希少な資源を有効利用

ミクロ経済学学生サポート I-4

2 財とも，労働時間↑で生産性↓のケース

以下，ページ番号↓を押すと節のトップへ戻るので便利.

1 A さんの最適行動は?

- 英語と数学の試験まであと 4 時間しかない，大学生 A さん.
- 父親からもらえる収入は，1 点あたり英語 200 円・数学 600 円.
- A さんの目的 ⋯ 収入最大化.

1 A さんの最適行動は?

- 英語と数学の試験まであと 4 時間しかない，大学生 A さん.
- 父親からもらえる収入は，1 点あたり英語 200 円・数学 600 円.
- A さんの目的 ⋯ 収入最大化.

英語・数学ともについては勉強時間が増えるにつれて能率が悪くなるとする．A さんの点数の生産関数は,

$$\text{英語点数} = 30\sqrt{\text{英語勉強時間}}$$

$$\text{数学点数} = 10\sqrt{\text{数学勉強時間}}$$

2 解．方法

I-3 同様に，文字で表してグラフによって求めよう．

2 解．方法

I-3 同様に，文字で表してグラフによって求めよう．

科目	勉強時間	取れる点
英語	E	x
数学	M	y

2 解．方法

I-3 同様に，文字で表してグラフによって求めよう.

科目	勉強時間	取れる点	よって
英語	E	x	$x = 30\sqrt{E}$
数学	M	y	$y = 10\sqrt{M}$

2 解．方法

I-3 同様に，文字で表してグラフによって求めよう．

科目	勉強時間	取れる点	よって
英語	E	x	$x = 30\sqrt{E}$
数学	M	y	$y = 10\sqrt{M}$

$$\text{変形して},E = \frac{x^2}{900}, \quad M = \frac{y^2}{100}$$

2 解．方法

I-3 同様に，文字で表してグラフによって求めよう．

科目	勉強時間	取れる点	よって
英語	E	x	$x = 30\sqrt{E}$
数学	M	y	$y = 10\sqrt{M}$

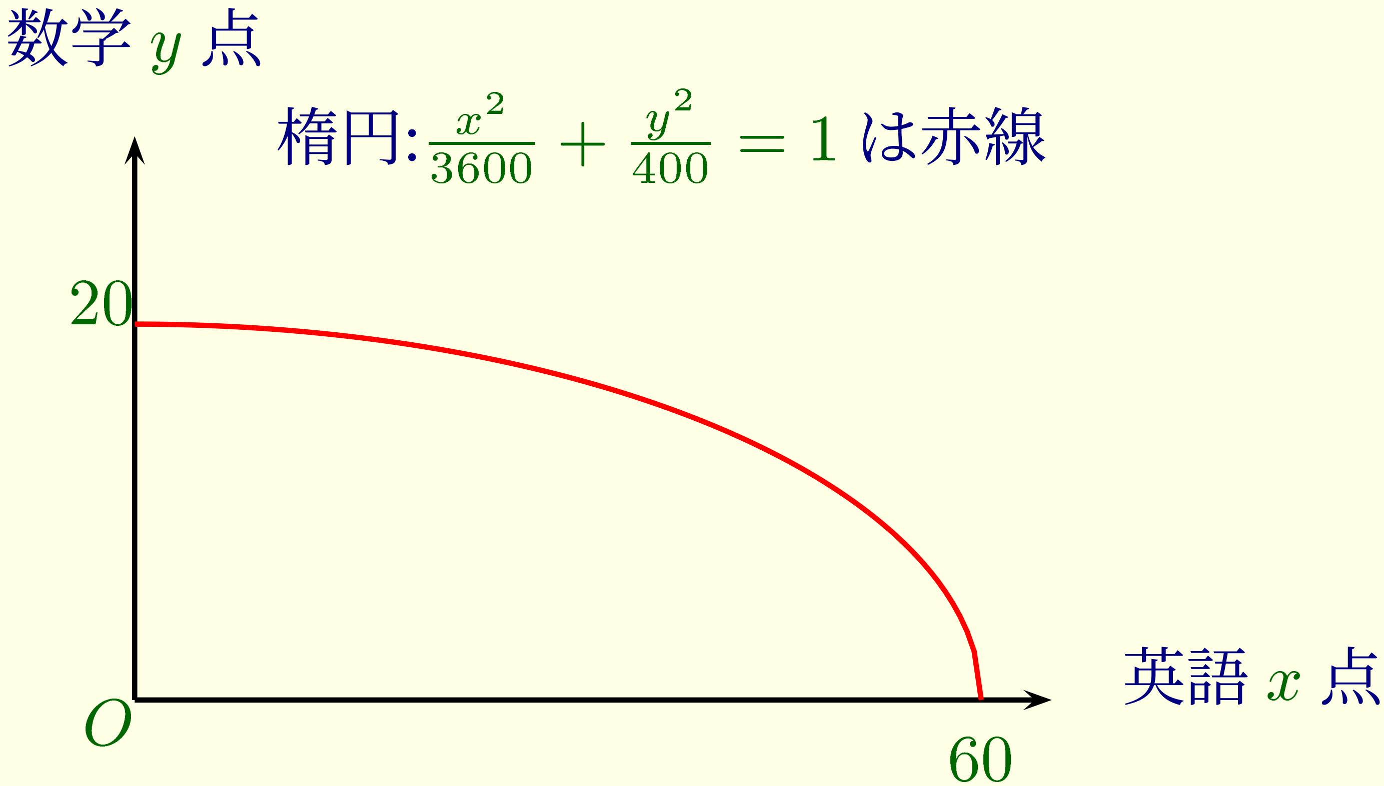
$$\text{変形して,} E = \frac{x^2}{900}, \quad M = \frac{y^2}{100}$$

