x が与えられたとき、|x| < r < R を満たすある正数 r を 1 つとるとする。また、h は |h| < r - |x| を満たす非 0 の実数とする。このとき、f(x+h) も存在し、

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| = \left| \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} a_n [(x+h)^n - x^n] - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right|$$

$$= \left| a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^n {}_n C_k x^{n-k} h^{k-1} - \left(a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right) \right|$$

$$= \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^n {}_n C_k x^{n-k} h^{k-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right|$$

$$= \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(n x^{n-1} + \sum_{k=2}^n {}_n C_k x^{n-k} h^{k-1} \right) - \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right|$$

$$= \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=2}^n {}_n C_k x^{n-k} h^{k-1} \right|$$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=2}^n {}_n C_k |x|^{n-k} |h|^{k-1}$$

$$= |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=2}^n {}_n C_k |x|^{n-k} |h|^{k-2}$$

$$1 \leq k \leq n \text{ and } \sum_{k=2}^n {}_n C_k |x|^{n-k} |h|^{k-2}$$

$$\leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left[\sum_{k=2}^n n(n-1)_{n-2} C_{k-2} |x|^{n-k} |h|^{k-2} \right]$$

$$= |h| \sum_{n=2}^{\infty} [|a_n| \cdot n(n-1) \cdot |x|^2 \cdot (|x| + |h|)^{n-2}]$$

$$\leq |h| \left[\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| r^n \right]$$

$$(32.18)$$

この右辺の[]内について評価する.

$$g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|x^n$$
(32.19)

とすると、これは、x=0を中心とした x についての整関数である。この収束半径の「逆数」は、

$$\limsup \left(n^{1/n} (n-1)^{1/n} |a_n|^{1/n} \right)$$

となる. $\lim n^{1/n}=1$ である. また補題 32.25 より, $\lim (n-1)^{1/n}=\lim n^{1/n}=1$ である. 以上より上の式は

$$\lim \sup |a_n|^{1/n}$$

と変形でき、これは f(x) の収束半径の「逆数」である。よって、g(x) の収束半径は、f(x) の収束半径 R と一致する.

r < R を仮定しているので,

$$g(r) = \left[\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|r^n\right]$$

は、hとは無関係な0以上の正の実数である。よって、(32.18)式より、

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| \le |h| \cdot g(r)$$

$$\to 0 \quad (h \to 0)$$

が言えるので、f(x) は |x| < R で微分可能であり、その導関数は、

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

である.

この定理から、整関数を微分したものは整関数となる. 従って、

系 32.30 x の整関数 $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-a)^n$ の収束半径を $R\in(0,\infty]$ とする.この関数は |x-a|< R を満たす x で C^∞ 級である.

簡単に言うと、整関数は収束半径内で項別微分が無限に可能であるということである。前節で定義した $\exp(x)$ の収束半径は ∞ なので、 $\exp(x)$ は任意の x で C^{∞} 級である。

また C^{∞} 級なので当然、整関数は収束半径内で連続関数であることも指摘しておく.

32.8 $e^x \ge \exp(x)$

まず前節の微分可能性より,以下が言える.

命題 32.31 $\exp(x)$ の導関数は、 $\exp(x)$ である.

証明 項別微分が可能なので,

$$\{\exp(x)\}' = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n!} x^n \right\}'$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n!} x^{n-1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1}$$
$$= \exp(x)$$

 $\exp(x)$ の性質では、いわゆる以下の指数法則が成り立つ。

命題 32.32 任意の実数 x, y について,

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

証明 $\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}rac{x^n}{n!}$ と $\exp(y)=\sum_{n=0}^{\infty}rac{y^n}{n!}$ から, $a_n=rac{x^n}{n!},b_n=rac{y^n}{n!}$ とすると,

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

と書ける. さらに $\sum_{n=0}^{\infty}a_n,\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ ともに絶対収束する. このとき $c_n=\sum_{i=0}^na_ib_{n-i}$ とすると,

$$c_n = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \frac{y^{n-i}}{(n-i)!}$$
2 項定理より
$$= \frac{1}{n!} (x+y)^n$$

 c_n の作り方から定理 $\frac{32.20}{c_n}$ より, $\sum_{n=0}^\infty c_n$ も絶対収束し, $\sum_{n=0}^\infty c_n = \sum_{n=0}^\infty a_n \sum_{n=0}^\infty b_n$ がいえる.この式の両辺を exp 関数で表して,

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

 $\exp(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$ なので,この定理より,任意の実数について, $\exp(x)$ を e^x と省略して書くことが可能となる.

32.9 関数列の収束

前節の整関数は、数列の収束とみなして収束を考えた. が、数列ではなくて、関数列の収束とみなすこともできる.

まずは関数列を定義しよう. この節では X を実数の部分集合とする.

定義 32.33 n は 0 以上の整数とする。 X で定義された x の関数 $f_n(x)$ が, $n=0,1,2,\cdots$ の順にそれぞれ に定義されているとき, $f_n(x)$ を, 関数列 $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ という.

関数列を決めたときに、気になるのは $n \to \infty$ のときの挙動である.

例題 32.34 $n=0,1,\cdots$ について、閉区間 [0,1] で定義された関数列 $f_n(x)=x^n$ を考える.このとき、関数列 $f_n(x)$ に関する $n\to\infty$ を取ると、

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{(if } 0 \le x < 1) \\ 1 & \text{(if } x = 1) \end{cases}$$

この関数と極限を見ると、各 $x\in[0,1]$ について、極限値が存在している。実際 [0,1] で定義された $n=0,1,\cdots$ の関数列

$$g_n(x) = (-1)^n$$

とすると, どの点 $x \in [0,1]$ においても $g_n(x)$ の $n \to \infty$ の極限値は存在しない. そこでまず, 各点収束を定義する.

定義 32.35 \mathbf{R} の部分集合 \mathbf{X} で定義された、x の関数列 $f_n(x)(n=0,1,\cdots)$ を考える. 任意の $x\in \mathbf{X}$ について、 $f_n(x)$ が $n\to\infty$ で収束するとき、f(x) は \mathbf{X} で各点収束するという.

よって [0,1] で定義された関数列 $f_n(x)=x^n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ は $n\to\infty$ で各点収束する. では各点収束を論理式で書いてみよう. 任意の $x\in X$ について、ある実数 α が存在して、

$$(\forall \epsilon > 0)(\forall x \in \boldsymbol{X})(\exists n_0 \in \boldsymbol{N})(\forall n > n_0)(|f_n(x) - \alpha| < \epsilon)$$

である. x それぞれについて,ある n_0 が存在するわけである.なので,x が異なれば, n_0 の値も異なっても良いのである.そこで,数列の収束を定義したように,ここでも,($\forall x \in X$) と ($\exists n_0 \in N$) の順番を入れ替えてみよう.そうすると,任意の $x \in X$ について,ある実数 α が存在することは共通として,その後の論理式は以下となる.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall x \in \mathbf{X})(\forall n > n_0)(|f_n(x) - \alpha| < \epsilon)$$
(32.20)

この場合,x の値に関係なく,ある n_0 が決まって,それより大きいn については,必ず $|f_n(x)-\alpha|<\epsilon$ が成り立つわけである.明らかに各点収束よりも条件が厳しくなっている.これを定義しよう.

定義 32.36 関数列 $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ と関数 f(x) はともに X を定義域とする. 任意の $x \in X$ について,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall x \in \mathbf{X})(\forall n > n_0)(|f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$$

が成り立つとき、関数列 $f_n(x)$ は f(x) に X で一様収束するという.

先に書いたように一様収束のほうが各点収束より条件が厳しいので,

命題 32.37 関数列が一様収束するならば、各点収束する.

この命題の対偶「各点収束しないならば、一様収束しない」をイメージすると、簡単に証明できるであろう。 さて $f_n(x)$ と f(x) の各点で ϵ 論法を使うのはかなり面倒である。そこでまず、2 つの関数の「距離」を定義する.

定義 32.38 X を定義域とする 2 つの関数 f(x), g(x) について、その距離 d を以下で定義する.

$$d = \sup_{x \in \boldsymbol{X}} |f(x) - g(x)|$$

例えば [0,1] で定義された関数 f(x)=x と $g(x)=x^2$ について,その距離を考えよう. $|x-x^2|=-x(x-1)$ であり,明らかに x=1/2 のとき最大値 1/4 を取る.よって $\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|=1/4$ である.

前定義の d について ϵ 論法を用いることによって、各点ではなくて、距離について ϵ 論法を用いて一様収束が言える.

定理 32.39 関数列 $f_n(x)$ と関数 f(x) はともに X を定義域とする. 任意の $\epsilon>0$ について,ある n_0 が存在して, $n>n_0$ ならば $\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$ が成り立つとき, $f_n(x)$ は f(x) に一様収束する.

これを一様収束の定義にしているテキストも多い. どちらにしても,このように2つの関数の距離を数列として考えることにより,数列で学んだことが,簡単に応用できる.まずはコーシー列の考え方である.