勉強時間は $E + M \leq 4$ だから，結局

$$\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{100} \leq 4 \iff \frac{x^2}{3600} + \frac{y^2}{400} \leq 1$$

この図は楕円である．

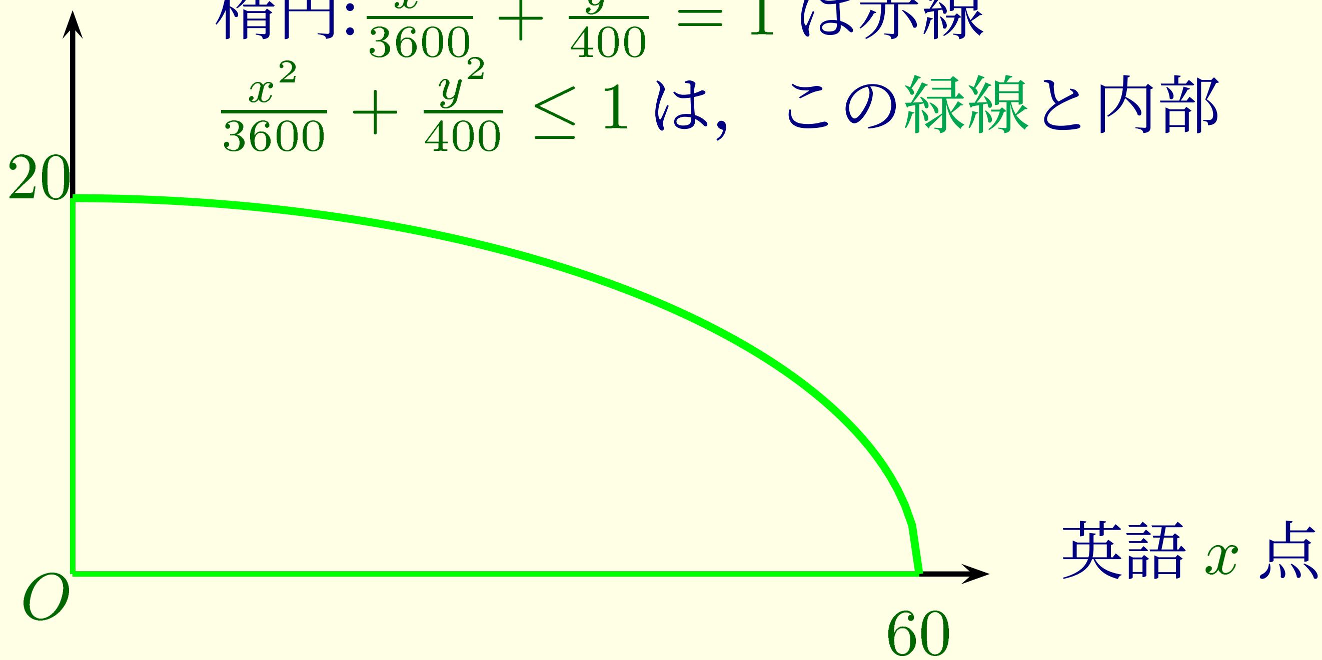
3 図示する:生産可能集合と等収入曲線



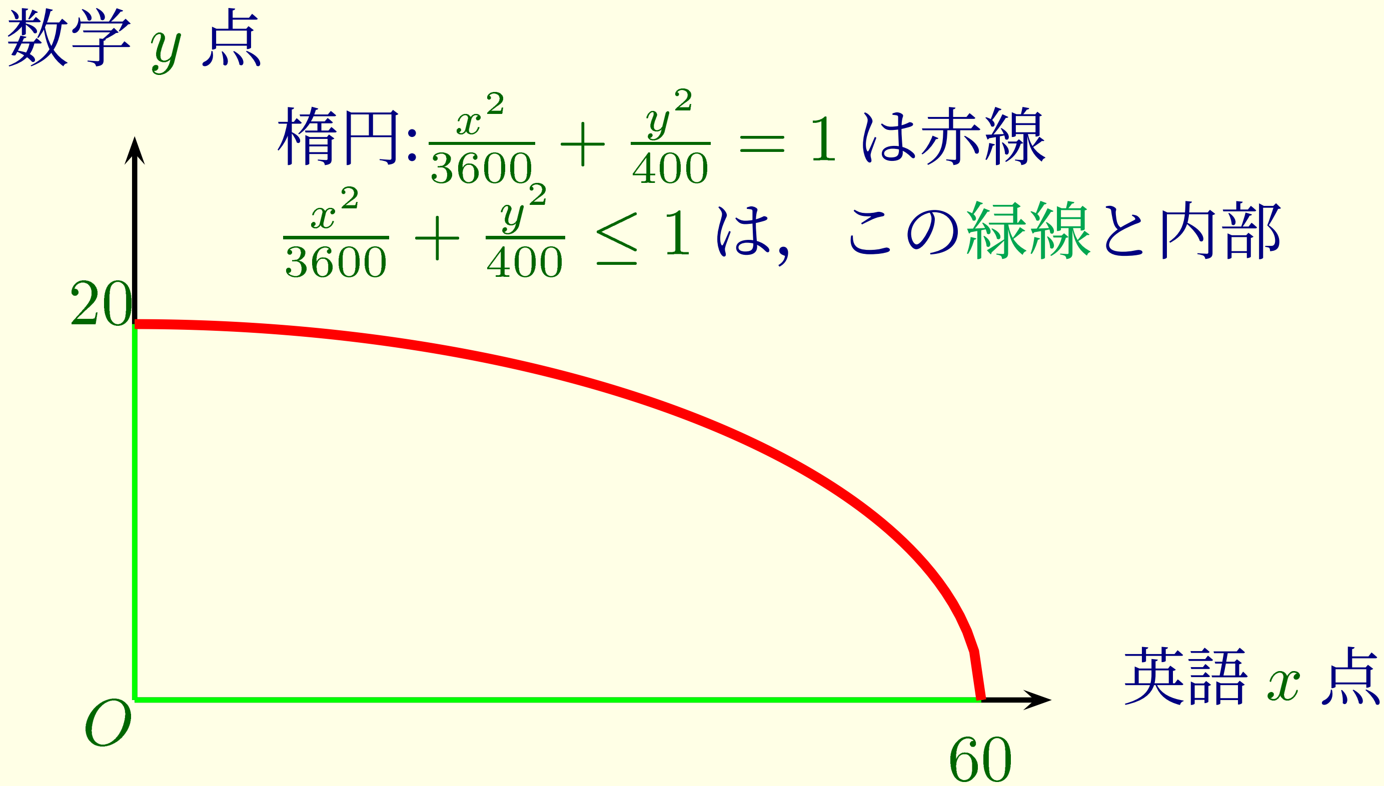
3 図示する:生産可能集合と等収入曲線

楕円:$\frac{x^2}{3600}+\frac{y^2}{400}=1$ は赤線

$\frac{x^2}{3600}+\frac{y^2}{400}\leq 1$ は，この緑線と内部

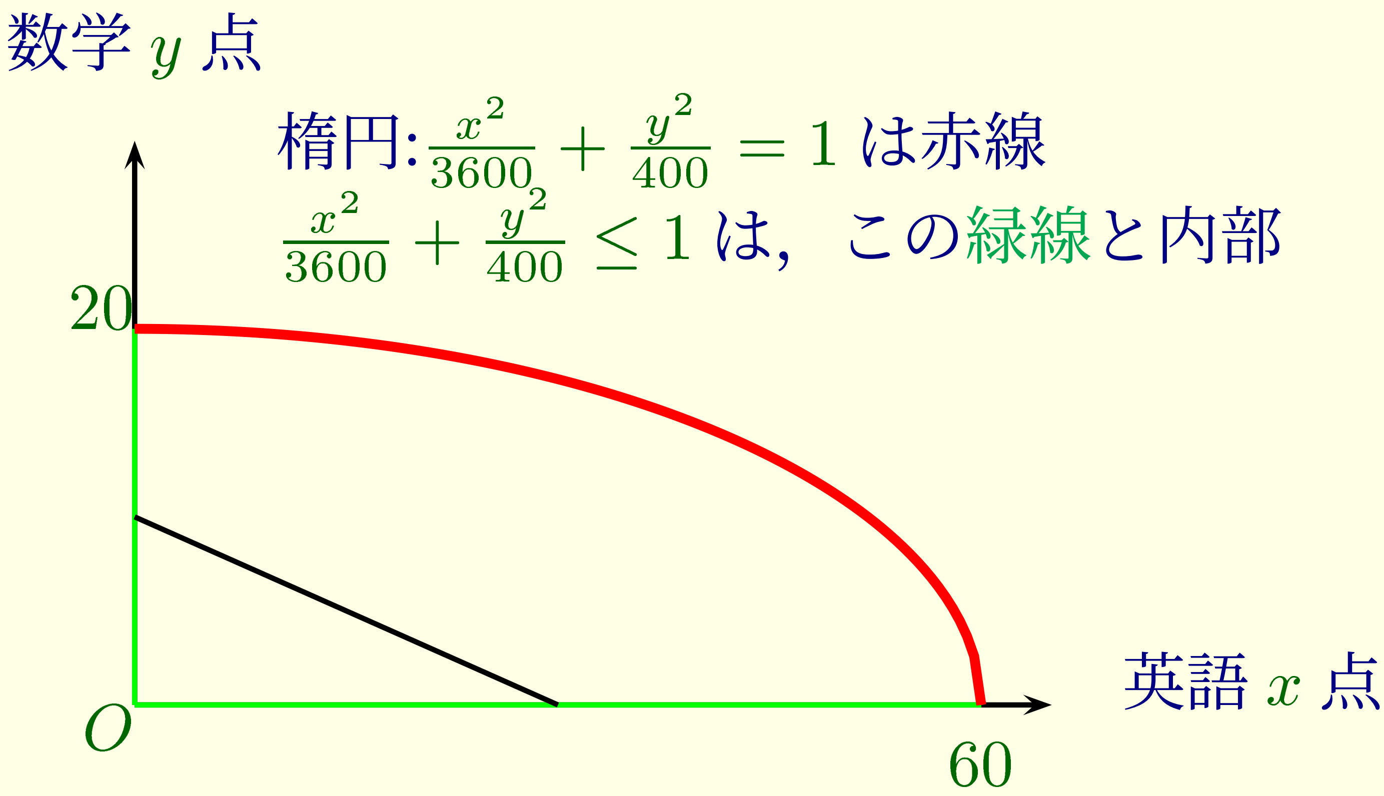


3 図示する:生産可能集合と等収入曲線



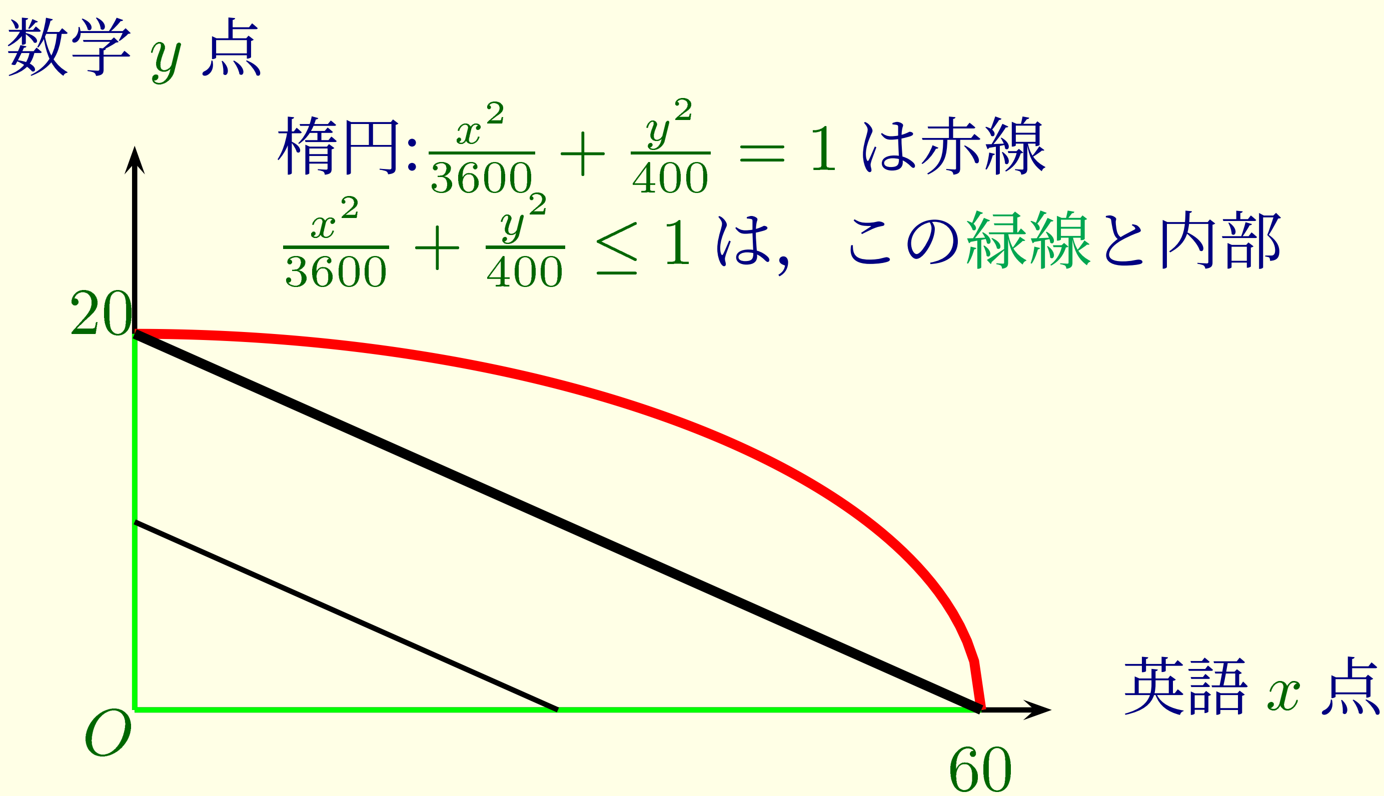
重要なのはこの赤線.