定義 32.40 関数列 $f_n(x)$ は X を定義域とする。任意の $\epsilon>0$ について,ある n_0 が存在して, n_0 より大き い任意の n,m について,ならば $\sup_{x\in X}|f_n(x)-f_m(x)|<\epsilon$ が成り立つとき,関数列 $f_n(x)$ は X でコーシー列であるという.

定理 32.41 関数列 $f_n(x)$ が定義域でコーシー列であれば、一様収束する

証明はもはや不要である. コーシー列であることがわかれば,一様収束する関数がわからなくとも,一様収束することが言える. これは数列の収束と全く同様である. コーシー列の定義で上極限を2回取れば以下は簡単に言えるし,逆も簡単に言える.

命題 32.42 関数列 $f_n(x)$ が定義域 X でコーシー列であることは, n > m として,

$$\lim\sup_{m\to\infty} \lim\sup_{n\to\infty} \sup_{x\in \mathbf{X}} |f_n(x) - f_m(x)| = 0$$

が成り立つことと同値である.

例題 32.43 [0,1] で定義された関数列 $f_n(x)=x^n,\;(n=1,2,\cdots)$ は一様収束しない.

証明 $n>m\geq 2$ とする. $x\in [0,1]$ で $|x^n-x^m|=x^m-x^n$ なので,これを g(x) とおく.g(x) は定義域で微分可能である. $g'(x)=mx^{m-1}-nx^{n-1}=x^{m-1}(m-nx^{n-m})$. 内点では $c=(m/n)^{1/(n-m)}$ のみ g'(c)=0 となる. $g(c)=(m/n)^{m/(n-m)}-(m/n)^{n/(n-m)}$ となり,これは端点の値 g(0)=0,g(1)=0 よりも大きい.よって c が定義域での最大点である.以上より

$$\sup_{x \in [0,1]} |x^n - x^m| = (m/n)^{m/(n-m)} - (m/n)^{n/(n-m)}$$

$$\to 1 \quad (n \to \infty)$$

これより

$$\limsup_{m \to \infty} \limsup_{n \to \infty} \sup_{x \in [0,1]} |x^n - x^m| = 1$$

であり、前命題の対偶から関数列 $f_n(x)$ はコーシー列ではない. よって一様収束しない.

この証明も、微分したりなどそれなりに面倒である.連続関数列の収束であれば、計算しなくともある程度 のことが言えるというものが,次の定理である.

定理 32.44 関数列 $f_n(x)$ と関数 f(x) はともに $m{X}$ を定義域とする. 任意の n について、関数列 $f_n(x)$ は連 続関数とする.このとき $f_n(x)$ が f(x) に一様収束するならば,f(x) も X で連続である.

証明 任意の $x \in X$ をとる. 一様収束の定義より、任意の $\epsilon > 0$ について、ある m が存在して、任意の xについて $|f_m(x) - f(x)| < \epsilon$ が成り立つ.

次に任意の $a \in X$ を取る. $f_m(x)$ の連続性より、上の $\epsilon > 0$ についてある $\delta > 0$ が存在して、 $|x-a| < \delta$ のとき, $|f_m(x) - f_m(a)| < \epsilon$ が成り立つ. この x について,

$$|f(x) - f(a)| = |f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(a) + f_m(a) - f(a)|$$

$$\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(a)| + |f_m(a) - f(a)|$$

$$< 3\epsilon$$

これは f(x) が a で連続であること表す. a は X で任意の点なので, f(x) は X で連続関数である.

対偶を取ると,

系 32.45 X で定義された関数列 $f_n(x)$ が、どの n でも X で連続関数とする. 以下の (i)(ii) の場合、 $f_n(x)$ は一様収束しない.

- (i). $f_n(x)$ が各点収束しない.
- (ii). $f_n(x)$ が f(x) に各点収束するが、 f(x) が X で連続関数でない.

そこで例題 32.43 が簡単に証明できる.

例題 32.43 の別証明: 関数列 $f_n(x)=x^n$ は定義域 [0,1] で連続関数であり, $g(x)= \begin{cases} 0 & (\text{if } 0 \leq x < 1) \\ 1 & (\text{if } x=1) \end{cases}$ に 各点収束するが、g(x) は x=1 で不連続なので、[0,1] で連続関数ではない。前系 (ii) より、関数列 $f_n(x)$ は 一様収束しない.

32.10 関数列の収束とテイラー展開可能性

(3.1) 式から,a を含む開区間 I で定義された関数 f(x) が, C^{∞} 級のとき,テイラーの公式から,任意の整数 n について,ある $\lambda_n \in (0,1)$ が存在して,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}((1-\lambda_n)x + \lambda_n a)}{n!} (x-a)^n$$
 (32.21)

が成り立つ. よってテイラー展開可能であることは,

(i). ある $\delta > 0$ があって、 $|x-a| < \delta$ ならば、それぞれの n について、ある $\lambda_n \in (0,1)$ が存在して、

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f^{(n)}((1 - \lambda_n)x + \lambda_n a)}{n!} (x - a)^n = 0$$
 (32.22)

ただし λ_n は,各 n について (32.21) 式を満たすものである.

(ii).
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \text{ O収束半径 } R \text{ が正であること } (つまり \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}} < \infty)$$

の 2 つが成り立つときである。実際このとき, $|x-a|<\min(\delta,R)$ の範囲で $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ が存在するので,f(x) は a でテイラー展開可能となる.

しかし (i) の条件では, λ_n は定数ではなく n の関数である.n に応じて λ_n が決めるところまで考えるのはかなり無理がある.そこで前節の関数列の一様収束を用いて,そこまで考慮しないで済む十分条件を作る.一様収束の ϵ 論法は数列のそれと同様なので,以下が言える.

補題 32.46 数列 $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ が $c_n\geq 0$, $\lim c_n=0$ を満たし、定義域が \boldsymbol{X} の関数列 $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ と、 \boldsymbol{X} を定義域とする関数 f(x) について、任意の n で $|f_n(x)-f(x)|\leq c_n$ を満たすとする.このとき $f_n(x)$ は f(x) に一様収束する.

定理 3.9 の証明 :

仮定 $|f^{(n)}(x)| < cM^n$ より, 任意の n について

$$\left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right| \le \frac{cM^n}{n!}$$

$$\to 0 \quad (n \to \infty)$$

なので,前補題より関数列 $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ は 0 に一様収束する.その結果, $(\frac{32.21})$ を満たす λ_n を含めて,任意の $\lambda_n\in(0,1)$ について, $(\frac{32.22})$ 式が成り立つ.

同じく仮定 $|f^{(n)}(x)| \leq cM^n$ から,

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}} \le \limsup_{n \to \infty} \frac{c^{1/n}M}{(n!)^{1/n}}$$
$$= 0$$

が成り立つので、上の (ii) の条件が成り立つ. 以上より、定理 3.9 が成り立つ.

32.11 三角関数の定義

一般に三角関数では変数を x ではなく θ にすることが多いので、ここでもそのようにする.また誤解がない時は、 $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ ではなく、 $\sin\theta$, $\cos\theta$ と書く.

15.2 節では $\cos\theta$, $\sin\theta$ を高校の方式で定義した、そこでは、 $\lim_{x\to 0}\sin(x)/x$ を示すときに、 $\cos(x)$ の x=0 での連続性を仮定している。しかし本来それは証明されていないことである。なのである意味、高校方式の三角関数は感覚的なものである $\frac{32.3}{2}$. この節ではそれを取り払い、きちんと定義することが目的である.

そこで実数全体で定義された θ の 2 つの関数 $c(\theta)$, $s(\theta)$ が C^{∞} 級で、かつ以下を満たすとする.

(i).
$$c(0) = 1, s(0) = 0$$

(ii).
$$c'(\theta) = -s(\theta), s'(\theta) = c(\theta)$$

(ii) について少し述べよう.これは高校方式の定義の場合では $\lim_{x\to 0}\sin(x)/x$ を既知とし,そこから今まで $\{\cos(\theta)\}' = -\sin(\theta), \{\sin(\theta)\}' = \cos(\theta)$ を導出したものである.

が、大学ではこのように、先に導関数を定義しておくのである^{32.4}. 2 階導関数をそれぞれ求めると、

$$c''(\theta) = -s'(\theta) = -c(\theta)$$

$$s''(\theta) = c'(\theta) = -s(\theta)$$

となる. 微分方程式の形で書くと,

$$\lceil y''(\theta) + y(\theta) = 0, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0 \rfloor \ \text{の解か } c(\theta)$$
 (32.23)

$$\lceil y''(\theta) + y(\theta) = 0, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1 \rfloor \ \mathcal{O}解か s(\theta)$$
 (32.24)

(32.25)

このような 2 つの C^{∞} 級の関数を探し、それぞれ $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ とするのである.

そこで仮に $c(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta^n$ と整関数で表されるとしよう. $c(0) = a_0 = 1$ である. 整関数の項別微分可能

性より,
$$c'(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n\theta^{n-1}$$
 から $c'(0)=a_1=0$. さらに

$$c''(\theta) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n \theta^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} \theta^n$$

となるので、 $c''(\theta) = -c'(\theta)$ であり、 θ の係数を比較することによって $a_n = -(n+2)(n+1)a_{n+2}$ つまり、

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)}a_n \tag{32.26}$$

が成り立つ. $a_1=0$ から、明らかに $a_1=a_3=a_5=\cdots=0$ が成り立つ. つまり 0 以上の整数 n について $a_{2n+1}=0$. a_{2n} については、順々に考えて、

$$a_0 = 0, a_2 = -\frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{4!}, a_6 = -\frac{1}{6!}, a_8 = \frac{1}{8!}, \cdots$$

^{32.3} 感覚的なものを軽んじているわけではない. 証明されていなくても, 感覚というものは非常に重要であると, 個人的には思っている.

^{32.4} よって加法定理はその後証明する必要がでてくる.

となる. 数学的帰納法より, $a_{2n}=(-1)^n\frac{1}{(2n)!}$ が言える. 従って,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \theta^{2n}$$

が (32.23) 式の $c(\theta)$ の候補である。そしてこの微分方程式の場合,解が存在すればそれは唯一であるので (市販の微分方程式のテキストを参照のこと),これを $\cos(\theta)$ と定義する.

整関数なので、収束半径を求めよう.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(-1)^n \frac{1}{(2n)!} \theta^{2n}| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} |\theta|^{2n}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |\theta|^n$$

$$= \exp(|\theta|) < \infty$$

なので,任意の θ について $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \theta^n$ を級数と見たときは,絶対収束級数となる.すなわち,この整 関数の収束半径は ∞ である.

同様に $s(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\theta^n$ とすると, $a_0=0,a_1=1$ と (32.26) 式から, $a_0=a_2=a_4=\cdots=0$ と, $a_{2n+1}=(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}$ である.従って

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \theta^{2n+1}$$

が (32.24) 式の $s(\theta)$ の候補であり、これ以外に微分方程式の解が存在しないことも同様である.以上より、

定義 32.47 実数全体を定義域とする関数 $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ を以下のように定義する.

$$\cos(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

 θ について、 $\cos\theta$ が偶関数であり、 $\sin\theta$ が奇関数であることは明らかである.

定義 32.48 実数 θ について, $\tan \theta$ を

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

と定義する. $\cos(\theta) = 0$ のときは $\tan(\theta)$ は定義されない.

 $\cos(\theta), \sin(\theta)$ は、指数関数 $\exp(x)$ と非常に関係が深い.

$$\exp(\theta) = 1 + \theta + \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \frac{1}{6!}\theta^6 + \cdots$$
 (32.27)

の右辺から、 θ のべきが偶数のものをとりだし、

$$1 + \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{6!}\theta^6 + \frac{1}{8!}\theta^8 + \cdots$$
 (32.28)

この順で偶数項の係数を -1 倍して

$$1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \frac{1}{8!}\theta^8 + \cdots$$

これが $\cos(\theta)$ となる.

 $\sin(\theta)$ についても、(32.27) 式の右辺から θ のべキが奇数のものを取り出し、

$$\theta + \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \frac{1}{7!}\theta^7 + \frac{1}{9!}\theta^9 + \cdots$$
 (32.29)

この順で偶数項の係数を -1 倍して

$$\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \frac{1}{9!}\theta^9 + \cdots$$

これが $\sin(\theta)$ となる.

 $\cos(\theta)$ が偶関数で、 $\sin(\theta)$ が奇関数となるのは明らか。

また (32.28) 式を $\cosh(\theta) = \frac{\exp(\theta) + \exp(-\theta)}{2}$, (32.29) 式を $\sinh(\theta) = \frac{\exp(\theta) - \exp(-\theta)}{2}$ と定義する. とはいえこれら 2 つの関数は、経済学ではあまり出てこない.

32.12 三角関数の性質

この節での命題や定理は、全て高校で出てきたはずであり既知ではあろうが、それは高校での定義を元にしていた。前節で改めて定義した (定義 32.47) ので、そこから性質を導くものとする。誤解がないときには、 $\cos(\theta),\sin(\theta)$ を $\cos\theta,\sin\theta$ とする。また n が正整数のとき、 $\{\cos\theta\}^n,\{\sin\theta\}^n$ をそれぞれ $\cos^n\theta,\sin^n\theta$ と書く。

命題 32.49 任意の実数 θ について,

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

証明 合成関数の微分から,

$$\{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta\}' = 2\cos \theta \{\cos \theta\}' + 2\sin \theta \{\sin \theta\}'$$
$$= -2\cos \theta \sin \theta + 2\sin \theta \cos \theta$$
$$= 0$$

よって、ある実数 C があって、任意の θ について、

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = C$$

が成り立つ. 左辺に $\theta=0$ を代入すると, $\cos 0=1, \sin 0=0$ より C=1 がいえて、命題が成り立つ.

定理 32.50 (加法定理) 任意の実数 α, β について複合同順で以下が成り立つ.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

証明 同様に証明できるので、 $\sin(\alpha \pm \beta)$ の式のみ証明する $\sin \theta$ は R でテイラー展開可能 (定理 3.9 で M=1) かつ、収束半径が ∞ なので、 $\theta=\alpha$ のまわりで展開すると、

$$\begin{split} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha + \frac{\sin^{(1)}(\alpha)}{1!}\beta + \frac{\sin^{(2)}(\alpha)}{2!}\beta^2 + \frac{\sin^{(3)}(\alpha)}{3!}\beta^3 + \frac{\sin^{(4)}(\alpha)}{4!}\beta^4 + \cdots \\ &= \sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{1!}\beta - \frac{\sin\alpha}{2!}\beta^2 - \frac{\cos\alpha}{3!}\beta^3 + \frac{\sin\alpha}{4!}\beta^4 + \cdots \\ &\text{解説:} \quad \beta \text{ について絶対収束するので、和の順序を変えてよいので} \\ &= \sin\alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta^{2n}}{(2n)!} + \cos\alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{split}$$

 β に $-\beta$ を代入すれば、 $\sin \theta$ の奇関数性と $\cos \theta$ の偶関数性から、

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)$$
$$= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

がいえる. また $\cos\theta$ の加法定理も同様にして得られる (省略する).

tan の加法定理は以下になる.

系 32.51 任意の α , β について, 複合同順で

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

倍角の公式が加法定理から得られるのは、 高校と同様である.

系 32.52 (倍角の公式) 任意の θ について,

(i).
$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

(ii). $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

(iii).
$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

交代級数と三角関数と π の定義 32.13

絶対収束しない級数でも、収束する級数は存在する、特に重要なものは、先の三角関数のような、各項の符 号が交代するものである.

┙

定義 32.53 n_0 はある整数とする. 数列 $\{a_n\}_{n=n_0}^\infty$ が, $a_n>0$ かつ単調減少で $\lim a_n=0$ となるものとす る. このとき, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ で表されるものを,交代級数という.

各項の符号が交代しているのみでなく,各項の係数の絶対値が単調減少して0に収束していることに注意す ること. 以下では主に $n_0 = 0$ と中心にして述べている.

定理 32.54 交代級数は収束する.

証明 級数は n=0 からはじめるものとして $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ が交代級数としても一般性は失わないので、こ

う仮定する. 部分和 $S_k = \sum_{n=0}^k a_n$ について,

$$S_{2(k+1)} - S_{2k} = -a_{2k+1} + a_{2k+2}$$

$$\leq 0$$

から数列 S_{2k} は k について単調減少数列である. 同様に数列 S_{2k+1} は k について単調増加数列である. $S_{2k+1} - S_{2k} = -a_{2k+1} \le 0$ から $S_{2k+1} \le S_{2k}$ なので,

$$S_1 \le S_3 \le \dots \le S_{2k+1} \le \dots \le S_{2k} \le \dots \le S_2 \le S_0$$
 (32.30)

であり、数列 S_{2k} は下に有界な単調減少数列で、数列 S_{2k+1} は k について単調増加数列である.よって実数 $\lim_{k \to \infty} S_{2k}$ に収束する.同様に $S_{2k+1} \leq S_{2(k+1)+1} \leq S_0$ がいえるので,数列 S_{2k+1} は k に関して上に有界な 単調増加数列である.よってある実数 $\lim_{k \to \infty} S_{2k+1}$ に収束する.一方

$$|S_{2k+1} - S_{2k}| = |a_{2k+1}|$$

$$\to 0 \quad (k \to \infty)$$

なので, $\lim_{k\to\infty}S_{2k}=\lim_{k\to\infty}S_{2k+1}$ である.これを α とする. $\lfloor x\rfloor$ は,実数 $x\geq 0$ の小数第 1 位を切り捨てた整数を表すものとする.このとき.

$$S_{2|n/2|+1} \le S_n \le S_{2|n/2|}$$

が成り立つ (n) が偶数の場合と奇数の場合で確認するとよい $).n \to \infty$ を取ると, はさみうちの原理より S_n も α に収束する. 従って命題が成り立つ.