3 図示する:生産可能集合と等収入曲線



重要なのはこの赤線.
収入曲線は $200x+600y=$ 収入．どんどん右側シフトさせよう.

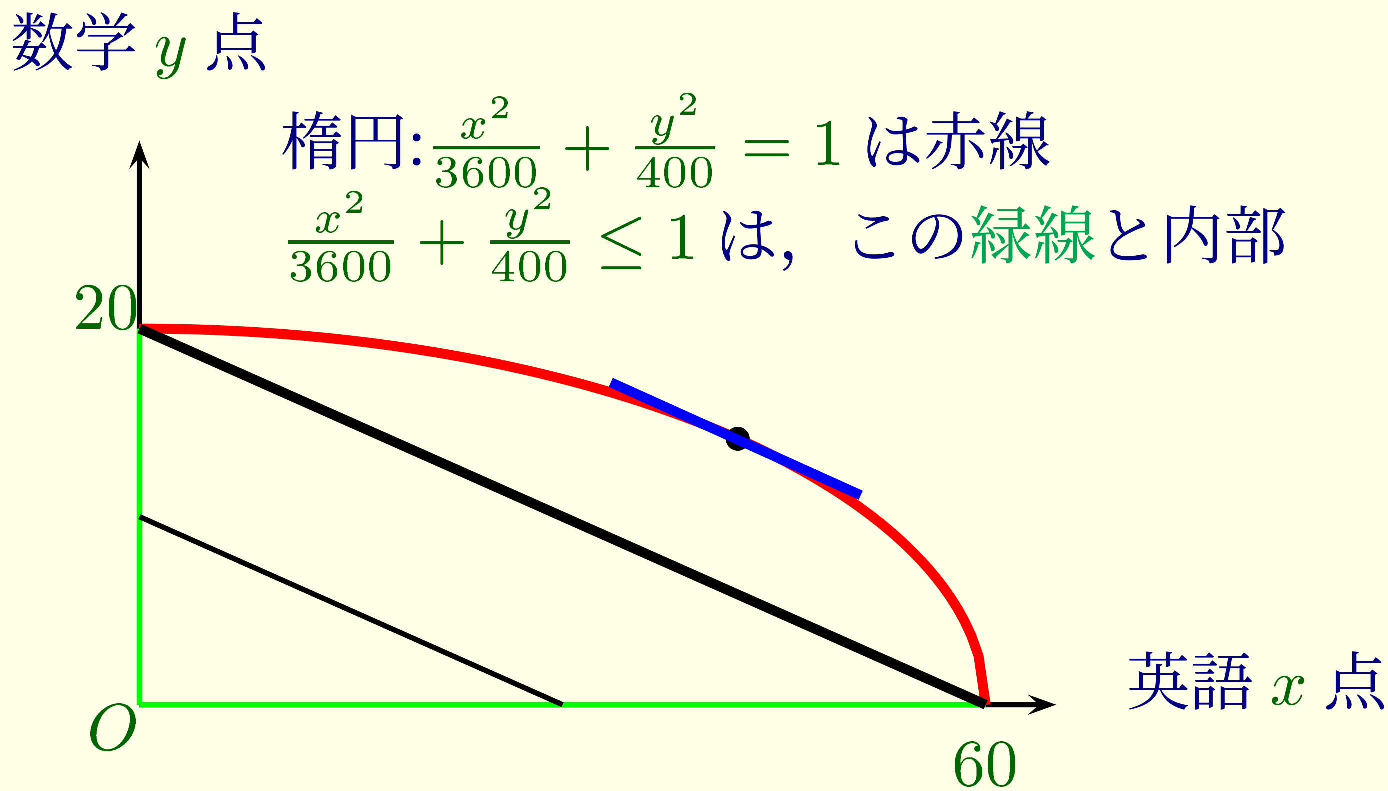
3 図示する:生産可能集合と等収入曲線



重要なのはこの赤線.