系 32.55 交代級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ の収束値を α とする.このとき任意の k について,以下が成り立つ.

$$\sum_{n=0}^{2k+1} a_n \le \alpha \le \sum_{n=0}^{2k} a_n$$

前節の $\sin\theta$ や $\cos\theta$ は θ の絶対値が小さいときに,n=0 から交代級数となっている. θ の絶対値が大きい 場合でも、ある項以降からは交代級数となっていることを次の補題で用いている.

250

補題 32.56 $\cos 2 < 0$

証明 $a_n = \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$ とおくと, $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ と書ける. $\cos \theta$ は収束半径 ∞ の θ の整関数な ので、 $\lim a_n = 0$. また、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\theta^{2n+2}}{(2n+2)\cdot(2n)!} \frac{(2n)!}{\theta^{2n}}$$
$$= \frac{\theta^2}{2n+2}$$

より, $\theta=2$ かつ $n\geq 2$ では, $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq \frac{4}{6}<1$ より $a_{n+1}< a_n$ となり, a_n は単調減少.従って, $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}$ は交代級数であり、前系よりこれは $\frac{2^{2\cdot 2}}{(2\cdot 2)!}$ 以下である.以上より, $\cos 2 \leq 1-2+\frac{2^{2\cdot 2}}{(2\cdot 2)!}=-1/3$ が言える

補題 32.57 $0 < \theta < 2$ のとき, $\sin \theta > 0$

 $b_n=rac{ heta^{2n+1}}{(2n+1)!}$ とおくと, $\sin heta=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nb_n$ と書ける. $\sin heta$ は収束半径 ∞ の heta の整関数なので, $\lim b_n=0$.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\theta^{2n+3}}{(2n+3) \cdot (2n+1)!} \frac{(2n+1)!}{\theta^{2n+1}}$$
$$= \frac{\theta^2}{2n+3}$$

 $0<\theta<2$ かつ $n\geq 1$ のとき, $rac{ heta^2}{2n+3}<1$. つまり $b_{n+1}< b_n$ となる.よって, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n rac{ heta^{2n+1}}{(2n+1)!}$ は,交 代級数となる. 従って前系より

$$\sin \theta > b_0 - b_1 = \theta - \frac{\theta^3}{6}$$
$$= \frac{1}{6}\theta(\sqrt{6} + \theta)(\sqrt{6} - \theta) > 0$$

補題 32.58 $0 < \alpha < 2$ を満たす α で, $\cos \alpha = 0$ となるものが 1 つのみ存在する.

証明 $\cos 0 = 1, \cos 2 < 0$ と中間値の定理より, $\cos \alpha = 0$ となる点 α が存在する.前補題より $0 < \theta < 2$ で、 $\{\cos(\theta)\}' = -\sin\theta < 0$ なので、この範囲で $\cos\theta$ は狭義単調減少関数である.従って $0 < \theta < 2$ で $\cos \theta = 0$ となる θ は、 α 以外存在しない.

解析学での π の定義は、前補題の α を $\pi/2$ とすることである.

定義 32.59 $\theta > 0$ とする. $\cos \theta = 0$ を満たす θ の最小値を $\pi/2$ とする.

251

 \Box

 π や今までの定理・命題・補題・系を組み合わせると、以下が成り立つ。

命題 32.60 $\cos \theta, \sin \theta$ について,

- (i). $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ のとき, $\cos \theta$ は狭義単調減少関数で, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$
- (ii). $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\sin \theta$ は狭義単調増加関数で、 $\sin \frac{\pi}{2} = 1$
- (iii). $\cos \pi = -1, \sin \pi = 0$
- (iv). n が整数のとき,

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$$
, $\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$, $\tan(\theta + n\pi) = \tan\theta$

区間を表す [a,b] や (a,b) の場合は、2 つの実数の定数 a < b を仮定しているとは、今までと同じである.

33 1変数の積分

区間を表す [a,b] や (a,b) の場合は、2 つの実数の定数 a < b を仮定しているとは、今までと同じである.

33.1 区間の分割・過剰和・不足和・リーマン和

区間 [a,b] を n 個に分割した小区間を作り、その中での上限や下限などを用いて、「面積」を n 個の長方形の和として考えるのが、この節での目的である。まずは有界閉区間 [a,b] の分割である。

定義 33.1 (i). 有界閉区間 [a,b] について, $n \ge 1$ の整数としたときに

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

を満たす,順序付きの n+1 個の実数を P で表し,これを [a,b] の分割という. またその x_0,x_1,\cdots,x_n を P の分点という. その分点で作られる n 個の有界閉区間 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$ を,分割 P による小区間という.

- (ii). [a,b] の分割 P 全体の集合を $P_{[a,b]}$ もしくは単に P と表す.
- (iii). [a,b] の分割 $P \in \mathbf{P}$ が与えられたとき、P の幅を以下で定義する.

$$d(P) = \max_{i=1,2,\dots,n} (x_i - x_{i-1})$$

n は 1 以上の整数なら何でもよいが、必ず有限であることがポイントである。また P,d を使ったのは、英語で partition(分割) と diameter(直径) からである。次に、分割 P が与えられたときに、その過剰和と不足和を定義する。

定義 33.2 [a,b] のある分割 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathbf{P}$ について,

(i). 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ について、f(x) の上限をとったものを M_i とする. すなわち

$$M_i = \sup\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

_

である.この M_i に各区間の幅 $(x_i - x_{i-1})$ を掛けて加えたもの

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \tag{33.1}$$

を,分割Pについてのfの上限和または過剰和といい,このレジュメでは, $s_H(P,f)$ で表す.

(ii). 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ について,f(x) の下限をとったものを m_i とする.すなわち

$$m_i = \inf\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

である. この m_i に各区間の幅 $(x_i - x_{i-1})$ を掛けて加えたもの

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \tag{33.2}$$

を、分割 P についての f の下限和または不足和といい、このレジュメでは、 $s_L(P,f)$ で表す。

例題 33.3 $\ [0,1]$ で定義された単調増加関数 $f(x)=x^2$ と,分割 $P=\{0,1/3,2/3,1\}$ についての,f の過剰 和と不足和を求めよ.

(解答) f(0) = 0, f(1/3) = 1/9, f(2/3) = 4/9, f(1) = 1 より、

$$s_H(P, f) = (1/9)(1/3 - 0) + (4/9)(2/3 - 1/3) + 1(1 - 2/3) = 14/27$$

 $s_L(P, f) = 0(1/3 - 0) + (1/9)(2/3 - 1/3) + (4/9)(1 - 2/3) = 5/27$

が言える.

(解答終)

数列 a_n について, $\sup_{k\geq n}a_k$ が n について単調減少だったように,過剰和も分割が増えると単調減少になることを示そう.

定義 33.4 有界閉区間 [a,b] についての,2 つの分割 P,Q を考える.

- (i). 全ての Q の分点が,P の分点に含まれるとき,Q は P の細分であるといい, $P \subset Q$ で表す.
- (ii). P の分点と Q の分点を, すべて含む分割を P,Q の合併といい, $P \cup Q$ で表す.

命題 33.5 有界閉区間 [a,b] についての,2 つの分割 P,Q を考える。[a,b] での任意の有界関数 f(x) について,以下が成り立つ。

$$s_L(P, f) \le s_L(P \cup Q, f) \le s_H(P \cup Q, f) \le s_H(P, f)$$

証明は、以下のように例題 33.3 に 1/2 を加えることで理解できるであろう.

例題 33.6 [0,1] で定義された単調増加関数 $f(x)=x^2$ と、分割 $P=\{0,1/3,2/3,1\}$ と分割 $Q=\{0,1/2,1\}$ について、分割 $P\cup Q$ についての、f の過剰和と不足和を求めよ、さらに例題 33.3 の結果と比較せよ、 」

253

٦

(解答) f(0) = 0, f(1/3) = 1/9, f(1/2) = 1/4, f(2/3) = 4/9, f(1) = 1 より、

$$s_H(P \cup Q, f) = (1/9)(1/3 - 0) + (1/4)(1/2 - 1/3) + (4/9)(2/3 - 1/2) + 1(1 - 2/3) = 35/72 < 14/27$$

 $s_L(P \cup Q, f) = 0(1/3 - 0) + (1/9)(1/2 - 1/3) + (1/4)(2/3 - 1/2) + (4/9)(1 - 2/3) = 5/24 > 5/27$

P の小区間の 1 つである [1/3,2/3] が, $P\cup Q$ では [1/3,1/2] と [1/2,1/3] に分けられた.その結果 [1/3,2/3] での上限が f(2/3)=4/9 であったところが,[1/3,1/2] での上限は f(1/2)=1/4< f(2/3) となった. [1/2,2/3] での上限は f(2/3) で変わらなかったが,その結果 $P\cup Q$ での過剰和が P での過剰和よりも減少した.

不足和についても,[1/3,2/3] での下限が f(1/3)=1/9 であったところが,[1/2,2/3] での下限は f(1/2)=1/4>f(1/3) となった.[1/3,1/2] での下限は f(1/3) で変わらなかったが,その結果 $P\cup Q$ での不足和が P での不足和よりも増加した.

(解答終)

 $P \cup Q$ は P の細分となっているので、以下が簡単に言える.

命題 33.7 f(x) は [a,b] で有界関数とする. [a,b] の 2 つの分割 P,Q についての過剰和と不足和について以下が言える

- (i). $P \subset Q$ \Leftrightarrow \sharp , $s_H(P,f) \geq s_H(Q,f)$.
- (ii). $P \subset Q$ ならば、 $s_L(P, f) \leq s_L(Q, f)$.
- (iii). $s_L(P, f) \leq s_H(Q, f)$.

(i)(ii) は明らか. (iii) も P,Q の合併を考えると,

$$s_L(P, f) \le s_L(P \cup Q, f) \le s_H(P \cup Q, f) \le s_H(Q, f)$$

が成り立つので明らか.

(i)(ii) を見ると、分点を増加させると、 s_H は減少し、 s_L は増加している。これは数列 a_n でいうところの $\sup_{k\geq n}a_k,\inf_{k\geq n}a_k$ の役割と似ていることがわかるであろう。そこで a_n そのものに似ているものを定義するのが 次である。それは分割の各小区間での代表点を決めて、それに区間の幅を掛けて加えるというものである。

定義 33.8 (リーマン和) $f \in B_{[a,b]}$ とする。[a,b] のある分割 $P = \{x_0,x_1,\cdots,x_n\} \in \mathbf{P}$ について,各小区間 $[x_{i-1},x_i]$ の中の点から 1 つずつとり出した点 $u_i(i=1,2,\cdots,n)$ を,分割 \mathbf{P} の代表点と呼ぶ。n 個の代表点をまとめて, \mathbf{u} と表す。このとき, $f(u_i)$ に各区間の幅 (x_i-x_{i-1}) を掛けて加えたもの

$$\sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{33.3}$$

を、分割Pについてのfの1つのリーマン和といい、このレジュメでは以下で表す。

$$s(P, f, \boldsymbol{u})$$

例題 33.9 [0,1] で定義された単調増加関数 $f(x)=x^2$ と,分割 $P=\{0,1/3,2/3,1\}$ についての,リーマン 和 $s(P,f,\{0,1/2,1\})$ を求め,例題 33.3 の結果と比較せよ.

(解答) f(0) = 0, f(1/2) = 1/4, f(1) = 1 より,

$$s(P, f, \{0, 1/2, 1\}) = 0(1/3 - 1/2) + (1/4)(2/3 - 1/3) + 1(1 - 2/3) = 5/12$$

例題 33.3 の結果と比較すると $s_L(P,f) < s(P,f,\{0,1/2,1\}) < s_H(P,f)$ が言える.

(解答終)

このように、どのような代表点 u をとっても、 $s_L(P,f) \leq s(P,f,u) \leq s_H(P,f)$ が成り立つ。このリーマン和を用いて、積分を定義する.

定義 33.10 (リーマン可積分の定義) f(x) が [a,b] で有界とする。任意の $\epsilon>0$ について,[a,b] のある分割 $P_0=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\in \textbf{\textit{P}}$ が存在し,この分割の下での任意の代表点 $u_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ について,

$$|s(P_0, \boldsymbol{u}) - A| < \epsilon \tag{33.4}$$

となる実数 A が存在するとき,「f は [a,b] で積分可能である」,もしくは「f は [a,b] で可積分である」という. さらにこの A を

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

で表し、[a,b] での f の定積分や、f の [a,b] での定積分値という.

リーマン可積分性を数列の収束と比較して、式で書いたものが以下である。ある分割 P の下でとりうる代表点の集合を U(P) と書くとする。

 a_n が α に収束する表現は, $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|a_n - \alpha| < \epsilon$ f(x) が [a,b] で可積分である表現は, $\forall \epsilon > 0$, $\exists P \in \mathbf{P}$, $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}(P)$, $|s(P,f,\mathbf{u}) - A| < \epsilon$ このように, 相当似ている. また積分の変数を x であらわしたが, 別に,

$$\int_{a}^{b} f(t)dt, \int_{a}^{b} f(y)dy$$

と他の変数で表しても構わない.

33.2 区間の分割・過剰和・不足和・上積分・下積分

前節でリーマン和や過剰和・不足和を数列で例えた.下記 $1\sim4$ がそれである.この節では続きの 5 と 6 で 例えた,上積分・下積分の定義を行う.

	数列	[a,b] での有界関数 $f(x)$ と分割 P について
$\overline{(1)}$.	a_n	リーマン和 $s(P, f, \boldsymbol{u})$
(2).	$\sup_{k>n} a_n$	過剰和 $s_H(P,f)$
(3).	$\inf_{k \ge n} a_n$	不足和 $s_L(P,f)$
(4).	$\lim_{n\to\infty} a_n$	定積分 $\int_a^b f(x)dx$
(5).	上極限 $\limsup_{k>n} a_n = \inf_{n\geq 0} \sup_{k>n} a_n$	過剰和の下限 $\inf_{P \in \mathbf{P}} s_H(P, f)$
		不足和の上限 $\sup_{P \in \mathbf{P}} s_L(P,f)$

上の (2) の過剰和についてもう一度考えてみる。 2 つの分割 P,Q について,P が Q の細分となっているとする。 $m=\inf_{x\in[a,b]}f(x)$ とすると,

$$P \supset Q \Longrightarrow s_H(Q, f) \le s_L(P, f) \le m(b - a)$$

が成り立つ. よって実数の連続性より、分割 Q が所与のとき、下限

$$\inf_{P\supset Q} s_H(P,f)$$

が存在する. Q を [a,b] を分割しない $\{a,b\}$ と考えると, [a,b] についての分割の集合 $\textbf{\textit{P}}$ としたとき,

$$\inf_{P \in \mathbf{P}} s_H(P, f)$$

が存在する. これを上積分と定義する.

定義 33.11 [a,b] で定義された有界関数 f(x) と [a,b] の分割 P について

(i). P についての過剰和の下限を上積分といい, $\int_a^b f(x)dx$ で表す.式で書くと,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \inf_{P \in \mathbf{P}} s_{H}(P, f)$$

(ii). P についての不足和の上限を下積分といい, $\int_a^b f(x)dx$ で表す.式で書くと,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \sup_{P \in \mathbf{P}} s_{L}(P, f)$$

明らかに $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$ である.

この $\int_a^b f(x)dx$ の作り方では、ある分割 P_1 からの細分から、 $\int_a^b f(x)dx$ の値が得られるとは限らない.しかし、次のダルブーの定理から、分割の直径を十分短くさえすれば、 $\int_a^b f(x)dx$ の値が得られることが言える.

定理 33.12 (ダルブーの定理) [a,b] で定義された有界関数 f(x) を考える. 任意の $\epsilon>0$ について,ある $\delta>0$ が存在して, $d(P)<\delta$ を満たす任意の分割 P について

(i).
$$s_H(P, f) < \int_a^b f(x)dx + \epsilon$$

(ii).
$$\int_{a}^{b} f(x)dx - \epsilon < s_{L}(P, f)$$

が存在する.

証明 (i) の場合のみ証明する.

f の仮定より、任意の $x \in [a,b]$ について、 $|f(x)| \leq M$ をみたすある M > 0 が存在する. 上積分の定義より、任意の $\epsilon > 0$ について、ある分割 $P_0 = \{x_0, \dots, x_n\}$ が存在して、

$$s_H(P_0, f) - \int_0^b f(x)dx < \epsilon/2 \tag{33.5}$$

がいえる. n 個の P_0 の小区間の中で、その幅の最小値を w とする. 次に

$$\delta = \min\left(w, \frac{\epsilon}{4Mn}\right)$$

として、 $d(P)<\delta$ を満たす任意の分割 P をとり、 $P=\{y_0,y_1,\cdots,y_l\}$ とする. まず、(33.5) 式より、

$$s_H(P_0 \cup P, f) - \int_a^b f(x)dx < \epsilon/2 \tag{33.6}$$

がいえる.

次に、P の各小区間の幅 $y_j - y_{j-1}$ は w より小さいので、P の各小区間の内部 (y_{j-1}, y_j) には、 P_0 の分点が含まれないか、1 つのみ含まれているかのいずれかである。そこで、P の小区間の内部 (y_{j-1}, y_j) に、 P_0 の分点が含まれていない j の集合を J_1 とする。含まれる場合の j の集合を J_2 とする。

定義より, $j \in J_2$ について, 第 j 小区間の内部 (y_{j-1}, y_j) に, ある 1 つの i が定まって, x_i が含まれているので, その i の値を, i(j) とする. また J_2 に含まれる j の個数は, n 以下である.