収入曲線は $200x+600y=$ 収入．どんどん右側シフトさせよう.

黒太線:　まだまだ右上シフトできる.

3 図示する:生産可能集合と等収入曲線

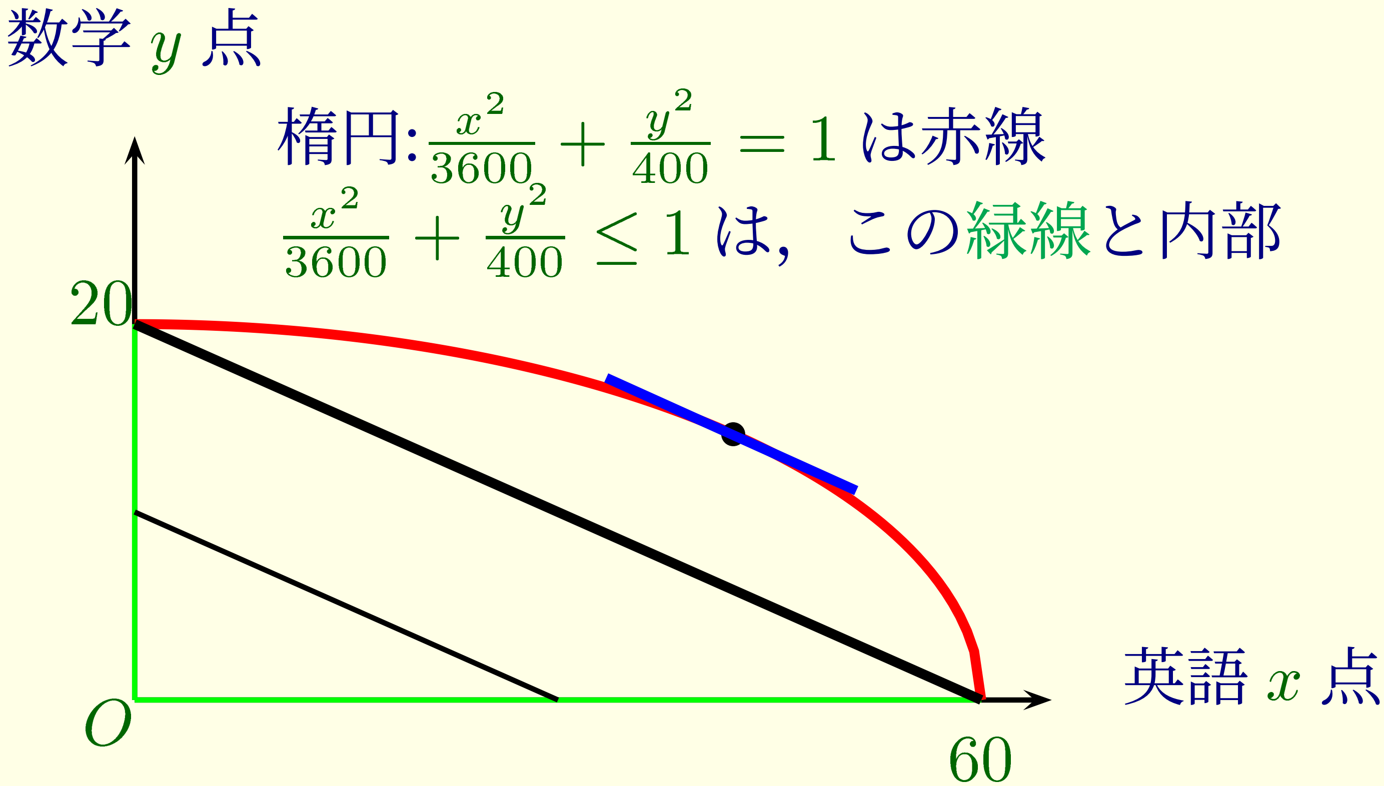


重要なのはこの赤線.
収入曲線は $200x + 600y =$ 収入．どんどん右側シフトさせよう.