以上をもとに、 $S_H(P,f) - S_H(P \cup P_0,f)$ を評価する. $j \in J_1$ の区間については、ある i が存在して、

$$x_{i-1} \le y_{j-1} < y_j \le x_i$$

となる.よってこの j についての分割 P の小区間 $[y_{j-1},y_j]$ が, $P\cup P_0$ の 1 つの小区間と一致するので, $S_H(P,f)-S_H(P\cup P_0,f)$ の評価するときに,この区間では 0 となる.よって, $j\in J_2$ のときのみ考えればよい.

 $j \in J_2$ のときは,

$$x_{i(j)-1} \le y_{j-1} < x_{i(j)} < y_j \le x_{i(j)+1}$$

が成り立つので結局,

$$\begin{split} &S_H(P,f) - S_H(P \cup P_0,f) \\ &= \sum_{j \in J_2} \{ (\sup_{x \in [y_{j-1},y_j]} f(x))(y_j - y_{j-1}) - \sum_{j \in J_2} (\sup_{x \in [y_{j-1},x_{i(j)}]} f(x))(x_{i(j)} - y_{j-1}) - \sum_{j \in J_2} (\sup_{x \in [x_{i(j)},y_j]} f(x))(x_{i(j)} - y_{j-1}) \\ &= \sum_{j \in J_2} \{ (\sup_{x \in [y_{j-1},y_j]} f(x)) - (\sup_{x \in [y_{j-1},x_{i(j)}]} f(x)) \} \cdot (x_{i(j)} - y_{j-1}) \\ &+ \sum_{j \in J_2} \{ (\sup_{x \in [y_{j-1},y_j]} f(x)) - (\sup_{x \in [x_{i(j)},y_j]} f(x)) \} \cdot (y_j - x_{i(j)}) \\ &\leq 2M \sum_{j \in J_2} (x_{i(j)} - y_{j-1}) + 2M \sum_{j \in J_2} (y_j - x_{i(j)}) \\ &= 2M \sum_{j \in J_2} (y_j - y_{j-1}) \\ &\leq 2M \sum_{j \in J_2} \delta \\ &\leq 2Mn\delta \\ &< \epsilon/2 \end{split}$$

(33.6) 式と合わせて,

$$S_H(P,f) - \int_a^b f(x)dx = \{S_H(P,f) - S_H(P \cup P_0, f)\} + \left\{S_H(P \cup P_0, f) - \int_a^b f(x)dx\right\}$$

33.3 リーマン和と可積分条件

数列について以下は全て同値である.

- (i). 数列 a_n が実数に収束する.
- (ii). a_n が有界でかつ、任意の $\epsilon>0$ について、ある n_0 が存在して、 $\sup_{k>n_0}a_k-\inf_{k\geq n_0}a_k<\epsilon$
- (iii). $\limsup a_n = \liminf a_n$ が実数で成り立つ.
- (iv). a_n がコーシー列である.

これが積分でも同様に成り立つ.

定理 33.13 (リーマン可積分条件) $f \in B_{[a,b]}$ とする. 以下は同値である.

- (i). f が [a,b] で可積分である.
- (ii). 任意の $\epsilon > 0$ について,ある分割 $P_0 \in \mathbf{P}$ が存在して

$$s_H(P_0, f) - s_L(P_0, f) < \epsilon$$

(iii).
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{-b} f(x)dx$$

(iv). 任意の $\epsilon > 0$ について,ある分割 $P_0 \in \mathbf{P}$ が存在して, $P \supset Q \supset P_0$ を満たす任意の分割 P,Q のもとで,それぞれの任意の代表点 \mathbf{u},\mathbf{v} を使った 2 つのリーマン和 $s(P_0,\mathbf{u}),s(P_0,\mathbf{v})$ が,下の式を満たす

$$|s(P, f, \boldsymbol{u}) - s(Q, f, \boldsymbol{v})| < \epsilon$$

.

証明 (i) ならば (iv) の証明は、「数列が収束するならば、コーシー列である」と同様の証明を行えば良い。

- (iv) ならば (iii) の証明は、「数列がコーシー列ならば、上極限と下極限がある実数で一致する」ことと同様の証明を行えば良い.
 - (iii) と (ii) が同値なのは明らか.
- (iii) ならば (i) の証明は、「数列 a_n が $\limsup a_n = \liminf a_n = \alpha$ ならば、 a_n は α に収束する」ことと同様の証明を行えば良い.

定理 33.14 [a,b] で定義された有界関数 f(x) について,

- (i). f(x) が [a,b] で可積分ならば、任意の $c \in (a,b)$ について、2 つの有界閉区間 [a,c],[c,b] で、f(x) はそれぞれ可積分である.
- (ii). ある $c \in (a,b)$ が存在して、2 つの有界閉区間 [a,c],[c,b] でともに f(x) が可積分ならば、f(x) は [a,b] で可積分である.

┙

証明

(i) は明らかなので、(ii) のみ証明する. c を含む [a,b] の分割 $P=\{a,\cdots,c,\cdots,b\}$ について、[a,c],[c,b] における過剰和をそれぞれ、 $s_H^{[a,c]}(P,f),s_H^{[c,b]}(P,f)$ とする. 不足和についても同様に、それぞれ $s_L^{[a,c]}(P,f),s_L^{[c,b]}(P,f)$ で表す.

[a,c], [c,b] の可積分性より,[a,b] で c を含むある分割 P_0 が存在して,

$$\begin{split} s_H^{[a,c]}(P_0,f) - s_L^{[a,c]}(P_0,f) &< \epsilon/2 \\ s_H^{[c,b]}(P_0,f) - s_L^{[c,b]}(P_0,f) &< \epsilon/2 \end{split}$$

の 2 式が成り立つ. 従って, [a,b] である分割 P_0 が存在して, 過剰和と不足和の差が

$$s_H(P_0, f) - s_L(P_0, f) < \epsilon$$

前定理の(i)(ii)の同値性より、f(x)は[a,b]で可積分である.

定義 33.15 [a,b] で定義された有界関数 f(x) について,

(i). 任意の $c \in [a,b]$ について, $\int_c^c f(x)dx = 0$

(ii).
$$\int_{b}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{b} f(x)dx$$

33.4 一様連続と微分積分学の基本定理

この節で証明したいことは, 高校のときに当たり前として考えていた, 以下の2つの定理である.

定理 33.16 [a,b] で定義された関数 f(x) が連続関数ならば、f(x) は [a,b] で可積分である

定理 33.17 (微分積分学の基本定理) 前定理の f(x) については, 原始関数 F(x) によって,

$$F'(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$$

で表される. さらに以下が成り立つ.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$
 (33.7)

これは一様連続性を用いて証明するので、一様連続について説明する. f(x) が区間 I で連続であるとは、

$$\forall \epsilon > 0, \forall c \in I, \exists \delta_c > 0, \forall x \in I : |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$$
(33.8)

いつも違って $\forall c \in I$ と $\forall x \in I$ を明示した上に, δ ではなく δ_c としたこの式でも,f(x) の I における連続性 に問題はない.連続関数のポイントは,点 c の値に応じて δ_c の値を変更してもよいということである.この点について δ_c を δ に戻して, $\forall c$ と $\exists \delta$ を入れ替えて c を g に変更して,説明しよう.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in I: |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$
 (33.9)

この場合だと、 δ さえ十分小さく取れば、I 内のどの点をとっても、 $|x-y|<\delta$ を満たせば |f(x)-f(y)|<0 を満たすこととなる。c に応じて δ_c の値を変更しても良かった (33.8) 式よりも、(33.9) 式の方が、より強い意味の連続性を持つこととなる。そこで、c を y に変えてこれを定義する。

定義 33.18 区間 I で定義された関数 f(x) が,(33.9) 式を満たすとき,f(x) は I で一様連続関数であるという.

すでに書いたことを改めて書いておくと.

命題 33.19 区間 I で定義された関数 f(x) が,I で一様連続関数ならば,I で連続関数である.

Iをだが有界閉区間とすれば、上の命題の逆が成り立つ。

定理 33.20 有界閉区間 [a,b] で定義された関数 f(x) が,[a,b] で連続関数ならば,[a,b] で一様連続関数である.

証明 背理法で証明するので、fが一様連続ではないと仮定する.よって、

$$\exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in [a, b], \exists y \in [a, b] : |x - y| < \delta$$
לים $|f(x) - f(y)| \ge \epsilon$

がいえる. したがって, ある $\epsilon_0 > 0$ について, $n \ge 1$ で定義されたある数列 x_n, y_n で,

$$a \le x_n \le b, \quad a \le y_n \le b \tag{33.10}$$

$$|x_n - y_n| < 1/n (33.11)$$

$$|f(x_n) - f(y_n)| \ge \epsilon_0 \tag{33.12}$$

を満たすようなものが存在する.