黒太線:　まだまだ右上シフトできる.

青太線:　これ以上右上シフトすると赤線と交わらない.

3 図示する:生産可能集合と等収入曲線



重要なのはこの赤線.
収入曲線は $200x + 600y =$ 収入．どんどん右側シフトさせよう.

黒太線:　まだまだ右上シフトできる.

青太線:　これ以上右上シフトすると赤線と交わらない.

接点の座標の求め方は，次ページ以降.

4 偏微分の知識を前提とする 1

x, y の関数 $F(x, y)$ が x, y でそれぞれ偏微分可能とする．このとき任意の定数 A について，$F(x, y) = A$ を xy 平面上に書いたとき，

$F(x, y) = A$ 上の点 (a, b) における「接線の傾き」は，$\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{x=a, y=b} \neq 0$ のとき，

4 偏微分の知識を前提とする 1

x, y の関数 $F(x, y)$ が x, y でそれぞれ偏微分可能とする．このとき任意の定数 A について，$F(x, y) = A$ を xy 平面上に書いたとき，
$F(x, y) = A$ 上の点 (a, b) における「接線の傾き」は，$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{x=a, y=b} \neq 0$ のとき，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

が成り立つことを知っているとしている．ただし，$\frac{dy}{dx}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial x}$ はそれぞれ $x = a, y = b$ で評価しているものとする．

例えば，今までの等収入曲線の場合，$200x + 600y = A$ で (A は定数)，

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 200, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 600 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{200}{600}$$

より，$200x + 600y = A$ 上の任意の点 (a, b) の傾きは $-1/3$ になる．

5 偏微分の知識を前提とする 2 I-3 との違い

また I-3 での生産可能フロンティア $\frac{x^2}{180}+y=20$ についても,
$F(x,y)=\frac{x^2}{180}+y$ とすると,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x}{90},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=1$$

より，フロンティア上の点 (a,b) の傾きは,

$$-\frac{\frac{a}{90}}{1}\text{つまり},-\frac{a}{90}$$

となる.

5 偏微分の知識を前提とする 2 I-3 との違い

また I-3 での生産可能フロンティア $\frac{x^2}{180}+y=20$ についても，
$F(x,y)=\frac{x^2}{180}+y$ とすると，

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x}{90},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=1$$

より，フロンティア上の点 (a,b) の傾きは，

$$-\frac{\frac{a}{90}}{1}\text{つまり},-\frac{a}{90}$$

となる．

I-3 では，2 次関数の微分を使い，高校生でも解けるような y の関数としたが，この I-4 では，偏微分を利用しなければ，最適な点を計算で出すことはできない．

6 最適点 (a,b) を計算で求めよう

$F(x,y)=\frac{x^2}{3600}+\frac{y^2}{400}$ とする． $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{x}{1800}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{y}{200}$ より,

(i) $-\dfrac{\frac{a}{1800}}{\frac{b}{200}}=-\dfrac{1}{3}$ (傾き $-\frac{1}{3}$ のとき最適)

(ii) $\frac{a^2}{3600}+\frac{b^2}{400}=1$(楕円上にある)

を連立して解けばよい． (i) を解くと $a=3b$． これを (ii) に代入して,

6 最適点 (a,b) を計算で求めよう

$F(x,y) = \frac{x^2}{3600} + \frac{y^2}{400}$ とする． $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{x}{1800}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{y}{200}$ より,

(i) $-\dfrac{\frac{a}{1800}}{\frac{b}{200}} = -\dfrac{1}{3}$ (傾き $-\frac{1}{3}$ のとき最適)

(ii) $\frac{a^2}{3600} + \frac{b^2}{400} = 1$(楕円上にある)

を連立して解けばよい． (i) を解くと $a = 3b$. これを (ii) に代入して,

$\frac{9b^2}{3600} + \frac{b^2}{400} = 1$ よって, $b = 10\sqrt{2}$.

6 最適点 (a,b) を計算で求めよう

$F(x,y) = \frac{x^2}{3600} + \frac{y^2}{400}$ とする． $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{x}{1800}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{y}{200}$ より,

$$\text{(i)}\ -\frac{\frac{a}{1800}}{\frac{b}{200}} = -\frac{1}{3}\ \text{(傾き } -\tfrac{1}{3} \text{ のとき最適)}$$

$$\text{(ii)}\ \frac{a^2}{3600} + \frac{b^2}{400} = 1 \text{(楕円上にある)}$$

を連立して解けばよい． (i) を解くと $a = 3b$． これを (ii) に代入して,

$\frac{9b^2}{3600} + \frac{b^2}{400} = 1$ よって, $b = 10\sqrt{2}$.