数列 y_n について (33.10) 式と、ボルツァーノ・ワイエルストラスの定理より、収束する部分列 y_{n_k} が存在する、収束値を α とすると、当然 $a \le \alpha \le b$ である.

部分列 y_{n_k} を作ったこの n_k と同じ n_k について, x_n の部分列を作ったものを x_{n_k} とする.(33.11) 式と y_{n_k} の収束から, x_{n_k} も α に収束する.

 x_{n_k} の収束と f(x) の連続性から,

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) - f(\alpha) = f(\alpha) - f(\alpha) = 0$$

がいえるが、これは (33.12) 式に矛盾する. よって f(x) は [a,b] で一様連続である.

定理 33.16 の証明:

最大・最小の定理より f(x) は [a,b] で有界であり,また定理 33.20 より一様連続である.従って任意の $\epsilon>0$ について,ある $\delta>0$ が存在して, $|x-y|<\delta$ を満たす任意の $x,y\in[a,b]$ について $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ が言える.

この ϵ,δ について, $d(P_0)<\delta$ を満たすような,[a,b] の分割 P_0 をとる.小区間は n 個あるものとする.各 小区間 $[x_i,x_{i+1}](i=0,1,\cdots,n-1)$ において,任意の $u,v\in[x_i,x_{i+1}]$ について $|f(u)-f(v)|<\epsilon$ が成り立っ.各小区間で上限と下限を考えて足し合わせ,過剰和と不足和

$$s_U(P_0) - s_L(P_0) \le n\epsilon$$

が成り立つ. n は ϵ とは無関係の正数である. これは任意の $\epsilon > 0$ について、上の式を満たすある分割 P_0 が存在することを意味するので、f(x) は [a,b] で可積分である.

定理 33.17 の証明:

仮定より任意の $x \in [a,b]$ で, $\int_a^x f(t)dt$ は存在するので,これを S(x) と置く. $x \in (a,b]$ として h は 0 に近い負の数 $(h \in [a-x,0))$ とすると,x+h < x より

$$S(x) - S(x+h) = \int_{x+h}^{x} f(t)dt$$

が成り立つ. 右辺について, 定積分の定義より以下が成り立つ。

$$\left(\inf_{t\in[x+h,x]}f(t)\right)(-h) \le \int_{x+h}^x f(t)dt \le \left(\sup_{t\in[x+h,x]}f(t)\right)(-h)$$

この2つの式より以下の不等式が成り立つ.

$$\left(\inf_{t\in[x+h,x]}f(t)\right)(-h) \le S(x) - S(x+h) \le \left(\sup_{t\in[x+h,b]}f(t)\right)(-h)$$

$$\iff \left(\inf_{t \in [x+h,x]} f(t)\right) \le \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \le \left(\sup_{t \in [x+h,b]} f(t)\right)$$

 $h \to -0$ の極限値を考えると、最左辺・最右辺ともに f(b) となるので、

$$\lim_{h \to -0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$$

 $x \in [a,b]$ として h は 0 に近い正の数 $(h \in (0,b-x])$ として、同様に考えると、

$$\lim_{h \to +0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$$

従って、S(x) は [a,b] で f(x) の原始関数である.

また S(a)=0 なので、f(x) の任意の原始関数 F(x) について、S(x)=F(x)-F(a) が成り立つ。x に b を代入すれば、S(b)=F(b)-F(a)

33.5 無限小・無限大での, o,O の定義と微分積分との関係

テイラーの公式を、sympy live で求めたときに O(または O) が出てきた.これを説明し、広義積分との関係を示す.

定義 33.21 R で定義された関数 f(x) が $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ のとき、f(x) は、 $x\to\infty$ のとき無限小であるという.

 $x \to \infty$ の代わりに, $x \to -\infty, x \to c, x \to c + 0, x \to c - 0$ などのときも同様に定義する. また定義域は \mathbf{R} 全体でなくとも, 例えば $x \to \infty$ の場合ならば, 区間 (a, ∞) であればよい.

定義 33.22 \mathbf{R} で定義された関数 f(x), g(x) が $x \to \infty$ のとき、ともに無限小とする.

(i). $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ のとき,

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to \infty)$$

と表し、f(x) と g(x) は同値な無限小であるという.

- (ii). $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\neq 0$ のとき、f(x) は g(x) と同位な無限小であるという.
- (iii). $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ のとき,

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to \infty)$$

と表し, f(x) は g(x) より小さい無限小であるという.

(iv). ある M>0 が存在して, $\lim_{x_0\to\infty}\sup_{x>x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leq M$ を満たすとき,つまりある x_0 が存在して, x_0 より大きい任意の x について $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ が有界のとき

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to \infty)$$

と表す. f(x) は g(x) で押さえられる無限小という.

明らかに、(i) ならば (ii) であり、(iii) ならば (iv) であり、(ii) ならば (iv) である。また $x\to\infty$ の代わりに、 $x\to-\infty, x\to c, x\to c+0, x\to c-0$ などのときも同様に定義する。また定義域は $\mathbf R$ 全体でなくとも、例えば $x\to\infty$ の場合ならば、区間 (a,∞) であればよいことも、前定義と同様である。

(iv) の「押さえられる」というのは、高々定数倍 (上では M 倍) で押さえることができるということである。 微分との関係では、sympy live で出てきたように、以下で表すことができる.

命題 33.23 (テイラーの公式の別表現) f(x) が (a,b) で n 階微分可能の時,任意の $c\in(a,b)$ で以下が成り立つ.

$$f(x) = f(c) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^{k} + O((x - c)^{n}) \quad (x \to c)$$

無限小の比では、コーシーの平均値の定理からド・ロピタルの定理が得られる.

定理 33.24 (ド・ロピタルの定理)

(i). (a,b) で定義された関数 f(x),g(x) がともに微分可能かつ, $x \to a + 0$ (resp. $x \to b - 0$) で無限小とす

る. また定義域でで $g(x) \neq 0$ とする. このとき, $x \rightarrow a + 0$ (resp. $x \rightarrow b - 0$) のとき

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \alpha \in \overline{R} \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \to \alpha$$

(ii). (a,∞) (resp. $(-\infty,b)$) で定義された関数 f(x),g(x) がともに微分可能かつ, $x\to\infty$ (resp. $x\to-\infty$) で無限小とする. また定義域で $g(x)\neq 0$ とする. このとき, $x\to\infty$ (resp. $x\to-\infty$) のとき,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \alpha \in \overline{R} \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \to \alpha$$

証明 同様にできるので, (i) の $x \to a + 0$ のときのみ証明する.

 $\alpha \in [-\infty,\infty)$ のときは、任意の $p>\alpha$ について、ある $x_0 \in (a,b)$ が存在して、任意の $x< x_0$ について $\frac{f(x)}{g(x)} < p$ である.よって、任意の x,y(ただし $a< y< x< x_0$) について、コーシーの平均値の定理より、ある y< c< x が存在して

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} < p$$

最左辺と最右辺について $y \rightarrow a + 0$ を取ると,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \le p$$

この両辺の $x \rightarrow a + 0$ への上極限を取ると

$$\lim_{x_1 \to a + 0} \sup_{x < x_1} \frac{f(x)}{g(x)} \le p$$

同様に $\alpha \in (\alpha, \infty]$ のときには、任意の $q < \alpha$ について、

$$q \le \lim_{x_1 \to a+0} \inf_{x < x_1} \frac{f(x)}{g(x)}$$

この2式より,

$$\lim_{x_1 \to a+0} \inf_{x < x_1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_1 \to a+0} \sup_{x < x_1} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

が言えるので、命題が成り立つ.

例えば、2つの関数 $\ln(1+x)$, x ともに $x \to +0$ のとき無限小である. このとき、

$$\frac{\{\ln(1+x)\}'}{\{x\}'} = \frac{1/(1+x)}{1}$$

$$\to 1 \quad (x \to +0)$$

なので,
$$\lim_{x \to +0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$
.

上の定理の証明では、 α が実数の場合ならばもう少し直接的に証明ができる。しかし $\pm\infty$ の場合も含めて一気に証明するときには、このような証明がわかりやすい。 α や α と微分との関係については、これ以上は経済学ではあまり出てこないので省略する。

┙

次に積分との関係を考えよう。 a,p,m とも正の定数で, x>0 を定義域とする $g(x)=1/x^{1+p}$ を考えると, $\int_a^\infty g(x)dx=a^{-p}/p$ である。 p 以上の定数 q について $f(x)=m/x^{1+q}$ とする。 f(x),g(x) ともに $x\to\infty$ の とき無限小であり,

$$|f(x)/g(x)| = mx^{p-q} \to \begin{cases} 0 & \text{(if } q > p) \\ m & \text{(if } q = p) \end{cases} \quad (x \to \infty)$$

なので,f(x)=O(g(x)) $(x\to\infty)$ である. さらに, $\int_a^\infty f(x)dx=ma^{-q}/q$ と存在する.これを例にして,以下が成り立つ.

定理 33.25 (a,∞) で定義された関数 f(x),g(x) が, $x\to\infty$ のとき,ともに無限小とする. $f(x)\geq 0,g(x)\geq 0$,f(x)=O(g(x)),かつ広義積分 $\int_a^\infty g(x)dx$ が存在するとき,広義積分 $\int_a^\infty f(x)dx$ が存在する.

証明は簡単なので省略する.

次は無限大について, 同様に定義しよう.

定義 33.26 R で定義された関数 f(x) について, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ のとき, f(x) は, $x\to\infty$ のとき無限大であるという.

 $x \to \infty$ の代わりに, $x \to -\infty$, $x \to c$, $x \to c + 0$, $x \to c - 0$ などのときも同様に定義する. また定義域は \mathbf{R} 全体でなくとも, 例えば $x \to \infty$ の場合ならば, 区間 (a, ∞) であればよい.

定義 33.27 \mathbf{R} で定義された関数 f(x), g(x) が $x \to \infty$ のとき、ともに無限大とする.

(i).
$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$
 のとき,

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to \infty)$$

と表し、f(x) と g(x) は同値な無限大であるという.

- (ii). $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \neq 0$ のとき、f(x) は g(x) と同位な無限大であるという.
- (iii). $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ のとき,

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to \infty)$$

と表し、f(x) は g(x) より小さい無限大であるという.

(iv). ある M>0 が存在して, $\lim_{x_0\to a-0}\sup_{x< x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leq M$ を満たすとき,つまりある x_0 が存在して x_0 より小さい任意の x について $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ が有界のとき

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to \infty)$$

と表す. f(x) は g(x) で押さえられる無限大という.

 ∞ の代わりに $-\infty$, a+0, b-0 としても同様に定義できるのは、前定義と同じである.

無限大についても,経済学ではド・ロピタルの定理を用いる程度なので,これのみ紹介する.一般には $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形で証明するが,より広い意味で証明する.

定理 33.28 (ド・ロピタルの定理)

(i). (a,b) で定義された関数 f(x),g(x) がともに微分可能かつ, g(x) は $x \to a + 0$ (resp. $x \to b - 0$) で無限大とする. このとき, $x \to a + 0$ (resp. $x \to b - 0$) のとき,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \alpha \in \overline{R} \implies \frac{f(x)}{g(x)} \to \alpha$$

(ii). (a,∞) (resp. $(-\infty,b)$) で定義された関数 f(x),g(x) がともに微分可能かつ, $x\to\infty$ (resp. $x\to-\infty$) で無限大とする.このとき, $x\to\infty$ (resp. $x\to-\infty$) のとき,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \alpha \in \overline{R} \implies \frac{f(x)}{g(x)} \to \alpha$$

┙

証明 同様にできるので、(ii) の $x \to \infty$ の場合のみ証明する.

 $\alpha \in [-\infty,\infty)$ のときは、任意の $p > \alpha$ について、ある $x_0 \in (a,\infty)$ が存在して、任意の $x > x_0$ について、

$$\frac{f(x)}{g(x)} < p$$
$$q(x) > 0$$

の 2 式が成り立つ. よって、任意の x_1 (ただし $x_1>x_0$)を一つ固定する. g(x) は $x\to\infty$ で無限大なので、ある $y_0>x_1$ が存在して、任意の $y>y_0$ について $g(y)>g(x_1)$ である. したがって $y>y_0$ のときコーシーの平均値の定理より、ある $x_1< c< y$ が存在して

$$\frac{f(y) - f(x_1)}{g(y) - g(x_1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} < p$$

最左辺と最右辺に、正数 $\frac{g(y)-g(x_1)}{g(y)}$ を掛けて

$$\frac{f(y) - f(x_1)}{g(y)} < p\left(\frac{g(y) - g(x_1)}{g(y)}\right)$$

$$\iff \frac{f(y)}{g(y)} < \frac{f(x_1)}{g(y)} + p\left(1 - \frac{g(x_1)}{g(y)}\right)$$

右辺は $y \to \infty$ のとき p に収束する. よって両辺の $y \to \infty$ の上極限を考えて,任意の $p > \alpha$ について以下が成り立つ.

$$\lim_{y_1 \to \infty} \sup_{y > y_1} \frac{f(y)}{g(y)} \le p$$

同様に $\alpha \in (-\infty, \infty]$ のときは、任意の $q < \alpha$ について、

$$q \le \lim_{y_1 \to \infty} \inf_{y > y_1} \frac{f(y)}{g(y)}$$

が言える. この2式より

$$\lim_{y_1 \to \infty} \inf_{y > y_1} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y_1 \to \infty} \sup_{y > y_1} \frac{f(y)}{g(y)} = \alpha$$

が成り立つので、命題が成り立つ.

ここで積分との関係を考えよう. a,p,m とも正の定数 (ただし 0) で, <math>x > 0 を定義域とする $g(x) = 1/x^{1-p}$ を考えると, $\int_0^b g(x)dx = b^{-p}/p$ である. p 以上の定数 q(ただし q < 1) について $f(x) = m/x^{1-q}$ とする. f(x), g(x) ともに $x \to +0$ のとき無限大であり,

$$|f(x)/g(x)| = mx^{q-p} \to \begin{cases} 0 & \text{(if } q > p) \\ m & \text{(if } q = p) \end{cases} \quad (x \to +0)$$

なので、f(x)=O(g(x)) $(x\to +0)$ である. さらに、 $\int_0^b f(x)dx$ が存在することを例にして、以下が成り立つ.

定理 33.29 (a,b) で定義された関数 f(x),g(x) (ただし $f(x)\geq 0,g(x)\geq 0$) について,広義積分 $\int_a^b g(x)dx$ が存在するとき,

- (i). f(x),g(x) ともに $x\to a+0$ で無限大であり、f(x)=O(g((x))) $(x\to a+0)$ ならば、任意の $c\in(a,b)$ で広義積分 $\int_a^c f(x)dx$ は存在する.
- (ii). f(x),g(x) ともに $x\to b-0$ で無限大であり,f(x)=O(g(x)) $(x\to b-0)$ ならば,任意の $c\in(a,b)$ で広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は存在する.

33.6 ガンマ関数とベータ関数

前節の定理の応用である。まずはガンマ関数を導こう。p>0の定数とする。 $(0,\infty)$ で定義された関数 $f(x)=x^{p-1}e^{-x}$ は $x\to\infty$ のとき無限小である。また $e^{-x/2}$ も $x\to\infty$ のとき無限小であり,計算すると,

$$f(x) = o(e^{-x/2}) \quad (x \to \infty)$$

が成り立つ. $\int_0^\infty e^{-x/2} dx = 2$ なので, 任意の定数 a > 0 について,

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

は広義積分可能である.

この f(x) は $p \ge 1$ のとき、 $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ が存在するので、 $\int_0^\infty f(x) dx$ が存在する.

0 のときは,<math>f(x) は $x \to +0$ のときに無限大となる.またある q(ただし 0 < q < p-1) を取ると, $f(x) = O(x^q)$ かつ,ある a > 0 で $\int_0^a x^q dx = \frac{a^{q+1}}{q+1}$.従って, $\int_0^a f(x) dx$ が存在する.以上から以下が定義できる.

定義 33.30 p > 0 の関数

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$$

をパラメータpのガンマ関数といい, $\Gamma(p)$ で表す.

次にベータ関数を導出しよう。p,q が正の定数として,(0,1) で定義された x の関数 $f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ を考える。p,q ともに 1 以上であれば,f(x) は [0,1] で連続関数なので, $\int_0^1 f(x)dx$ は存在する.

0 のときは、<math>f(x) は $x \to +0$ のとき無限大である。 x^{p-1} も $x \to +0$ のとき無限大であり、

$$\frac{f(x)}{x^{p-1}} = (1-x)^{1-q} \to 1 \quad (x \to +0)$$

より, $f(x) = O(x^p)$ $(x \to +0)$ が言える.また 0 < a < 1 の定数で, $\int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p}$ である.よって,広義積分 $\int_0^a f(x) dx$ が存在する.

0 < q < 1 のときは,f(x) は $x \to 1-0$ のとき無限大である. $(1-x)^{q-1}$ も $x \to 1-0$ のとき無限大であり,

$$\frac{f(x)}{(1-x)^{q-1}} = x^p \to 1 \quad (x \to 1-0)$$

より, $f(x)=O((1-x)^{q-1})$ $(x\to 1-0)$ が言える.また 0< a< 1 の定数で, $\int_a^1 (1-x)^{q-1} dx=\int_0^{1-a} u^{q-1} du=\frac{(1-a)^q}{q}$ である.よって,広義積分 $\int_a^1 f(x) dx$ が存在する.以上より,以下が定義できる.

定義 33.31 p,q>0 で以下の実数が定まり,

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

これをパラメータ (p,q) のベータ関数といい,B(p,q) で表す.

34 まだまだ続く(まだ書いていない)