$a = 3b$ に代入して, $a = 30\sqrt{2}$． よって, $(x,y) = (30\sqrt{2}, 10\sqrt{2})$ が最適.

6 最適点(a,b)を計算で求めよう

$F(x,y)=\frac{x^2}{3600}+\frac{y^2}{400}$ とする． $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{x}{1800}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{y}{200}$ より,

(i) $-\dfrac{\frac{a}{1800}}{\frac{b}{200}}=-\dfrac{1}{3}$ (傾き $-\frac{1}{3}$ のとき最適)

(ii) $\dfrac{a^2}{3600}+\dfrac{b^2}{400}=1$(楕円上にある)

を連立して解けばよい．(i) を解くと $a=3b$．これを (ii) に代入して,

$\dfrac{9b^2}{3600}+\dfrac{b^2}{400}=1$ よって，$b=10\sqrt{2}$.

$a=3b$ に代入して，$a=30\sqrt{2}$．よって，$(x,y)=(30\sqrt{2},10\sqrt{2})$ が最適.

英語と数学の勉強時間 (E,M) と点数 (x,y) の関係は,
$x=30\sqrt{E}, y=10\sqrt{M}$ だったので，代入して解くと

6 最適点 (a,b) を計算で求めよう

$F(x,y)=\frac{x^2}{3600}+\frac{y^2}{400}$ とする． $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{x}{1800}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{y}{200}$ より,

(i) $-\dfrac{\frac{a}{1800}}{\frac{b}{200}}=-\dfrac{1}{3}$ (傾き $-\frac{1}{3}$ のとき最適)

(ii) $\frac{a^2}{3600}+\frac{b^2}{400}=1$(楕円上にある)

を連立して解けばよい．(i) を解くと $a=3b$．これを (ii) に代入して,

$\frac{9b^2}{3600}+\frac{b^2}{400}=1$ よって，$b=10\sqrt{2}$.

$a=3b$ に代入して，$a=30\sqrt{2}$．よって，$(x,y)=(30\sqrt{2},10\sqrt{2})$ が最適.

英語と数学の勉強時間 (E,M) と点数 (x,y) の関係は,

$x=30\sqrt{E}, y=10\sqrt{M}$ だったので，代入して解くと

$E=M=2$．2 時間づつ勉強することが最適行動であることが分かる.

7 専門用語など

生産関数が投入要素で微分可能な関数のとき，限界生産力は，生産関数の導関数で表される．

7 専門用語など

生産関数が投入要素で微分可能な関数のとき，限界生産力は，生産関数の導関数で表される．

今は投入要素が勉強時間 1 つだけなので，それを L としよう．ある財の生産関数を $f(L)$ とし，2 階微分可能とすると，

- 限界生産力は $f'(L)$ で表される．
- また限界生産力逓減とは，$L\uparrow\rightarrow f'(L)\downarrow$ のことなので，$f''(L)<0$ で表される．

英語の場合，生産関数は $f(E)=10\sqrt{E}$ と書ける (E は労働投入量).
限界生産力は，$10\cdot\frac{1}{2\sqrt{E}}=\frac{5}{\sqrt{E}}$.

7 専門用語など

生産関数が投入要素で微分可能な関数のとき，限界生産力は，生産関数の導関数で表される．

今は投入要素が勉強時間 1 つだけなので，それを L としよう．ある財の生産関数を $f(L)$ とし，2 階微分可能とすると，

- 限界生産力は $f'(L)$ で表される．
- また限界生産力逓減とは，$L \uparrow \to f'(L) \downarrow$ のことなので，$f''(L) < 0$ で表される．

英語の場合，生産関数は $f(E) = 10\sqrt{E}$ と書ける (E は労働投入量).
限界生産力は，$10 \cdot \frac{1}{2\sqrt{E}} = \frac{5}{\sqrt{E}}$.

また $f''(E) = \left\{ \frac{5}{\sqrt{E}} \right\}' = 5\{E^{-1/2}\}' = -\frac{5}{2}E^{-3/2} < 0$ となるので，限界生産力逓減であることが言える．数学も同様 (確かめてみよ).

End

Push Esc Key or Click 閉じる，最大化.

@ Daito Bunka Univ. (大東文化大学)

Last Modified: June 23, 2007